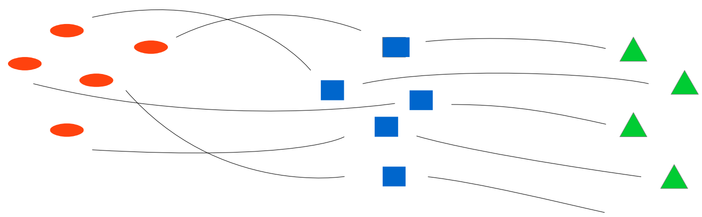
Cardinalidad.

Los números naturales son las clases de equivalencia
formadas por todos los conjuntos finitos de la misma cardinalidad.

Diremos que dos conjuntos A y B tienen la **misma cardinalidad** si podemos aparear los elementos de A con los elementos de B, es decir si existe una función biyectiva de A a B. En este caso escribimos $|A|=|B|$. Si no existe tal función escribimos $|A|\neq|B|$

.



$|A|=|B|\neq|C|$

Esta definición tiene la ventaja de que sirve aún para conjuntos infinitos.
Observar que la cardinalidad define una relación de equivalencia entre conjuntos (tarea).

Diremos que $|A|\leq|B|$ si existe una función inyectiva de A a B. Si existe una función inyectiva pero no una biyectiva diremos que $|A|<|B|$.

Lema. Si A' es un subconjunto de A entonces $|A'|\leq|A|$.

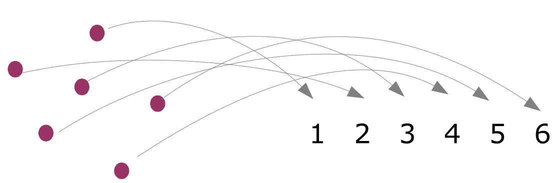
Demostración. La función inclusión I: $A' \to A$ es inyectiva. □

Lema. Si existe una función suprayectiva f: $A \to B$ entonces $|B|\leq|A|$.

Demostración. Para ver que $|B|\leq|A|$ necesitamos construir una función inyectiva g: $B \to A$.
Como f es sobre entonces para cada b en B existe al menos un elemento a de A tal que f(a)=b, entonces podemos elegir uno y definir g(b)=a.g es una función porque a cada elemento de b le asocia exactamente un elemento de A, y g es inyectiva porque si g(b)=a=g(b') entonces b=f(a)=b' □

Los números naturales como las clases formadas por los conjuntos finitos de la misma cardinalidad. Las clases de equivalencia de conjuntos mas grandes son los números transfinitos.

También podemos pensar en los números naturales como una sucesión de símbolos, de modo que hay un primer símbolo y cada símbolo tiene un sucesor. Decimos que a<b si b aparece después de a. Nosotros usamos 1,2,3,4,5,... y para contar los elementos de un conjunto A les vamos asignando números sucesivos, empezando en el 1.



Si terminamos en algún símbolo n decimos que el conjunto A es **finito.** En este caso hay una función biyectiva entre A y el conjunto $I_n = \{1,2,3,...,n\}$ y decimos que la cardinalidad es A es n. Los conjuntos infinitos son los que no tienen la cardinalidad de ningún I_n.

Lema. Si m<n entonces $|I_m| < |I_n|$

Demostración. Sabemos que $|I_m| \leq |I_n|$ porque $|I_m| \subset |I_n|$.

Falta ver que $|I_m| \neq |I_n|$. Procederemos por contradicción, suponiendo que existen m<n tales que

$|I_m| = |I_n|$. Tomemos el m mas chico para el que esto ocurra, y sea $f: I_m \to I_n$ una función biyectiva.

Si f(m)=n entonces f envía a {1,2,...n-1} a {1,2,...,m-1} y da una biyección $f: I_{m-1} \to I_{n-1}$, pero esto es imposible porque m no sería el numero mas chico para el que hay una biyección.

Si $f(m) \neq n$ entonces, como f es biyectiva, existe $p \neq m$ tal que f(p)=n y existe $q \neq n$ tal que f(m)=q.

