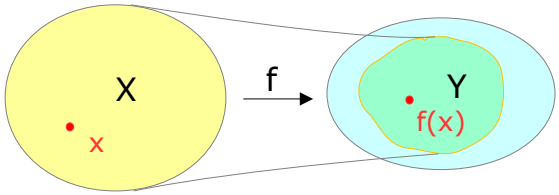
Funciones

Una **función** de un conjunto X a un conjunto Y es una relación f de X a Y donde cada elemento de X está relacionado con uno y solo uno de Y.

Si la función relaciona a x con y escribimos f(x)=y y decimos que y es la **imagen** de x bajo f.



Para decir que f es una función de X a Y escribimos **f : X → Y** , decimos que X es el **dominio** de f y que Y es el **codominio** o **contradominio** de f.

La **imagen** de f es el subconjunto de Y formado por las imágenes de elementos de X.

Ejemplos.

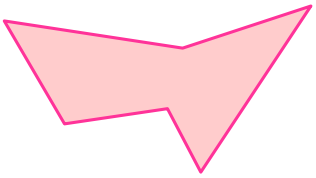
- Si H es el conjunto de seres humanos
  - f(x) = *la mama de x* es una función de H a H (cada ser humano tiene una mama y solo una). La imagen de f es el conjunto de mamás.
  - g(x) = *la abuela de x* no es una función de H a H porque g no esta bien definida (todos tienen abuelas, pero no solo una. Para obtener una función hay que especificar cual).
  - h(x) = *el hijo de x* no da una función de H a H porque no h esta bien definida (hay personas sin hijos y otras con varios hijos).
  - g(x) = *el hijo mayor de x* no define una función de H a H pero si define una función g : P → H, donde P es el conjunto de progenitores. La imagen de g es el conjunto de primogénitos.

- H es el conjunto de seres humanos y P es el conjunto de países.
  - n(h) = *el país donde nació x* define una función n: H → P. La imagen de n es todo P.
  - v(p) = la persona mas vieja en *p* define una función v: P → H.

- Funciones del conjunto de seres humanos a **Z**
  - e(x) = *el año en que nació* x
  - h(x) = *el número de hijos de* x

- Funciones del conjunto de seres humanos a **R**.
  - e(x) = *la estatura de* x (*hay que especificar si en metros o centímetros o en que...)*
  - p(x) = *el peso de* x (*en kilos o en libras dan distintas funciones)*

- Funciones del conjunto de polígonos en el plano a **R**
  - p(x) = *el perímetro de* x.
  - a(x) = *el área encerrada por* x.



- Funciones reales (funciones de **R** a **R**)
  - $f(x) = x^2$ define una función f: **R**→ **R** cuya imagen es $\mathbf{R}^+$ ya que el cuadrado de cada numero real es un numero real no negativo.
  - $g(x) = \sqrt{x}$ no define una función de **R** en **R** porque los reales negativos no tienen raíz real, pero si define una función g: $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ ya que cada real no negativo tiene una raíz no negativa.
  - $h(x) = \sqrt[3]{x}$ da una función h: **R** → **R** porque cada real tiene exactamente una raíz cubica real.
  - $s(x) = {}^1/_x$ no da una función de **R** en **R** porque no esta definida en x=0, pero sí define una función s: **R-**{0} → **R**.

- Funciones de **R** a **Z**.
  - e(x)=⌊x⌋ llamada la *parte entera* de x, es el mayor entero que es menor o igual a x.
  - $s(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ es la función que da el signo de x.
  - $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x es racional} \\ 0 & \text{si x es irracional} \end{cases}$ es una función que indica si x es racional o no.

- Funciones de **Q** a **N**.
  - d(m/n) = n no da una función de **Q** a **N** porque cada racional esta representado por distintas fracciones.
  - d(m/n) = n donde m/n es reducida y n es positivo si da una función de **Q** a **N** porque cada racional está representado por una sola fracción así.

