Lógica deductiva

La lógica deductiva es un proceso par obtener conclusiones verdaderas a partir de suposiciones que se consideran verdaderas. Al contrario de la intuición, la lógica tiene reglas muy precisas para asegurarse que al usarla correctamente no se pueda llegar a resultados falsos. Esto requiere de mucho cuidado y de no dejarse llevar por lo que nos parece cierto.

Una **proposición** es una oración que afirma o niega algo, y que solo puede ser verdadera o falsa (aunque no lo sepamos).

Ejemplos de proposiciones:

A : *Los murciélagos son aves* (falso)

B : *El sol brilla* (cierto)

C : *No hay vida extraterrestre* (no se sabe)

D : *3 > 5* (falso)

E : *Un triángulo tiene 3 lados* (cierto)

Dos proposiciones son **equivalentes** si significan lo mismo.

Ejemplos:

10 es múltiplo de 5 es equivalente a *5 es divisor de 10*

A es el hija de B es equivalente a *B es el padre o la madre de A*

Las proposiciones pueden combinarse de distintas maneras para obtener otras proposiciones:

La **negación** de una proposición P es la proposición que dice que P es falsa, se le denota por ┐P y se dice “no P”.

B : *El sol brilla* ┐B : *El sol no brilla*

C : *No hay vida extraterrestre* ┐C : *Hay vida extraterrestre*

D : *3 > 5* ┐D : *3 ≤ 5*

Observar que ┐P es verdadera cuando P es falsa y ┐P es falsa cuando P es verdadera.

La negación de P consiste de todas las alternativas posibles a P, así que la negación de la negación de P es P:

A : *Los murciélagos son aves*

$\neg A$: *Los murciélagos no son aves*

$\neg\neg A$: *Los murciélagos sí son aves* (que equivale a A)

La **conjunción** de dos proposiciones P y Q es la proposición que dice que *ambas* son verdaderas, se le denota por $P \wedge Q$ y se dice "P y Q".

Ejemplos:

1. $A \wedge B$: *Los murciélagos son aves y el sol brilla*
2. Si F : $x \leq y$, G : $x \geq y$ entonces $F \wedge G$: $x = y$

La **disyunción** de dos proposiciones P y Q es la proposición que dice que *al menos una* de ellas es verdadera, se le denota por $P \vee Q$ y se dice "P o Q".

Ejemplos:

1. $A \vee B$: *Los murciélagos son aves o el sol brilla*
2. Si H : $x < y$ I : $x > y$ *entonces* $H \vee I$: $x \neq y$

La "o" en $P \vee Q$ es *inclusiva*, es cierta si una o si las dos proposiciones sean ciertas.

Ejemplo. Si J : *6 es múltiplo de 2* y K : *6 es múltiplo de 3*

$J \vee K$: *6 es múltiplo de 2 o de 3* (verdadera)

¿Como será la negación de una conjunción? $P \wedge Q$ dice dice que las dos son ciertas.

Negar $P \wedge Q$ equivale a decir que al menos una de las dos es falsa, es decir

$$\boxed{\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q}$$

Ejemplo:

$A \wedge B$: *Los murciélagos son aves **y** el sol brilla*

$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$: *Los murciélagos no son aves **o** el sol no brilla*

¿Como será la negación de una disyunción? $P \vee Q$ dice que al menos una de las dos es cierta.

Negar $P \vee Q$ equivale a decir que ninguna de las dos es cierta, es decir que ambas son falsas

$$\boxed{\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q}$$

Ejemplo:

$A \vee B$: *Los murciélagos son aves **o** el sol brilla*

$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$: *Los murciélagos no son aves **y** el sol no brilla*

La **condicional** $P \to Q$ es la proposición que dice que si P es cierta entonces Q también es cierta, se lee "si P entonces Q".

Ejemplo:

Si L : *n es múltiplo de 4* y M : *n es par* entonces

$L \to M$: *Si n es múltiplo de 4 entonces n es par* (verdadera)

$M \to L$: *Si n es par entonces n es múltiplo de 4* (falsa)

Observar que $P \to Q$ *no dice* que P o Q sean verdaderas, únicamente dice que si P es verdadera entonces Q también lo es. La condicional $P \to Q$ es falsa únicamente cuando P es verdadera y Q es falsa, así que $P \to Q$ *es equivalente* a $\neg P \vee Q$.

$$\boxed{P \to Q = \neg P \vee Q}$$

Así que negar $P \to Q$ equivale a decir que P es verdadera y Q no lo es.

$$\boxed{\neg(P \to Q) = P \wedge \neg Q}$$

Ejemplo:

