Inducción matemática.

La inducción matemática es un método para demostrar afirmaciones acerca de todos los números naturales, o de conjuntos que están ordenados como los naturales.

Consideremos la afirmación:

Todo numero mayor o igual a 7 es suma de un múltiplo de 3 y un múltiplo de 4.

¿Como podemos saber si la afirmación es cierta? Podemos ver que

$7=1\cdot 3+1\cdot 4$, $8=0\cdot 3+2\cdot 4$, $9=3\cdot 3+0\cdot 4$, $10=2\cdot 3+1\cdot 4$, $11=1\cdot 3+2\cdot 4$, $137=23\cdot 3+17\cdot 4$,

pero ver que es cierto en casos particulares no demuestra que sea siempre cierta, no importa cuantos casos probemos, siempre podría fallar en el siguiente.

¿Como podemos saber que siempre es cierta, si no podemos comprobar todos los casos porque nos tomaría una eternidad?

La inducción es un tipo de razonamiento lógico que permite hacer demostraciones para una infinidad de casos en un tiempo finito, y está basada en el siguiente:

Principio de Inducción matemática:

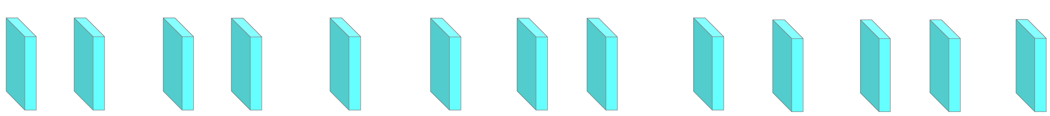
Si una afirmación sobre los números naturales es válida para el número 1, y si siempre que vale para un número también vale para el siguiente, entonces es válida para todos los números.

Así que si podemos demostrar que una afirmación es cierta para algún número y podemos demostrar que siempre que sea cierta para un número también debe ser cierta para el siguiente número, entonces debe ser cierta para todos los números a partir del primero.

Una **demostración por inducción** tiene dos pasos:

1. La base de la inducción: *Mostrar que la afirmación es cierta en el primer caso.*
2. El paso de inducción: *Suponer que la afirmación es cierta en un caso, y mostrar que entonces es cierta en el siguiente caso*.

La inducción funciona como el juego de acomodar las fichas de dominó de modo que al tirar una se caigan todas:



La base de inducción corresponde a tirar la primera ficha y el paso de inducción se asegura de que al caer una ficha también caiga la siguiente. Si hacemos bien las dos cosas sabremos que todas las fichas caerán en algún momento. Pero si falla en cualquier lugar las fichas dejarán de caer.

Demostrar por inducción que para todo numero natural n, $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

1. Base de inducción: *Hay que mostrar que la afirmación es cierta en el primer caso.*

   $1 = {}^{1(1+1)}/_{2}$ así que la afirmación vale para n=1.

2. Paso de inducción. *Suponemos que la afirmación es cierta para un n y debemos mostrar que entonces es cierta para n+1.*

   Hipótesis de inducción: $1+2+3+...+n = {}^{n(n+1)}/_{2}$.

   Por demostrar: $1+2+3+...+n+(n+1) = {}^{(n+1)(n+2)}/_{2}$.

   Demostración. $1+2+3+...+n+(n+1) = (1+2+3+...+n)+(n+1) = {}^{n(n+1)}/_{2} + (n+1) =$

   $= {}^{n(n+1)+2(n+1)}/_{2} = {}^{(n+1)(n+2)}/_{2}$

   que es lo que queríamos demostrar. ◙

Demostrar por inducción que todo numero natural mayor o igual a 7 es la suma de un múltiplo de 3 y un múltiplo de 4.

1. Base de inducción. 7 si es suma de un múltiplo de 3 y un múltiplo de 4, ya que $7=1\cdot 3+1\cdot 4$

2. Paso de inducción. *Suponemos que la afirmación es cierta para un n y debemos mostrar que entonces es cierta para n+1.*

Hipótesis de inducción: n es suma de un múltiplo de 3 y un múltiplo de 4

Por demostrar: n+1 es suma de un múltiplo de 3 y un múltiplo de 4.

Demostración. Si $n=r\cdot 3+s\cdot 4$ *entonces* $n+1=r\cdot 3+s\cdot 4+1$ *y necesitamos ver si esto es la suma un múltiplo de 3 y uno de 4. En efecto,* $r\cdot 3+s\cdot 4+1 = (r-1)\cdot 3+(s+1)\cdot 4$ *si* $r>0$, *y* $r\cdot 3+s\cdot 4+1 = (r+3)\cdot 3+(s-2)\cdot 4$ *si* $r=0$ *(como* $n>7$, *si* $r=0$ *entonces* $s\geq 2$*). Así que si la afirmación es cierta para un numero n entonces también es cierta para el numero n+1.* ◙

Demuestra por inducción que para toda $n \geq 4$ *se cumple* $n! > 2^n$.

1. Base de inducción: $4!=24$ y $2^4=16$, así que $4!>2^4$.

2. Paso de inducción.

   Hipótesis de inducción: $n! > 2^n$.