Diremos que dos funciones son **iguales** si tienen el mismo dominio, el mismo codominio y la misma regla de correspondencia.

Ejemplos.

- Si **R** es el conjunto de números reales y f, g: **R** -> **R** son las funciones

  $f(x) = \cos(2x) \qquad g(x) = \cos^2(x)-\text{sen}^2(x)$

  entonces f = g ya que $\text{sen}(2x) = \cos^2(x)-\text{sen}^2(x)$ para todos los valores reales de x.

- Si P es el conjunto de polígonos y s, l: P -> **R** son las funciones

  s(p) = *suma de los ángulos internos de p* y l(p) = π (*numero de lados de p)*

  entonces a(p) = l(p).

La **gráfica** de una función $f : X \to Y$ es el conjunto de parejas (x,y) en XxY tales que y=f(x).

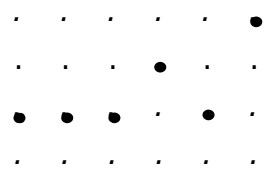
Ejemplos.

- Para la función p: Humanos → Humanos dada por p(h) = *el papa de h*
  la gráfica de h es el conjunto de parejas (hijo, padre)

- Si A={1,2,3,4,5,6} y B={0,1,2,3} y f : A → B esta dada por

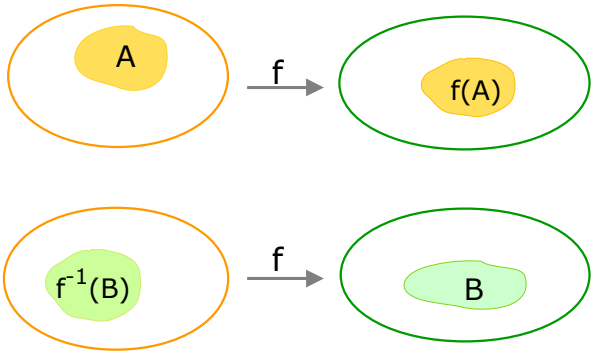
$$f(n)=\begin{cases} n/2 & \textit{si n es par} \\ 1 & \textit{si n es impar} \end{cases}$$

entonces la gráfica de f se ve así:



Si $f : X \to Y$ es una función, la **imagen** de un subconjunto A de X es el conjunto de elementos de Y que vienen de elementos de A, es decir $f(A)=\{ f(x)\in Y / x\in A \}$.

La **preimagen** (o **imagen inversa**) de un subconjunto B de Y es el conjunto de elementos de X que van a dar a B, es decir, $f^{-1}(B)=\{ x\in X / f(x) \in B \}$.

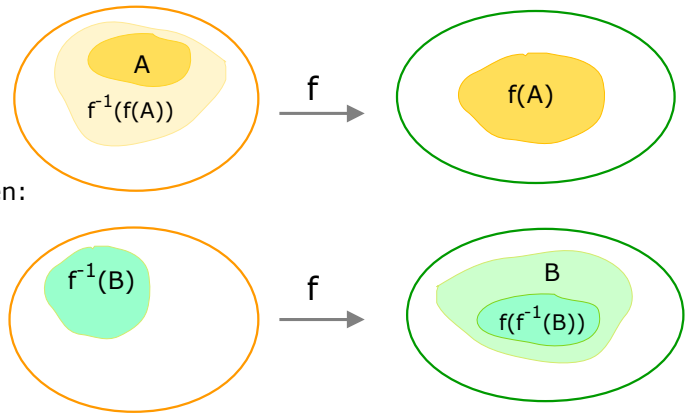


Ejemplo. Si f: **R** → **R** está dada por $f(x)=x^2$ entonces

- La imagen del intervalo [-1,3] es el intervalo [0,9], es decir f[-2,3]=[0,9].
- La imagen inversa del intervalo [-1,4] es el intervalo [-2,2], es decir, $f^{-1}[-1,4]=[-2,2]$
- La imagen inversa del intervalo [-3,-1] es el vacío, $f^{-1}[-3,-1]=\varnothing$
- $f^{-1}(f[-2,3]) = f^{-1}[0,9] = [-3,3]$.
- $f(f^{-1}[-1,4]) = f[-2,2] = [0,4]$.