$M \to L$: *Si n es par entonces n es múltiplo de 4*

$\neg(M \to L) = M \wedge \neg L$: *n es par y n no es múltiplo de 4*

Como
$$\begin{array}{ccc} P \to Q & = & \neg P \vee Q \\ & & \parallel \\ \neg Q \to \neg P & = & Q \vee \neg P \end{array}$$

entonces
$$\boxed{P \to Q \quad = \quad \neg Q \to \neg P}$$

Ejemplo. Las tres proposiciones siguientes son equivalentes:

$L \to M$: *Si n es múltiplo de 4 entonces n es par*

$\parallel$

$\neg L \vee M$: *n no es múltiplo de 4 o n es par*

$\parallel$

$\neg M \to \neg L$: *Si n no es par entonces n no es múltiplo de 4*

Los conectores lógicos $\neg \wedge \vee \rightarrow$ pueden combinarse de muchas maneras para obtener proposiciones mas complejas.

Por ejemplo, la **doble condicional** $P \leftrightarrow Q$ es la afirmación que dice que si P es cierta entonces Q es cierta y que si Q es cierta entonces P es cierta. Se denota por $P \leftrightarrow Q$ y se lee "P si y solo si Q".

$$\boxed{P \leftrightarrow Q = (P\rightarrow Q) \wedge (Q\rightarrow P)}$$

Ejemplos:

1. $V \leftrightarrow S$: *Hoy es viernes si y solo si mañana es sábado*
2. $L \leftrightarrow A$: *Los lados de un triángulo son iguales si y solo si sus ángulos son iguales*

Ejercicios.

1. Escribe las siguientes proposiciones como combinaciones de proposiciones mas simples (entre mas simples mejor) usando los conectores lógicos $\neg \wedge \vee \rightarrow$.

A : *Los números que no son racionales son irracionales*

B : *Los gatos son bonitos pero no son amigables*

C : *Cuando llueve fuerte caen rayos o granizo*

D : *n es divisible entre 12 si es divisible entre 4 y entre 6*

2. Escribe las negaciones de las siguientes proposiciones:

F : *Los insectos tienen 6 patas o tienen 8 patas*

G : Los reptiles no vuelan ni nadan

H : *Cuando nieva hace frio*

I : n es divisible entre 5 y no es divisible entre 7

J : *Si a<b entonces* $a^2 < b^2$

3. Escribe proposiciones equivalentes sin usar condicionales:

J : *Si n es divisible entre 2 entonces n es par*

K : *Si un polígono no tiene 3 lados entonces no es un triángulo*

4. Usa los conectores $\neg \wedge \vee$ para construir un o *exclusivo*, es decir, una combinación de dos proposiciones P, Q que sea cierta cuando una sea cierta pero no cuando ambas sean ciertas.

5. Escribe proposiciones equivalentes a las siguientes usando únicamente la conjunción, la disyunción y la negación (sin usar condicionales)

a. $\neg P \rightarrow Q$ b. $\neg(P\rightarrow\neg Q)$ c. $P \leftrightarrow Q$ d. $(P\rightarrow Q)\rightarrow R$

Formulas proposicionales

Las expresiones que se construyen a partir de los conectores lógicos $\neg\ \wedge\ \vee\ \longrightarrow$, por ejemplo

$\neg P$ $\qquad$ $Q \vee P$ $\qquad$ $\neg P \rightarrow Q$ $\qquad$ $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow R$

donde P, Q y R no están determinadas se llaman *formulas proposicionales*. Al darle valores a las variables P, Q y R obtenemos proposiciones cuya verdad o falsedad solo depende de la verdad o falsedad de P, Q y R y no de lo que estas digan.

Podemos resumir esto por medio de las *tablas de verdad*, que expresan la veracidad o falsedad de una proposición en términos de la veracidad o falsedad de las partes:

P	$\neg$P
V	F
F	V

P	Q	P$\wedge$Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	Q	P$\vee$Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

P	Q	P$\rightarrow$Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Hay muchas maneras de combinar proposiciones por medio de conectivos lógicos, pero distintas combinaciones pueden ser equivalentes: esto pasa si y solo si sus tablas de verdad son iguales.

Por ejemplo, como las tablas de verdad de $P \longrightarrow Q$, $\neg P \vee Q$ y $\neg Q \longrightarrow \neg$ son iguales, las tres son equivalentes.

P	Q	P $\longrightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$\neg$P$\vee$Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$\neg$Q $\longrightarrow$ $\neg$P
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Se pueden construir formulas proposicionales con cualquier numero de variables, sus tablas de verdad deben contener todas las combinaciones de verdad o falsedad de todas las variables. Para una variable hay dos posibilidades, para 2 variables hay 4 combinaciones ¿Cuantas combinaciones verdadero /falso hay para 3 variables?
¿Y para 4?

Ejercicios.

6. Usando los conectores ┐ ∧ ∨ construye combinaciones de P y Q cuyas tablas de verdad sean

a.

P	Q	
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

b.

P	Q	
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

c.