Si $g : I_n \to I_n$ es la función que intercambia a los símbolos q y n y deja a los otros símbolos fijos, entonces g es biyectiva y por lo tanto la composición $g \circ f \ I_n \to I_n$ es biyectiva. Y como $g \circ f(m) = n$, estamos en el caso anterior, que es imposible. □

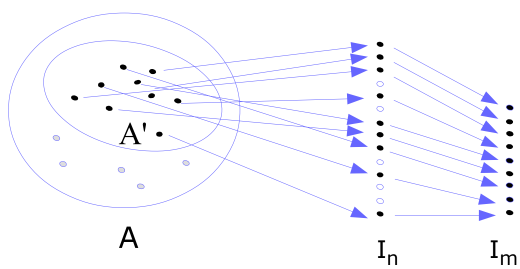
Corolario. El resultado de contar los elementos de un conjunto finito A es independiente del orden en que lo hagamos.

Demostración. Si al contar los elementos de A obtenemos dos números m y n entonces I_m y I_n tienen la misma cardinalidad y por el lema anterior m=n. □

Lema. Si A es un conjunto finito y A' es un subconjunto de A que no es A entonces |A'|<|A|.

Demostración. Tomemos una función biyecctiva $f: A \to I_n$.
Entonces $f|_{A'}: A' \to I_n$ es una función inyectiva, cuya imagen es un subconjunto propio de I_n.

Ahora podemos modificar f para obtener una función biyectiva $g: A' \to I_m$ para algún m<n, componiendo a f con una función de I_n a I_n que 'baja' loe elementos de I_n para ocupar los lugares desocupados, como en el dibujo.



Y si existiera una función biyectiva entre A' y A entonces habría una entre I_m y I_n, contradiciendo el lema anterior □

El resultado anterior no vale para para conjuntos infinitos.

Ejemplo. El conjunto de números pares {2,4,6,8,...} es un subconjunto propio del conjunto de los numeros naturales {1,2,3,4,5,6,7,8,...} pero los dos tienen la misma cardinalidad porque la función de los naturales a los pares dada por f(n)=2n es biyectiva.

Corolario. Si A y B son conjuntos *finitos* con la misma cardinalidad entonces
una función f: A → B es inyectiva ⇔ f es biyectiva ⇔ f es suprayectiva.

Demostración. Si f: A → B fuera inyectiva y no fuera suprayectiva, entonces existiría una función biyectiva de A a un subconjunto propio B' de B, así que |A|=|B'|<|B|.
Si f: A → B fuera suprayectiva y no fuera inyectiva, entonces existiría una función biyectiva g de B a un subconjunto propio A' de A. Así que |B|=|A'|<|A|. □

El corolario anterior no es cierto para conjuntos infinitos!

Ejemplos.

- La función f: **N** → **N** definida por f(n)=2n es inyectiva pero no es suprayectiva.
- La función g: **N** → **N** definida por f(n)=⌊n/2⌋ es suprayectiva pero no es inyectiva.

Problemas.

1. Muestra que *tener la misma cardinalidad* es una relación de equivalencia entre conjuntos.

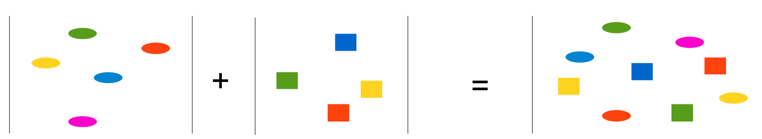
2. Si A y B son conjuntos finitos, demuestra que |A∪B|=|A|+|B|-|A∩B|.

3. Demuestra que si A y B son conjuntos finitos y existen dos funciones inyectivas f: A → B y g: B → A, entonces f y g son biyectivas.

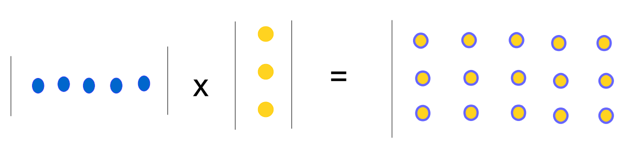
3. Si un conjunto A tiene n elementos, cuantos elementos tiene el conjunto de subconjuntos de A?