Lema. Si $f : X \to Y$ es una función entonces

1. $A \subset X \Rightarrow A \subset f^{-1}(f(A))$
2. $B \subset Y \Rightarrow f(f^{-1}(B)) \subset B$



Demostración. Por las definiciones de imagen y preimagen:

Si $x \in A \to f(x) \in f(A) \to x \in f^{-1}(f(A))$

Si $y \in f(f^{-1}(B)) \to \exists x \in f^{-1}(B) / y=f(x)$
y como $x \in f^{-1}(B) \to f(x) \in B$ así que $y= f(x) \in B$

Ejercicios.

1. Si E=es el conjunto de especies animales, da ejemplos de funciones de E a $\mathbf{Z}^+$ y de E a $\mathbf{R}^+$.

2. Si S es el conjunto de planetas del sistema solar

   a. Da dos funciones de S a $\mathbf{Z}^+$ b. Da tres funciones de S a $\mathbf{R}^+$.

3. Si Si P es el conjunto de polígonos en el plano

   a. Define dos funciones de P a **N** b. Define tres funciones de P a **R**.

   c. ¿puedes dar una función de **N** a P? d. ¿y una función de $\mathbf{R}^+$ a P?

4. ¿Cuales de las siguientes relaciones definen funciones de **R** en **R**? (cuidado con el orden)

   a. $\{(x,y) / x=-y\}$ b. $\{(x,y) / x=y^2\}$ c. $\{(x,y) / x=y^3\}$ d. $\{(x,y) / x^2-y^2=1\}$

5. Las siguientes reglas de correspondencia no definen funciones de **R** en **R**
   ¿Cuales son los subconjuntos mas grandes de **R** donde sí definen funciones?

   a. $f(x) = {}^1/_x$ b. $g(x)= \sqrt{x+1}$ c. $h(x) = \sqrt{x^2-4}$ d. $k(x) = {}^1/_{x^2+x}$

6. Dibuja las gráficas de las siguientes funciones para valores de n entre 1 y 15:

   a. $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ dada por $f(n)=\lfloor {}^2/_3\ n \rfloor$ = *la parte entera de* ${}^2/_3\ n$.

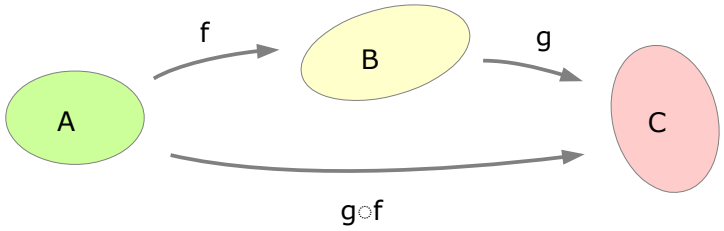
   b. $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ dada por f(n) = el número mas pequeño que no divide a n.

7. Sean H el conjunto de seres humanos, P el de papas y M el de mamas.
   Si $f: H \to H$ es la función f(h)= el papa de h , calcula:

   a. f(P) b. f(M) c. $f^{-1}(P)$ d. $f^{-1}(M)$

Composiciones de funciones.

Si $f : A \to B$ y $g: B \to C$ son dos funciones, la **composición** de f y g es la función $g\circ f : A \to C$ que se obtiene al aplicar primero f y luego g, es decir, $g\circ f\ (a) = g(f(a))$.



es decir, *f compuesta con g de x es g de f de x.* Observar que la composición de f con g se escribe *al revés que como se lee* ya que al aplicar $g\circ f$ primero se aplica f y luego g.

Ejemplos.