P	Q	
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	V

7.* ¿Será posible obtener *cualquier* tabla de verdad con 2 variables usando conectores lógicos?

8. ¿Cuantas proposiciones *no equivalentes* podrán construirse combinando 2 proposiciones?
Hint: ¿cuantas tablas de verdad hay?

Significados y cuantificadores.

El lenguaje cotidiano puede ser ambiguo, pero al considerar una proposición su significado debe quedar totalmente claro.

> *Todos los perros no ladran* no es nada claro: podría interpretarse de distintas maneras como *No todas los perros ladran* o como *Ningún perro ladra*.
>
> *Ningún perro no ladra* es aun mas confusa.
>
> *Los perros tienen 4 patas* puede querer decir que como especie los perros tienen 4 patas (lo que es cierto) o que cada perro individualmente tiene 4 patas (lo que es falso), así que hay que aclarar a que nos referimos.
>
> *Algunos números no tienen raíz cuadrada* es ambiguo porque no dice a que clase de números se refiere y la verdad o falsedad de la afirmación depende de eso, hay que especificarlo.

En lógica y en matemáticas las palabras tienen significados *muy precisos*, que pueden diferir del que se les da en el lenguaje común. Al afirmar algo estamos diciendo que es cierto *siempre*, *sin excepciones*, a menos que lo aclaremos explícitamente.

Al decir *Las aves vuelan* queremos decir que *todas las aves vuelan* sin excepciones.

Al decir *Los mamíferos no vuelan* queremos decir que *ningún mamífero vuela* sin excepción.

Al decir *Algunos mamíferos vuelan* queremos decir que *hay mamíferos que vuelan* (al menos uno, pero podrían ser todos)

Para escribir con precisión usamos los siguientes **cuantificadores**

Cuantificador	*Significado*	*Notación formal*	
todos	*se cumple siempre, sin excepciones*	$\forall$	para todo
algunos	*se cumpla al menos una vez (quizá siempre)*	$\exists$	existe
ningún	*no se cumple nunca*	$\nexists$	no existe

Ejemplos:

Todos los gnomos son verdes = *Cada gnomo es verde* = *No existen gnomos que no sean verdes*

Al afirmar que *todos los gnomos son verdes* **no** afirmamos que los gnomos existan, solo que de existir deben ser verdes.

Algunos gnomos son verdes = *Existen gnomos verdes* = *Hay al menos un gnomo verde*

Al afirmar que *algunos gnomos son verdes* **no** afirmamos que *algunos gnomos no son verdes!*

Ningún gnomo es verde = *No existen gnomos verdes*

No dice si existen o no existen los gnomos, sólo afirma que no hay ningún gnomo verde.

No todos los gnomos son verdes = *Existen gnomos que no son verdes*

No dice que hallan gnomos verdes, solo dice que alguno no son verdes

Al entender el significado exacto de los cuantificadores *todos*, *algunos* y *ninguno*, las negaciones de proposiciones que los contienen se aclaran:

A : *Todas las aves vuelan*	$\neg$A : *Algunas aves no vuelan*
B : *Ningún mamífero vuela*	$\neg$B : *Algunos mamíferos vuelan*
C : *Algunas estrellas brillan*	$\neg$C : *Ninguna estrella brilla*
D : *Algunas estrellas no brillan*	$\neg$D : *Todas las estrellas brillan*
E: *Cada círculo tiene centro*	$\neg$E : *Hay un círculo que no tiene centro*

Algunas veces los cuantificadores no se escriben sino que se sobreentienden, por ejemplo:

Las bisectrices de un triángulo son concurrentes significa que las bisectrices de *cada* triángulo son concurrentes (no significa que las bisecrices de un triángulo en particular sean concurrentes)

Dos rectas distintas se intersectan en 1 punto significa que *cada* par de rectas distintas se intersectan en 1 punto (no significa que existan 2 rectas particulares que se intersectan en 1 punto)

Lo anterior es fácil de adivinar si recordamos que las afirmaciones en matemáticas deben entenderse con la mayor generalidad posible.

Ejercicios.

9. Escribe las negaciones de las siguientes proposiciones, sin empezar con **no**.

A : *Todos los hombres son mortales*

B : *Ninguna araña tiene 6 patas*

C : *Algunos metales conducen la electricidad*

D : *Algunas plantas no tienen raíces*

E : *Cada rombo tiene 4 lados iguales*

F : *Los números reales son racionales*

G : *Algunos números primos no son impares*

H: *Todo número real es el cuadrado de un número complejo*

I: *Por ningún punto del plano pasan dos paralelas a una recta*

10. ¿Cuales de estos pares de proposiciones son equivalentes y cuales no?

a. *Todos los x son y* y *Todos los y son x*

b. *Algunos x son y* y *Algunos y son x*

c. *No todo x es y* y *No todo y es x*

d. *Ningún x es y* y *Ningún y es x*

Argumentos lógicos

Al combinar proposiciones por medio de $\neg \; \wedge \; \vee \; \rightarrow$ es posible obtener proposiciones que siempre son verdaderas, o que siempre son falsas, independientemente de si las proposiciones iniciales eran verdaderas o falsas. Por ejemplo:

$P \vee \neg P$ *siempre es verdadera, independientemente de P*

$P \wedge \neg P$ *siempre es falsa, independientemente de P*

Las combinaciones de proposiciones que siempre son verdaderas se llaman **tautologías** y son la base de los razonamientos lógicos.