Los números naturales.

A veces consideramos a los naturales como {1,2,3,...} y otras veces como {0,1,2,3,...}
Los números naturales se pueden sumar y multiplicar, y estas operaciones están relacionadas con la cardinalidad de los conjuntos.
La suma da la cardinalidad de la unión de dos conjuntos *ajenos*



La multiplicación da la cardinalidad del *producto* de dos conjuntos.



Es posible representar a los números naturales usando al conjunto vacío, de manera recursiva (cada numero se define a partir de los anteriores) por ejemplo así:

0 = ∅
1 = {∅}
2 = {{∅}}
3 = {({∅}})
...
n = {...({∅}}...)

Esta representación es muy simple, pero no es muy útil. Otra forma es esta:

0 = ∅

1 = {0} = {∅}

2 = {0,1} = {∅, {∅}}

3 = {0,1,2} = {∅, {∅}, {∅,{∅}}

4 = {0,1,2,3} = {∅, {∅}, {∅,{∅}}, {∅,{∅},{∅,{∅}}}}

...

n+1 = {0,1,2,...,n}

Esta tiene la ventaja de que el conjunto definido como n tiene n elementos, así que podemos decir que un conjunto A tiene cardinalidad n si existe una biyección de A al conjunto n.

Observar que con los números definidos de esta manera podemos decir que $m<n \Leftrightarrow m \in n$.

Problemas.

4. Si 0 = ∅ y se define n+1= nU{n} se obtiene una representación de los naturales.

5. ¿Se te ocurren otras maneras de representar a los naturales?

Los números enteros.

Los números naturales pueden sumarse y multiplicarse, pero no siempre pueden restarse. Para hacerlo necesitamos los números negativos. Los **números enteros** son los números naturales junto con sus negativos y el 0, donde -n es algo que sumado con n da 0.

Z = {...,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,...}.

Observar que m-n=m'-n' si y solo si m+n'=m'+n, así podemos representar a los enteros como *clases de equivalencia* de parejas de naturales, usando solamente la suma:

En el conjunto de parejas **N**x**N** la relación (m,n)~(m',n') Œm+n' = m'+n es una relación de equivalencia (tarea) y la clase de equivalencia de (m,n) representa al entero m-n.

Ejemplos. $(3,1)\sim(6,4)$ ya que $3+4=6+1$. La clase de $(3,1)$ representa al entero 2.

$(1,2)\sim(3,4)$ ya que $1+4=3+2$. La clase de $(1,2)$ representa al entero -1.

Esta representación de los enteros permite definir la suma, la resta y la multiplicación de enteros usando únicamente la suma y el producto de números naturales:

- $(a,b) + (c,d) = (a+c,b+d)$
- $(a,b) - (c,d) = (a+d,b+c)$
- $(a,b) \cdot (c,d) = (ac+bd,ad+bc)$ *¿por qué es así?*

Es fácil mostrar que estas operaciones en las parejas de naturales corresponden a la suma, resta y multiplicación de los enteros. Por ejemplo, $(a,b)+(c,d) = (a+c,b+d)$ corresponde a la suma porque $(a+c)-(b+d) = (a-b)-(c-d)$.

Problemas.

6. Muestra que la relación en **N**x**N** dada por $(m,n)\sim(m',n') \Leftrightarrow m+n' = m'+n$ es una relación de equivalencia.

7. Demuestra que la resta y el producto de parejas definidos arriba corresponden a la resta y producto de enteros.

Los números racionales.

Los números enteros pueden sumarse, restarse y multiplicarse, pero no siempre pueden dividirse. Los **números racionales**, son las fracciones de la forma m/n, donde m y n son enteros, $n\neq0$.

Aquí m/n representa a un número que multiplicado por n da m, así que m/n y m'/n' representan al mismo número si y sólo si $mn'=m'n$, ya que si multiplicamos a m/n y a m'/n' por nn' obtenemos mn' y $m'n$ respectivamente.