- Sea H={seres humanos}. Si f y g son las funciones de H en H dadas por
  f(x) = *el papa de x* y g(x) = *la mama de x* entonces
  - g○f(x) = g(f(x)) = *la mamá del papá de x = la abuela paterna de x.*
  - f○g(x) = f(g(x)) = *el papá de la mamá de x* = el *abuelo materno de x.*
  - f○f(x) = f(f(x)) = *el papá del papá de x = el abuelo paterno de x.*
  - g○g(x) = g(g(x)) = *la mamá de la mamá de x = la abuela materna de x.*

- Si f y g son las funciones de **R** en **R** dadas por f(x)=3x+1 y $g(x)=x^2$ entonces
  - g○f(x) = g(f(x)) = g(3x+1)=$(3x+1)^2$ = $9x^2+6x+1$
  - f○g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = $3x^2+1$
  - f○f(x) = f(f(x)) = f(3x+1) = 3(3x+1)+1 = 9x+4
  - g○g(x) = g(g(x)) = g(x^2) = $(x^2)^2$ = x^4

Lema. Si $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ son funciones entonces (h○g)○f = h○(g○f) así que la composición de funciones es *asociativa*.

Demostración. Las dos composiciones tienen el mismo dominio y codominio, y para cada x en X,

(h○g)○f(x) = h○g(f(x)) = h(g(f(x))) y h○(g○f)(x) = h(g○f(x)) = h(g(f(x)))

así que las dos tienen la misma regla de correspondencia. □

Problemas.

8. Calcula todas las composiciones entre dos funciones de la siguiente lista (son 6):
   f(x)= 3x+1 g(x) = -x+2 h(x) = x^2 k(x) = 1/x
   (Algunas de estas funciones y sus composiciones no están definidas en todo **R**, lo que importa aquí es hallar la regla de correspondencia cuando si están definidas)

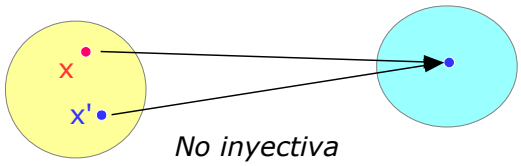
9. Para las funciones anteriores calcula
   a. k○g○h b. k○h○g c. h○g○k

10. Encuentra dos funciones f,g: **R** → **R** (distintas y distintas de la identidad) tales que f○g = g○f

Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas

Una función $f : X \to Y$ es **inyectiva** o **uno a uno** si cada par de elementos distintos de A tienen imágenes distintas en B.

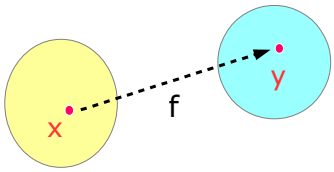
$$f \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow \forall x,x' \in A,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x') \Leftrightarrow \forall x,x' \in A,\ f(x)=f(x') \Rightarrow x=x'$$



No inyectiva

Una función $f : X \to Y$ es **suprayectiva** o **sobre**, si todos los elementos de B son imágenes de elementos de A.

$$f \text{ es suprayectiva} \Leftrightarrow \forall y \in B,\ \exists x \in A \text{ tal que } f(x)=y.$$



Una función $f : X \to Y$ es **biyectiva** si es inyectiva y suprayectiva.

Ejemplos.

- Si H es el conjunto de sseres humanos, la función p: H → H definida por p(x)=*el papa de x* no es inyectiva (ya que hay distintas personas con el mismo papa) ni es suprayectiva (ya que hay personas que no son papas de nadie).
- f : **R** → **R** dada por $f(x) = 2x$ es inyectiva (ya que si 2x=2x' entonces x=x') y es suprayectiva (ya que f(x/2)=2(x/2)=x).
- f : **Z** → **Z** dada por $f(n) = 2n$ es inyectiva (por la misma razón que el ejemplo anterior) pero no es suprayectiva (ya que los impares no son el doble de ningún entero).
- g : **Z** → **Z** dada por $g(n) = \lfloor n/2 \rfloor$ es suprayectiva (ya que $g(2n) = \lfloor 2n/2 \rfloor = n$) pero no es inyectiva (ya que $g(2)=\lfloor 2/2 \rfloor=1$ y también $g(3)=\lfloor 3/2 \rfloor=1$).