Ejemplos de tautologías:

$P \wedge Q \rightarrow P$ $\quad$ $P \rightarrow P \vee Q$ $\quad$ $(P \vee Q) \wedge \neg P \rightarrow Q$ $\quad$ $P \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$

$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P$ $\quad$ $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$

Las combinaciones de proposiciones que siempre son falsas se llaman **contradicciones**.

Ejercicio.

11. ¿Cuales de las siguientes proposiciones son tautologías, contradicciones o ninguna de las dos?

a. $(P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q)$

b. $(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)$

c. $P \rightarrow \neg P$

d. $(P \rightarrow \neg P) \wedge P$

e. $(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow \neg Q)$

f. $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q)$

g. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

h. $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg P$

Un **argumento lógico** es un razonamiento que a partir de proposiciones verdaderas *siempre* obtiene conclusiones verdaderas sin importar que digan las proposiciones.

Los argumentos lógicos mas sencillos usan las condicionales que son siempre ciertas (las que son tautologías) llamadas **implicaciones** y denotadas por $\Rightarrow$.

Ejemplos de argumentos lógicos usando implicaciones:

$(P \wedge Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$

Si hoy es sábado o domingo y *Hoy no es sábado* entonces *Hoy es domingo*

$(P \rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$

Si cae nieve hace frio y *Cae nieve* entonces *Hace frio*

Hay argumentos que *parecen* lógicos pero no lo son, estos son llamados **falacias**. (del latín *fallatia = engaño*). Algunas falacias comunes vienen de usar condicionales que no son tautologías.

¿ Argumentos lógicos o falacias ?

- *Si cae nieve hace frio* y *No hace frio* entonces *no cae nieve ?*

  Si, $(P \to Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$ *es un argumento lógico*

- *Si llueve esta nublado* y *No llueve* entonces *no está nublado* ?

  No, $(P \to Q) \wedge \neg P \not\Rightarrow \neg Q$ *es una falacia*

- *Cuando está soleado hace calor* y *hace calor* entonces *está soleado ?*

  No, $(P \to Q) \wedge Q \not\Rightarrow P$ *es una falacia*

- *Si cae nieve hace frio* *y* *Si hay sol no hace frio* entonces *Si hay sol no cae nieve ?*

  Si, $(P \to Q) \wedge (R \to \neg Q) \Rightarrow (R \to \neg P)$ *es un argumento lógico*

Ejercicios.

12. ¿Que conclusiones lógicas puedes obtener (basándote *únicamente* en lo que se dice)?

   a. *Si p divide a n^2 entonces p divide a n* **y** *p divide a n*

   b. *Si p divide a n^2 entonces p divide a n* **y** *p no divide a n*

   c. *Si p divide a n^2 entonces p divide a n* **y** *p no divide a n^2*

13. ¿Que conclusiones lógicas puedes obtener? (quizás ninguna)

   a. $(P \to Q) \wedge (Q \to \neg P) \Rightarrow$

   b. $(P \to Q) \wedge (R \to \neg Q) \Rightarrow$

   c. $(P \to R) \wedge (\neg S \to \neg R) \Rightarrow$

14. Argumentos lógicos o falacias?

   a. $(P \to Q) \wedge (Q \to P) \Rightarrow P$

   b. $(P \to Q) \wedge (P \to \neg Q) \Rightarrow \neg P$

   c. $(P \to Q) \wedge (\neg P \to Q) \Rightarrow Q$

Hay argumentos lógicos que se obtienen combinando de maneras mas sutiles las proposiciones con cuantificadores.

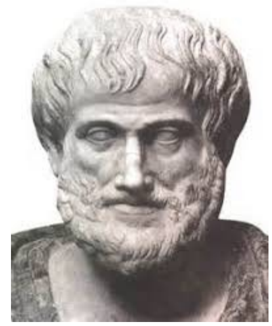
Ejemplos:

a. *Todos los pericos son aves* y *Todas las aves vuelan* $\Rightarrow$ *Todos los pericos vuelan*

b. *Ninguna iguana vuela* y *Todas las aves vuelan* $\Rightarrow$ *Ninguna iguana es ave*

c. *Algunos pájaros son aves* y *Todas las aves vuelan* $\Rightarrow$ *Algunos pájaros vuelan*

Los argumentos de este tipo son muy generales y muy útiles, fueron estudiados por primera vez por Aristoteles en el siglo 4AC. Hay que tener cuidado porque hay muchas combinaciones posibles, algunos son argumentos validos y son llamados **silogismos** y otros son inválidos y son llamados falacias.