Ejemplos:

- $6/9=2/3$ ya que $6\cdot3=2\cdot9$
- $7/2\neq31/9$ ya que $7\cdot9\neq2\cdot31$
- $7/4<16/9$ ya que $7\cdot9<4\cdot16$

Las fracciones se pueden sumar, restar, multiplicar y también se pueden dividir (si no se divide entre 0) para obtener otras fracciones.

La suma y resta son sencillas cuando las fracciones tienen el mismo denominador: $a/b+c/b=(a+c)/b$, y si no es así podemos usar fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador: $a/b\pm c/d=ad/bd\pm bc/bd = (ad\pm bc)/bd$.

La multiplicación y la división de fracciones están determinadas por la multiplicación de los números enteros: $(a/b)\cdot(c/d) = ac/bd$ ya que $((a/b)\cdot(c/d))\cdot bd= (a/b)b\cdot(c/d)\cdot d = ac = (ac/bd)\cdot bd$

Como m/n es un número que multiplicado por n da m, $(a/b)/(c/d)$ debería ser un número que multiplicado por c/d de a/b. Como $(c/d)\cdot(ad/bc) = cad/dbc = a/b$ entonces $(a/b)/(c/d) = ad/bc$

Así que podemos representar a los racionales como pares de números enteros (m,n), con $n\neq 0$ con con la relación de equivalencia $(m,n)\sim(m',n')$ si $m\cdot n' = m'\cdot n$.

Ejemplos.

- $(8,4)\sim(2,1)$ ya que $8\cdot 1=4\cdot 2$ y la clase de equivalencia de $(8,4)$ representa al entero 2.
- $(6,9)\sim(4,6)$ ya que $6\cdot 6=4\cdot 9$ y la clase de equivalencia de $(6,9)$ representa al racional 2/3.

Al representar a los racionales como clases de equivalencia de pares de enteros, las operaciones + - x / se traducen a operaciones entre pares de enteros:

- $(a,b) + (c,d) = (ad+bc,bd)$
- $(a,b) - (c,d) = (ad-bc,bd)$
- $(a,b) \cdot (c,d) = (a\cdot c,b\cdot d)$
- $(a,b) / (c,d) = (a\cdot d,b\cdot c)$

En este caso la multiplicación y división son mas fáciles que la suma y la resta.

Problemas.

8. Ordena los siguientes números racionales en orden creciente *sin usar calculadora y sin hacer divisiones*. 5/7 7/9 8/11 10/13

9. Muestra que la relación en **Z** x **Z**-{0} dada por $(m,n)\sim(m',n')$ si $m\cdot n' = m'\cdot n$ es una relación de equivalencia.

10. ¿Si olvidamos que no se puede dividir entre 0 y permitimos parejas de la forma (m,0), la relación anterior sigue siendo de equivalencia? ¿que clase de números quedan?

Los números reales

Los números naturales permiten *contar* y los números racionales permiten *repartir*, pero si queremos medir con precisión necesitamos mas números, como descubrieron los griegos al demostrar que √2 no es un número racional *(ver la demostración en las notas de lógica).*

Cada número racional puede describirse usando un par de números enteros, pero para determinar a un número real a veces es necesaria mucha mas información. Los reales pueden describirse exactamente usando una *expansión decimal*, posiblemente infinita, que puede obtenerse con la división exacta.

Ejemplos:

- 1/4 = 0.25000000000000000000000000000000000000...
- -1/3 = -0.33333333333333333333333333333333333333...
- 9/7 = 1.285714285714285714285714285714285714...
- √2 = 1.41421356237309504880168872420969807856967187...
- π = 3.14159265358979323846264338327950288419716939...

donde los puntos suspensivos indican que los dígitos continuan hasta el infinito (aunque las colas de 0 pueden omitirse). La expansión decimal de cada real es única, si evitamos colas de 9's:

Ejemplos:

- 1 = 0.9999999999999999999999999999999.....
- 12.34567 = 12.3456999999999999999999999.....

A los números reales que no son racionales se les llama **irracionales** y al conjunto de los números irracionales se le denota por **I**. La existencia de un solo numero irracional implica que hay al menos tantos irracionales como racionales:

Lema. Existe una función inyectiva de **Q** a **I** , por lo tanto |**Q**|≤|**I**|.