Si X es un conjunto, la **función identidad** en X es la función Id_X: X → X tal que $Id_X(x)=x$.

Es la mas simple de las funciones biyectivas de un conjunto a si mismo

Recordar que si $f : X \to Y$ es una función, $A \subset X$ y $B \subset Y$ entonces $A \subset f^{-1}(f(A))$ y $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

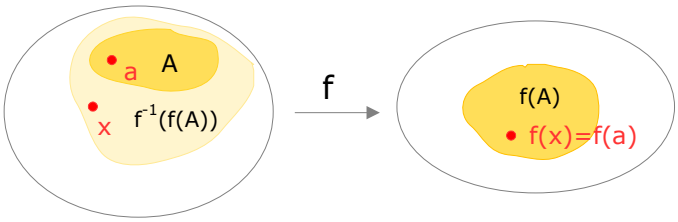
Afirmación. Una función $f : X \to Y$ es

- inyectiva si y solo si para todo $A \subset X$, $f^{-1}(f(A)) \subset A$
- suprayectiva si y solo si para todo $B \subset Y$, $B \subset f(f^{-1}(B))$
- biyectiva si y solo si para todo $A \subset X$, $f(X-A) = Y-f(A)$ *(es decir, si la imagen del complemento es el complemento de la imagen)*

Demostración. Por contraposición. Supongamos que las conclusiones no son ciertas.

▪

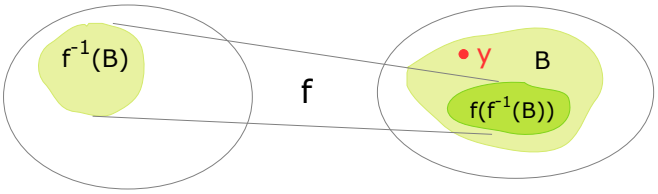
$\Rightarrow$ Y si $f^{-1}(f(A)) \not\subset A$ entonces existe un x tal que $x \in f^{-1}(f(A))$ y $x \notin A$. Como $f(x) \in f(A)$, existe $a \in A$ tal que $f(x)=f(a)$, pero $x \neq a$ ya que $x \notin A$, por lo tanto f no es inyectiva.



$\Leftarrow$ Si f no es inyectiva entonces existen $x \neq x'$, tales que $f(x)=f(x')$. Si $A=\{x\}$, entonces $x' \notin A$ y $x' \in f^{-1}(f(A))$ por lo tanto $f^{-1}(f(A)) \not\subset A$.

▪▪

$\Rightarrow$ Si $B \not\subset f(f^{-1}(B))$ entonces existe y tal que $y \in B$ y $y \notin f(f^{-1}(B))$. Como todos los elementos de X que van a B están en $f^{-1}(B)$ pero y no está en $f(f^{-1}(B))$, y no esta en la imagen de f. Así que f no es sobre.



$\Leftarrow$ Si f no es suprayectiva entonces existe $y \in Y$, tal que $y \notin f(X) = f(f^{-1}(Y))$, así que $Y \not\subset f(f^{-1}(Y))$.

▪▪▪

$\Leftarrow$ Si f no es sobre entonces $f(X) \neq Y$ por lo tanto $f(X-\varnothing) = f(X) \neq Y = Y-\varnothing = Y-f(\varnothing)$

Y si f no es inyectiva entonces existen $x \neq x'$ en X, tales que $f(x)=f(x')$. Por lo tanto $x' \notin \{x\}$ pero $f(x') \in f(x)$ así que el complemento de $\{x\}$ no va a dar al complemento de $f\{x\}$.