Recordar que para que un argumento sea válido *no basta* que la conclusión sea verdadera.

Ejemplos de falacias:

d. *Todos los pericos son aves* y *Algunas aves vuelan* $\not\Rightarrow$ *Algunos pericos vuelan*

Es verdad que algunos pericos vuelan, pero eso no es una consecuencia lógica de lo anterior. Para verlo basta cambiar *pericos* por *pingüinos*.

e. *Ninguna iguana es ave* y *Todas las aves vuelan* $\not\Rightarrow$ *Ninguna iguana vuela*

Se puede ver que el argumento es inválido cambiando *iguana* por *murciélago*.

f. *Ningún insecto es un ave* y *Ningún ave es un reptil* $\not\Rightarrow$ *Ningún insecto es un reptil*

El argumento es inválido, al cambiar *insecto* por *cocodrilo* llleva de algo cierto a algo falso.

g. *Algunos perros son cazadores* y *Algunos cazadores son bravos* $\not\Rightarrow$ *Algunos perros son bravos*

El argumento es inválido, basta cambiar bravos por reptiles.

Lo importante de estos argumentos *no es lo que dicen* en particular, sino *su estructura*, la manera en que están conectadas las distintas partes. Su validez o invalidez se puede aclarar si los vemos de manera mas abstracta, sin referencia a cosas que ya conocemos, o si pensamos en conjuntos.

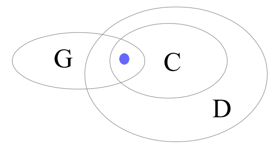
El lenguaje formal ayuda a aclarar la estructura de las afirmaciones y los argumentos lógicos.

Ejemplo. La afirmación:

Todos los cazadores tienen dientes y algunos gatos son cazadores

puede escribirse como

Todos los C son D y algunos G son C



de aquí podemos concluir que

algunos G son D

que en el ejemplo significa

Algunos gatos tienen dientes

Otro ejemplo.

Platón era un gran filósofo

Todos los griegos eran grandes filósofos

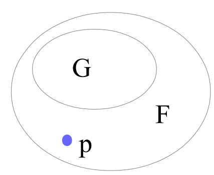
Por lo tanto Platón era griego

Si lo reescribimos como

p es F

Todos los G son F

Por lo tanto p es G

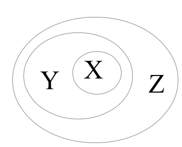


vemos que el argumento es invalido: p puede ser F y sin ser G.

Platon sí era griego, pero eso no hace que el argumento sea valido

Para ver si un argumento es lógico hay que ver que la conclusión se cumple *en todos los casos*, para ver que es una falacia basta ver que *hay algún caso* en que no se cumple:

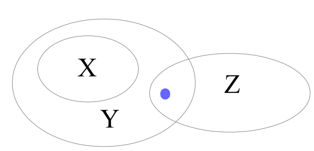
Todo X es Y y *Todo Y es Z* $\Rightarrow$ *Todo X es Z*



Las contenciones de X en Y y de Y en Z implican la contención de X en Z

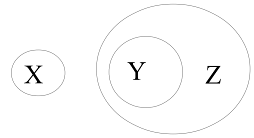
El ejemplo a. es de este tipo.

Todo X es Y y *Algún Y es Z* $\Rightarrow$ *Algún X es Z*



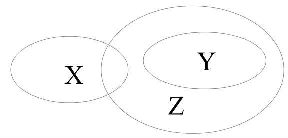
En el diagrama las condiciones se cumplen, pero la conclusión no se cumple. el ejemplo d. es de este tipo

Ningún X es Z y *Todo Y es Z* ⇒ *Ningún X es Y*



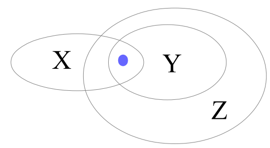
El ejemplo b. es de este tipo

Ningún X es Y y *Todo Y es Z* ⇒ *Ningún X es Z*



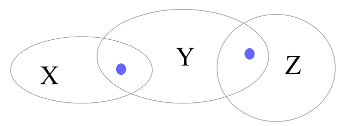
El diagrama muestra que las condiciones pueden cumplirse sin que se cumple la conclusión. El ejemplo e. es de este tipo

Algún X es Y y *Todo Y es Z* ⇒ *Algún X es Z*



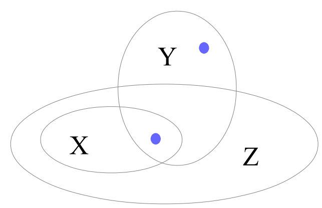
El ejemplo c. es de este tipo.