Demostración. Podemos dar una función inyectiva de **Q** a **I** sumándole a todos los números racionales el mismo número irracional (por ejemplo, haciendo f(x)=x+√2). Esta función esta bien definida porque al sumarle a un numero racional un número irracional siempre obtenemos un numero irracional (tarea) y la función es inyectiva porque si x+√2=x'+√2 entonces x=x'.

Problemas.

11. Encuentra las expansiones decimales de estos números

 a. 1/9 b. 1/11 c. 5/13

12. a. Demuestra que la suma de un racional y un irracional es irracional

 b. Demuestra que el producto de un racional y un irracional es irracional.

 c. Demuestra que el cociente de un racional y un irracional es irracional.

13. Si a y b son números irracionales

 a. ¿Es posible que a+b sea racional? Y que ab sea racional? ¿y que ab sea racional?

 b. ¿Es posible que a+b y a-b sean ambos racionales?

 c. ¿Es posible que ab y a/b sean ambos racionales?

 Justifica bien tus respuestas

Conjuntos numerables y conjuntos no numerables.

Un conjunto infinito A se llama **numerable** si tiene la misma cardinalidad que **N**, es decir, si existe una biyección de A a **N.** A es numerable si podemos ir contando sus elementos de modo que no nos falte ninguno, pero nunca terminamos de contarlos.

Ejemplos.

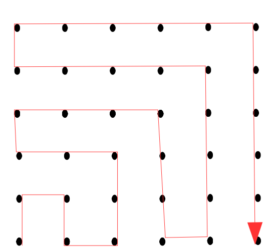
- **Z** es numerable, ya que podemos recorrer sus elementos en este orden: 0,1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,....

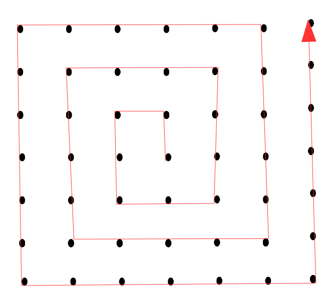
  y este recorrido da una función biyectiva f: **N** □ **Z** donde f(1)=0, f(2)=1, f(3)=-1, f(4)=2, f(5)=-2,...

  Hay muchas otras maneras de hacerlo, pero no podemos hacerlo en un orden arbitrario: por ejemplo, si queremos hacerlo pasando primero por todos los números positivos nunca llegaremos a los negativos, así que no obtendremos una biyección de **N** a A.

- **N**x**N** y **Z**x**Z** son numerables

  Aquí se muestran dos posibles recorridos de **N**x**N** y **Z**x**Z**:



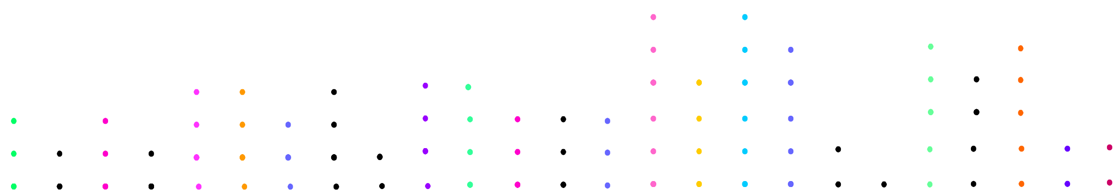


Se dice que un conjunto A es **a lo mas numerable** si A es finito o es numerable.

Teorema.

1. La unión de cualquier familia numerable de conjuntos finitos es a lo mas numerable.
2. La unión de cualquier familia finita de conjuntos numerables es numerable.
3. La unión de cualquier familia numerable de conjuntos numerables es numerable.

Demostración. En el caso 1 pongamos a los elementos de cada conjunto finito formando una columna y en el caso 2 pongamos los elementos de cada conjunto numerable formando una fila. En ambos casos tendremos una colección numerable de columnas, cada una con una cantidad finita de elementos. Hay que ver que podemos recorrer todos los elementos de todas las columnas, pasando eventualmente por cada uno.