$\Rightarrow$ Si $f(X-A) \not\subset Y-f(A)$ entonces existe x tal que $x \in X-A$ y $x \in f(A)$. Así que $f(x)=f(a)$ para algún $a \neq x$, lo que dice que f no es inyectiva.

Y si $Y-f(A) \not\subset f(X-A)$ entonces existe $y \in Y$ tal que $y \in Y-f(A)$ pero $y \notin f(X-A)$. Así que $y \notin f(A)$ y $y \notin f(X-A)$ □

Lema. Sean f: X → Y y g: Y→ Z son funciones.

a. f y g inyectivas ⇒ g∘f es inyectiva

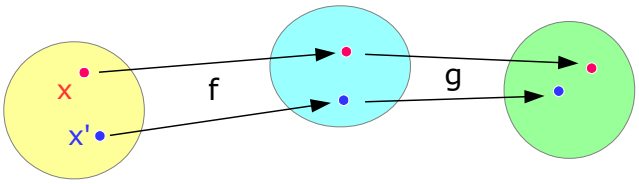
b. f y g suprayectivas ⇒ g∘f es suprayectiva

c. g∘f inyectiva ⇒ f es inyectiva

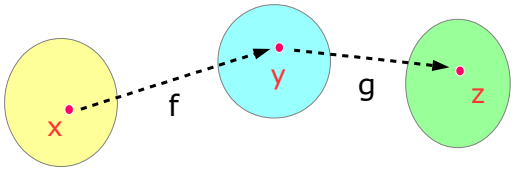
d. g∘f suprayectiva ⇒ g es suprayectiva

Demostración.

a. Para mostrar que g∘f es inyectiva hay que ver que si x≠x' entonces g∘f(x)≠g∘f(x'). Como f es inyectiva, x≠x' ⇒ f(x)≠f(x'). Y como g es inyectiva, f(x)≠f(x') ⇒ g(f(x))≠g(f(x')), así que g∘f(x)≠g∘f(x').



b. Supongamos ahora que f y g son sobre. Para ver que g∘f es sobre hay que ver que para cada z en Z, existe x en X tal que g∘f(x)=z. Como g es sobre, existe y en Y tal que g(y)=z y como g es sobre existe x en X tal que f(x)=y. Así que g(f(x))=g(y)=z.



c. y d. Ejercicios.

Problemas.

11. Si H es el conjunto de seres humanos, puedes dar ejemplos de funciones de H a H tales que...

a. f sea inyectiva y no sea la identidad?

b. g sea suprayectiva y sea la identidad?

c. h sea biyectiva y no sea la identidad?

12. Dí cuales de estas funciones de **R** de **R** son inyectivas, cuales son suprayectivas y cuales son biyectivas. Justifica (informalmente) tus respuestas

a. $f(x)=3x-5$ b. $g(x)=x^4$ c. $h(x)=x^3-x$ d. $k(x)=\sqrt[3]{x^7+1}$

13. Muestra que la función f : **N** → **Z** dada por $f(n)=(-1)^n\lfloor n/2 \rfloor$ es una función biyectiva.

14. Demuestra que existe una función inyectiva f: **Q** → **Z**.

Hint: para cada fracción reducida m/n define $f(m/n)=2^m3^n$.

15. a. Demuestra que si g∘f es inyectiva entonces f debe ser inyectiva, pero g puede no serlo.

b. Demuestra que s g∘f es sobre entonces g debe ser sobre, pero f puede no serlo.

c. Muestra que g∘f puede ser biyectiva sin que f ni g sean biyectivas.

Funciones Inversas.

Algunas funciones *deshacen* lo que hacen otras : si $f : X \to Y$ es una función, decimos que

$g : Y \to X$ es **inversa izquierda** de f si $g \circ f = Id_X$.

$h : Y \to X$ es **inversa derecha** de f si $f \circ h = Id_Y$.

Una función que es simultáneamente inversa izquierda y derecha es una **inversa** de f.

Ejemplos.