Algún X es Y y *Algún Y es Z* ⇒ *Algún X es Z*



En el diagrama las condiciones se cumplen sin que se cumple la conclusión. El ejemplo g. es de este tipo.

Algún X es Y y *Algún Y no es Z* ⇒ *Algún X no es Z*



En el diagrama las condiciones se cumplen y no se cumple la conclusión.

Memorizar los distintos silogismos y falacias es una perdida de tiempo, son muchos y es fácil confundirse, el chiste es entender por que unos argumentos son válidos y otros no.

Pregunta. ¿Los siguientes argumentos serán válidos o no?

a. *Todos los matemáticos son científicos*
Algunos científicos están locos
así que algunos matemáticos están locos (Inválido)

b. *Todos los marcianos son verdes*
Ningún ser sin antenas es verde
Por lo tanto todos marcianos tienen antenas (Válido)

Ejercicios.

Para que estos ejercicios les sea mas útiles traten de hacerlos en su cabeza, y luego chequen su respuesta haciendo diagramas.

15. ¿Argumentos lógicos o falacias?

    a. Todos los pájaros son aves y algunas aves vuelan -> *algunos pájaros vuelan*

    b. *Todos los pájaros vuelan* y *algunas aves no vuelan* -> *algunas aves no son pájaros*

    c. Algunos pájaros vuelan y algunas aves vuelan -> *algunas aves son pájaros*

    d. Algunas pájaros vuelan y algunos reptiles no vuelan -> *algunos pájaros no son reptiles*

.   *e. Algunos pájaros vuelan y ningún reptil vuela -> algunos pájaros no son reptiles*

    e. Todos los pájaros vuelan y ningún reptil vuela -> ningún reptil es pájaro

    f. No todos los pájaros vuelan y ningún reptil vuela -> No todos los pájaros son reptiles

16. ¿Que conclusiones lógicas puedes obtener? Si no es posible obtener nada dilo

    a. Si *Algún X es Y* y *Ningún Y es Z*

    b. Si *Ningún X es Y* y *Algún Y es Z*

    c. Si *Algún X es Y* y *Algún Y no es Z*

17. ¿Que conclusiones lógicas puedes obtener? Si no se puede obtener nada dilo

    a. *Ningún reptil tiene pelo* y *Todas las serpientes son reptiles*

    b. *Los caballos tienen herraduras* y *Ningún humano tiene herraduras*

    c. *Ningún esquimal es europeo* y *Ningún europeo es marciano*

    d. *Algunos cuadriláteros son rectángulos* y *Los rectángulos son paralelogramos*

    e. *Algunas figuras son polígonos* y *Ningún circulo es un polígono*

    f. *Algunos cuadrúpedos son mamíferos* y *Algunos mamíferos nadan*

    g. *La suma de dos números impares es un número par* y *3 es un número impar*

    h. *La suma de dos números impares es un número par* y *6 es un número par*

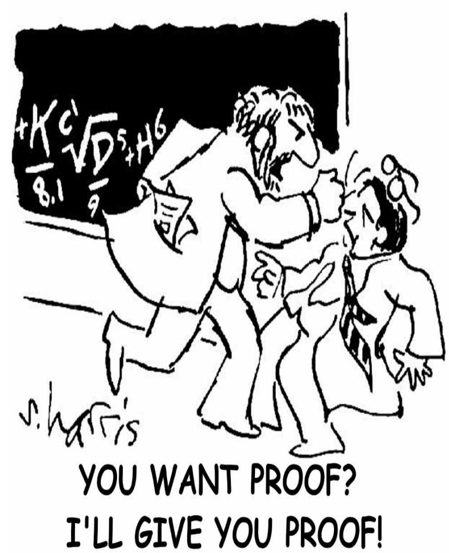
Demostraciones.

Una **demostración** (o **prueba**) es un argumento *irrefutable* de que algo es cierto o falso.

Para ser irrefutable debe empezar por ser *convincente*, y para ser convincente tiene que ser *entendible*. No podemos demostrar nada si no lo entendemos.

Las demostraciones matemáticas son argumentos lógicos en los que cada paso esta plenamente justificado y es una consecuencia lógica de los anteriores. Para demostrar algo debemos partir de otras cosas que suponemos ciertas (las **hipótesis**) y de ahí debemos llegar a lo que queremos demostrar (la **conclusión**) usando argumentos lógicos.

En matemáticas todo se demuestra.



Hacer demostraciones no es fácil, hay que empezar por *entender* lo que dicen las hipótesis y la conclusión, y luego hay que hallar *alguna manera* de ver que las primeras implican la última.