Como las columnas tienen una cantidad finita de elementos, podemos irlas recorriendo una por una. Como los conjuntos no tienen que ser ajenos, la función que obtenemos de **N** a la unión de los conjuntos puede no ser inyectiva, pero esto es fácil de arreglar, ya que podemos ir numerando los elementos brincándonos los repetidos que ya hayamos contado antes.

En el caso 3, podemos acomodar a los elementos de cada conjunto formando una fila numerable, y podemos acomodar los conjuntos uno encima del anterior, para formar un arreglo como **N**x**N**, y ya sabemos como numerar a los elementos de este conjunto. Como en el caso anterior, los conjuntos no tienen que ser ajenos, pero podemos evitar contar dos veces el mismo elemento brincándonos los que hayamos contado antes.

Ejemplos:

- **Q** es numerable, ya que podemos ver a las fracciones a/b como parejas (a,b) en **Z**x**N**. A la hora de recorrer **Z**x**N** podemos pasar por parejas distintas que den la misma fracción, pero podemos brincarnos las que ya hayamos contado.
- Los **números algebraicos** son los números que son soluciones de algún polinomio con coeficientes enteros. Los números algebraicos incluyen a los números racionales, a todas sus raíces n-esimas y todas sus combinaciones (sumas y restas, productos, cocientes y raíces), como $\sqrt{\sqrt{{}^3/_5}+{}^2/_7}$. El conjunto de los números algebraicos es numerable, ya que existe una cantidad numerable de polinomios con coeficientes enteros y cada uno tiene una cantidad finita de raíces. (tarea).

Teorema. El conjunto de los números reales es **no** numerable.

Demostración. Basta mostrar que el conjunto de número reales entre 0 y 1 no es numerable. Supongamos que pudieramos enumerarlos como $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$ Identifiquemos a cada r_k con su expansión decimal: $r_k = 0.a_{k1}a_{k2}a_{k3} \ldots a_{kn} \ldots$.donde cada a_{ij} es un dígito entre 0 y 9.

Podemos suponer que ninguna expansión termina en una cola infinita de 9's (porque podríamos cambiarla por una expansión que termina en 0's.Con esta restricción, dos expansiones distintas representan números reales distintos. Tendríamos entonces una lista infinita donde aparecen todas las expansiones decimales posibles sin colas infinitas de 9's:

$r_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16} \ldots a_{1n} \ldots$

$r_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \ldots\ldots\ldots a_{2n} \ldots$

$r_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33} \ldots\ldots\ldots a_{3n} \ldots$

. . . .

$r_k = 0.a_{k1}a_{k2}a_{k3} \ldots\ldots\ldots a_{kn} \ldots$

. . . .

Para ver que esto es imposible veremos que sin importar como hagamos la lista debe haber habido una expansión decimal $r_0 = 0.a_{01}a_{02}a_{03}a_{04}a_{05}a_{06} \ldots a_{0n} \ldots$ que *no* está ahi.

Elijamos a_{01} que sea distinto de 9 y de a_{11}

elijamos a_{02} que sea distinto de 9 y de a_{22}

elijamos a_{03} que sea distinto de 9 y de a_{33}

y elijamos a_{k3} que sea distinto de 9 de a_{kk} para cada valor de k

Entonces la expansión $0.a_{01}a_{02}a_{03}a_{04}a_{05}a_{06} \ldots a_{0n} \ldots$ es distinta de todas los anteriores porque difiere de cada una en al menos un dígito, y por lo tanto este número r_0 representado por esta expansión es distinto de todos los anteriores.

Problemas.

14. Demuestra que solo existen una cantidad numerable de polinomios con coeficientes enteros, y por los tanto solo hay una cantidad numerable de números algebraicos.

15. ¿El conjunto **I** de números irracionales es numerable o no numerable?

16. Demuestra que el conjunto de todas las sucesiones de 0's y 1's es no numerable. Hint: ver la demostración de que R no es numerable

17. Demuestra que si A es un conjunto a lo mas numerable y 2^A es el conjunto potencia formado por los subconjuntos de A entonces $|A|<|2^A|$. Hint: problema anterior