- Sea H es el conjunto de humanos y P es el conjunto de padres y sea $f: H \to P$ la función dada por f(x)=*el papa de* x. Entonces la función $g: P \to H$, g(x)=*el hijo mayor de x* es una inversa derecha de f ya que $f \circ g(x) = f(g(x)) = f($*el hijo mayor de x*$) =$ *el papa del hijo mayor de* $x = x$.

  La función g no es inversa izquierda de f, ya que

  $g \circ f(x) = g(f(x)) = g($el papa de x$) =$ *el hijo mayor del papa de* x que no tiene que ser x.

  Otra inversa derecha de f es la función h(x)=*el hijo menor de x*.

  Pero h no es inversa izquierda de f por la misma razón que g no lo era.

- f: **R** → **R** definida como f(x) = x+1 entonces la función g: **R** → **R** definida como g(x) = x-1 es una inversa izquierda y también inversa derecha de f, ya que

  $g \circ f(x) = g(x+1) = (x+1)-1 = x$ $\qquad$ $f \circ g(x) = f(x-1) = (x-1)+1 = x$

- f: **R** → $\mathbf{R^+}$ la función dada por $f(x) = x^2$. Entonces la función g: $\mathbf{R^+} \to \mathbf{R}$

  dada por $g(x) = \sqrt{x}$ es una inversa derecha de f, ya que

  $f \circ g(x) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$ para toda x en $\mathbf{R^+}$.

  Pero g no es una inversa izquierda, ya que $g \circ f(x) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$ que *no* siempre es x.

- f: **N** → **N** la función dada por f(n) = 2n y g: **N** → **N** es la función dada por

  $$g(n) = \begin{cases} n/2 \text{ si n es par} \\ n+1/2 \quad \text{si n es impar} \end{cases}$$

  entonces $g \circ f(n) = g(f(n)) = g(2n) = n$ así que g es una inversa izquierda de f.

  $$f \circ g(n) = f(g(n)) = \begin{cases} f(n/2) = 2(n/2) = n & \text{si n es par} \\ f(n+1/2) = 2(n+1/2) = n+1 & \text{si n es impar} \end{cases}$$

  así que $f \circ g \neq Id$ por lo tanto g no es una inversa derecha de f.

Lema. Si una función tiene una inversa derecha y una inversa izquierda entonces tiene inversa.

Demostración. Supongamos que $f: X \to Y$ tiene inversa derecha $g: Y \to X$ y también inversa izquierda $h: Y \to X$, es decir $f \circ g = Id_Y$ y $h \circ f = Id_X$.

Entonces $h \circ (f \circ g) = h \circ Id = h$ y $(h \circ f) \circ g = Id \circ g = g$

pero por asociatividad $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$ así que h=g y esta función es la inversa de f. □

Si una función f tiene inversa, es única, y se le denota por f^{-1}.

Teorema. Si f: X → Y es cualquier función entonces

- f tiene una inversa izquierda ⇔ f es inyectiva.
- • f tiene una inversa derecha ⇔ f es suprayectiva.
- • • f tiene inversa ⇔ f es biyectiva.

Demostración.

- ⇒ Si g es una inversa izquierda de f, entonces $g \circ f = Id_X$ que es una función inyectiva, así que por un lema anterior f debe ser inyectiva. □

  ⇐ Supongamos ahora que f es inyectiva. Para deshacer lo que hizo f basta regresar cada y=f(x) a x.

  Definir $g: Y \to X$ como $g(y) = \begin{cases} x & \text{si } y = f(x) \text{ para alguna } x \text{ en } X \\ \text{algún } x' \text{ en } X & \text{si } y \neq f(x) \text{ para toda } x \text{ en } X \end{cases}$

  g esta bien definida porque para cada y existe a lo mas un x en X tal que y=f(x).

  Entonces para cada x en X, $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x$. Así que $g \circ f = Id_X$.

- • ⇒ Si h es una inversa derecha de f, entonces $f \circ h = Id_X$ que es una función suprayectiva, así que por un lema anterior f debe ser suprayectiva).