No podemos camino sin saber donde estamos y a donde queremos llegar.Una vez que lo sabemos viene la parte mas difícil, que es buscar el camino que nos lleve ahí. Para esto no hay recetas, hay que usar la intuición y buscar distintas alternativas, haciendo ejemplos e intentando casos particulares para entender mejor el problema. Una vez que creemos haber hallado un camino hay que asegurarse que sea transitable (que todos los pasos son lógicamente correctos).

Hay distintos métodos de demostración que se usan en diferentes situaciones, no podemos saber de antemano cual funcionará, pero la práctica ayuda a mejorar nuestra intuición.

Hay métodos de demostración **directos** (**por pasos**) e **indirectos** (por **contraposición** o por **contradicción**) y a veces se usan variantes o combinaciones de ellos.

Demostraciones directas:

Como $(P \to R) \wedge (R \to \Delta) \Rightarrow (P \to S)$ entonces podemos demostrar $P \to S$ mostrando que

$P \to R$ y que $R \to Q$ donde R es cualquier otra proposición.

Mas generalmente, para demostrar que si pasa A entonces pasa Z, podemos hacerlo *por pasos* buscando una serie de proposiciones, C, D, E, ... tales que podamos demostrar que si pasa A entonces pasa B, si pasa B entonces pasa C, si pasa C entonces pasa D.... hasta terminar en Z.

El chiste esta en encontrar los pasos!

Ejemplos de demostraciones directas:

Demostrar que si algunos A son B y ningún B es C entonces algunos A no son C.

Hipótesis 1: Existe x tal que x es A y x es B
Hipótesis 2: Si y es B entonces y no es C
Por Demostrar: Existe z tal que z es A y z no es C

Demostración (*directa*):
Por la hipótesis 1 existe x tal que x es A y x es B
Como x es B entonces por la hipótesis 2 x no es C
Así que x es A y x no es C, *que es lo que se quería demostrar*. □

Demostrar que el cuadrado de un entero par es par.

Hipótesis: n es un entero par
Por Demostrar: n^2 es par

Demostración (*directa*):
Que un número entero sea par significa que es el doble de otro número entero.
Por la hipótesis n es par así que $n=2m$ para algún entero m
Entonces $n^2 = (2m)^2 = 4m^2$
Por lo tanto $n^2 = 2(2m^2)$ lo que significa que n^2 es par
que es lo que se quería demostrar. □

Demostraciones por contraposición.

Como $P \rightarrow Q$ es equivalente a $\neg Q \rightarrow \neg P$, podemos demostrar $P \rightarrow Q$ demostrando la *contraposición* $\neg Q \rightarrow \neg P$.

Así que para demostrar que si pasa A entonces pasa B, podemos **suponer** que B no pasa y mostrar que entonces tampoco pasa A.

Ejemplos de demostraciones por contraposición:

Demostrar que si los marcianos no existen, entonces todos los marcianos son azules.

Hipótesis: *Los marcianos no existen*

Por Demostrar: *todos los marcianos son azules*

Demostración (por *contraposición*):

Supongamos que la conclusión no es cierta. Entonces existe algún marciano que no es azul. Por lo tanto existe un marciano, lo que niega la hipótesis.

Demostrar que si algunos A no son B y todos los C son B entonces algunos A no son C.

Hipótesis 1: Existe x tal que x es A y x no es B

Hipótesis 2: Si y es C entonces y es B

Por Demostrar: Existe z tal que x es A y z no es C

Demostración (por *contraposición*):

Supongamos que *no* existe z tal que z es A y z no es C

Esto significa que si z es A entonces z es C

Así que si z es A entonces (por hip 2) z es B

Por lo tanto no existe z tal que z es A y z no es B *lo que niega la hipótesis 1.* □

Demostrar que si el cuadrado de un número entero es par, entonces el número es par.

Hipótesis: n es un numero entero y n^2 es par

Por Demostrar: n es par

Demostración (por *contraposición*):

Supongamos que la conclusión es falsa, es decir que n es impar

Esto quiere decir que n=2m+1 para algún entero m.

Por lo tanto $n^2 = (2m+1)^2 = (2m)^2 + 2(2m\cdot 1) + 1^2 = 4m^2+4m+1 = 2(2m^2+2m)+1$.

Y esto dice que n^2 es impar lo que niega la hipótesis. □

Demostraciones por contradicción (*reductio ad absurdum*)

Para demostrar que $P \rightarrow Q$ podemos *suponer* que $P \rightarrow Q$ es falsa, es decir que su negación $P \wedge \neg Q$ es verdadera, y tratar de llegar a algo falso (una contradicción).
Este método puede sonar raro, pero es una de las herramientas mas poderosas en matemáticas.

Ejemplos de demostraciones por contradicción:

Demostrar que si todos los A son B y ningún B es C entonces ningún A es C.

Hipótesis 1: Si x es A entonces x es B

Hipótesis 2: Si y es B entonces y no es C

Por Demostrar: Si z es A entonces z no es C

Demostración (*por contradicción*):

Supongamos que las hipótesis son ciertas pero la conclusión no es cierta, es decir que

Existe un z tal que z es A y z es C

Como z es A entonces por la hipótesis 1, z es B.

Como z es C entonces por la hipótesis 2, z es B.

Por lo tanto z es B y z no es B lo que es una contradicción. □

La siguiente prueba de la existencia de números irracionales fue hallada por los griegos.

Demostrar que $\sqrt{2}$ no es el cociente de 2 números enteros.

La afirmación equivale a decir *si m y n son dos números enteros entonces $m/n \neq \sqrt{2}$.*

Hipótesis: *m y n son dos números naturales*

Por Demostrar: $m/n \neq \sqrt{2}$

Demostración (por contradicción)

Supongamos que existen dos números naturales m y n tales que $m/n = \sqrt{2}$

Podemos suponer que m y n no son ambos pares, o podríamos simplificar la fracción m/n.

Si $m/n = \sqrt{2}$ entonces $m^2/n^2 = 2$ así que $m^2 = 2n^2$

Como $m^2 = 2n^2$ entonces m^2 es par, así que por una demostración anterior m debe ser par, es decir $m=2m'$ para algún número natural m´

Así que $(2m')^2 = 2n^2$ por lo tanto $4m'^2 = 2n^2$ o sea $2m'^2 = n^2$

por lo tanto n^2 es par, así que por la misma demostración anterior n debe ser par·

Por lo tanto m y n son ambos pares lo que contradice nuestra suposición. □

Ejercicios.

18. Demuestra que el producto de dos números impares es impar.

19. Demuestra que *si todos los A son B y ningún C es B entonces ningún C es A*.

20. Demuestra que *si todos los marcianos son verdes y ningún ser sin antenas es verde, entonces todos marcianos tienen antenas.*

Ejercicios de repaso.

21. Identifica cada proposición de la izquierda con una afirmación equivalente en la derecha:

a. $P \rightarrow Q$	a'. $P \vee Q$
b. $P \rightarrow \neg Q$	b' $\neg P \vee \neg Q$
c. $Q \rightarrow P$	c'. $\neg P \vee Q$
d. $\neg Q \rightarrow \neg P$	d'. $P \wedge \neg Q$
d. $\neg(P \rightarrow Q)$	e'. $\neg(\neg P \wedge Q)$

22. Escribe las negaciones de las siguientes proposiciones:

a. *Algunas veces llueve*
b. *Todo es verdad y nada es mentira*
c. *Algunos perros no nadan y ningún gato vuela*
d. *Ningún bicho de 4 o 8 patas es un insecto*
e. *Si un bicho tiene 4 o 8 patas entonces no es un insecto*
f. *Si un bicho es un insecto entonces no tiene 4 o 8 patas*
g. *Los polinomios de grado impar tienen al menos una raiz*
h. *Algunos números reales no tienen raíz cuadrada*
i. *Si una función es suave entonces es continua*
j. *Algunas afirmaciones son mentira y algunas no son mentira*
k. *Para todo* $n \in N$ *, existe* $m \in N$ *tal que* $m > n$
l. *Para todos* $x>0$ *y* $y>0$ *se cumple que* $\sqrt{x+y} < \sqrt{x}+\sqrt{y}$

23. Que conclusiones lógicas puedes obtener?

a. *Algunos orgs son midrs* y *todos los midrs son uchs.*
b. *Todos los orgs son midrs* y *algunos mirds no son exts.*
c. *Algunos perros no ladran* y *no todo lo que ladra muerde.*
d. *Algunas raíces son irracionales* y *algunos irracionales son trascendentes.*
e. *Los racionales son algebraicos* y *los trascendentes no son algebraicos.*
f. *Toda función derivable es continua* y *existen funciones que no son continuas.*

g. *Toda función derivable es continua* y *existen funciones que no son derivables.*

h. $\forall x>0, \exists z>0$ tal que $z^2=x$ y $w>0$.

24. Muestra que los conectores lógicos $\neg$ $\wedge$ $\vee$ pueden combinarse para obtener *cualquier* tabla de verdad (una que tenga la combinación de V's y F's que uno elija)

25. Demuestra que *si el cuadrado de un numero entero es divisible entre 3 entonces el número es divisible entre 3.*

26. Demuestra que *si la suma de dos números es impar, entonces alguno es impar*.

27. Demuestra que *√3 no es racional* (que *no existen enteros m y n tales que m / n = √3)*

28. Demuestra o da un *contraejemplo* (un ejemplo que muestre que la conclusión no es valida)

a. Si todo P es Q, algún R es S y ningún S es Q entonces algún R no es P.

b. Si algún P no es Q, algún R es S y todo S es Q entonces algún P no es R.