  ⇐ Supongamos ahora que f es suprayectiva. Entonces para cada y en Y existe un x en X tal que f(x)=y.

  Definir $h: Y \to X$ haciendo h(y)= algún x tal que f(x)=y (si hay varios x para el mismo y elijamos cualquiera de ellos). Entonces para cada y en Y, $f \circ h(y)=f(x)=y$ así que $f \circ h = Id_Y$.

- • • Es consecuencia de a y b. □

Ejemplos.

- La función f: **Z** → **Z** dada por f(n)=3n es inyectiva pero no sobre, así que tiene inversa izquierda pero no derecha. Algunas inversas izquierdas son $g(n)=\lfloor n/3 \rfloor$, $h(n)=\lfloor n+1/3 \rfloor$ y $k(n)=\lfloor n+2/3 \rfloor$.
- La función f: **Z** → **Z** dada por f(m)=|m| no es inyectiva ni sobre, así que no tiene inversa derecha ni izquierda.
- La función f: **Z** → $\mathbf{Z}^+$ dada por f(m)=|m| es sobre pero no inyectiva, así que tiene inversa derecha pero no tiene inversa izquierda. Una inversa izquierda es g(m)=m y otra es h(m)=-m
- La función f: **Z** → **Z** dada por f(m)=-m+1 si es biyectiva, así que tiene inversa. La inversa es $f^{-1}(m)=-m+1$, y no hay otra.

Problemas.

16. Di cuales de las siguientes funciones de **Z** en **Z** tienen una inversa izquierda y/o derecha y encuéntralas. a. f (n)=3n+1 b. $g(n)=\lfloor n/3 \rfloor$ c. $h(n)=n^3$

17. Di si la siguiente función f: **Z** → **Z** tiene inversa, y si si, encuéntrala.

$$f(n) = \begin{cases} n-1 & \text{si } n \text{ es par} \\ n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

18. Encuentra las inversas de las siguientes funciones de **R** en **R** (en estos ejemplos es fácil hacerlo recordando únicamente que la inversa debe deshacer lo que hizo f).

a. $f(x)=3x+2$ b. $g(x)=1-x$ c. $h(x)=x^3+5$ d. $k(x)=\sqrt[3]{2x^5+1}$

19. a. Demuestra que si una función tiene inversa, entonces es única.

b. Muestra que esto no es cierto para inversas derechas o izquierdas.

Ejercicios de repaso.

20. E es el conjunto de elementos de la tabla periódica

a. Da una función de E a E.

b. Da una función de E a **N**.

c. Da una función de E a **R**.

21. Si **Q**={números racionales}

a. Da una función suprayectiva de **Q** a **Z**.

b.* ¿Puedes dar una función inyectiva de **Q** a **Z**.

c.* ¿Existirá una función biyectiva de **Q** a **Z**?

22. Demuestra que cada función se puede ver como la composición de alguna función suprayectiva con otra función inyectiva.

23. Muestra que la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ es invertible, y encuentra su inversa.

24. Si **Z**={números enteros} di si las siguientes funciones son inyectivas y/o suprayectivas

a. $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ dada por $f(n) = \lfloor {}^4/_5\, n \rfloor$ b. $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ dada por $f(n) = \lfloor {}^5/_4\, n \rfloor$

25. Demuestra que si $f : X \to Y$ es una función y A y A' son subconjuntos de X entonces

a. $f(A\cup A') = f(A) \cup f(A')$

b. $f(A\cap A') \subset f(A) \cap f(A')$

c. $X - f(A) \subset f(X-A)$

Da ejemplos que muestren que en los casos b y c no se tienen que dar las igualdades.

26. Demuestra que si $f : X \to Y$ es una función y B y B' son subconjuntos de Y entonces

a. $f^{-1}(B\cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

b. $f^{-1}(B\cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

c. $f^{-1}(Y-B) = X - f^{-1}(B)$