   Por demostrar: $(n+1)! > 2^{n+1}$.

   Demostración. Si $n! > 2^n$ entonces $(n+1)! = n!(n+1) > 2^n(n+1)$

   Como $n \geq 4$, $n+1 \geq 5$, así que $2^n(n+1)\geq 2^n(5)>2^n(2)=2^{n+1}$. Así que $(n+1)! > 2^{n+1}$. ◙

Demostrar que para todo número natural n, n^3-n es múltiplo de 3.

Demostración por inducción:

1. Base de inducción: $1^3-1=0$, que es múltiplo de 3.

2. Paso de inducción.

   Hipótesis de inducción: n^3-n es múltiplo de 3.

   Por demostrar: $(n+1)^3-(n+1)$ es múltiplo de 3

   Demostración. $(n+1)^3-(n+1) = n^3+3n^2+3n+1-n-1 = (n^3-n)+3(n^2+n)$
   donde n^3-n es múltiplo de 3 por hipótesis de inducción y $3(n^2+n)$ es un múltiplo de 3, así que su suma es un múltiplo de 3. ◙

Demostrar que para cada número real x, $1+x+x^2+...+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

Demostración por inducción sobre n.

1. Base de inducción: $1+x = \frac{x^2-1}{x-1}$ ya que $(1+x)(x-1)= x^2-1$.
2. Paso de inducción.

   Hipótesis de inducción: $1+x+x^2+...+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

   Por demostrar: $1+x+x^2+...+x^{n+1} = \frac{x^{n+2}-1}{x-1}$.

   Demostración. $1+x+x^2+...+x^n+x^{n+1} = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + x^{n+1} = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + \frac{x^{n+2}-x^{n+1}}{x-1} = \frac{x^{n+2}-1}{x-1}$ ◙

Demostrar que n lineas rectas dividen al plano en a lo mas 2^n regiones.

Demostración por inducción sobre n.

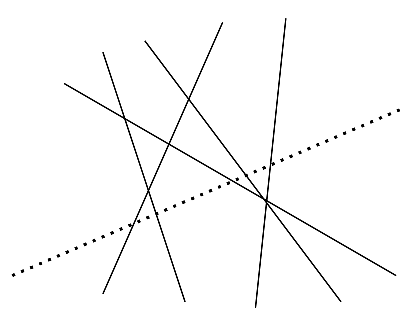
1. Base de inducción: Una recta divide al plano en dos regiones, y $2 \leq 2^1$. así que la afirmación es cierta para n=1.

2. Paso de inducción:

   Hipótesis de inducción: n rectas dividen al plano en a lo mas 2^n regiones.

   Por demostrar: n+1 rectas dividen al plano en al lo mas 2^{n+1} regiones

   Demostración. Tomamos n+1 rectas. Por hipótesis de inducción las primeras n rectas dividen al plano en a lo mas 2^n regiones. Al dibujar la recta n+1, esta divide a cada una de esas regiones en a lo mas 2 partes, así que las n+1 rectas dividen al plano en a lo mas $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ regiones. ◙



Demostrar que los polinomios de grado n tienen a lo mas n raíces

Recordar que un número **a** es una raíz del polinomio p(x) si p(**a**)=0, y que **a** es raíz de p(x) si y solo si el polinomio x-**a** divide al polinomio p(x).

Demostración por inducción sobre el grado de los polinomios.

1. Base de inducción: Si p(x) es un polinomio de grado 1 entonces p(x)=ax+b para algunos a y b con a≠0. Si p(x)=0 podemos despejar x=-b/a que es la única raíz de p(x). Así que los polinomios de grado 1 solo tienen una raíz

2. Paso de inducción:
   Hipótesis de inducción: Todos los polinomios de grado n tienen a lo mas n raíces
   Por demostrar: Los polinomios de grado n+1 tienen a lo mas n+1 raíces .

   Demostración. Sea p(x) un polinomio de grado n+1. Si p(x) no tiene ninguna raíz ya acabamos. Si p(x) tiene una raíz **r**, entonces p(x) es divisible entre x-**r**. El cociente es un polinomio q(x) tal que p(x)=(x-**r**)q(x) y el grado de q(x) es n. Las raíces de p(x) son las raíces de q(x) y **r**, y por hipótesis de inducción q(x) tiene a lo mas n raíces, así que p(x) tiene a lo mas n+1 raíces. ◙

Problemas.

1. Observa que 1=1, 1+3=4, 1+3+5=9, 1+3+5+7=16. Adivina cual es la fórmula para la suma de los primeros n números impares, y usa inducción para demostrar que vale para todo n.

2. Demuestra que para toda n≥4 se cumple que $2^n \geq n^2$.

3. Cada número natural mayor o igual a 8 es suma de un múltiplo de 3 y un múltiplo de 5.

4. Demuestra por inducción que un conjunto de n elementos tiene exactamente 2^n subconjuntos.

Inducción fuerte.

Hay una variante del método de inducción que es equivalente al anterior pero que a veces es mas fácil de aplicar.

Principio de Inducción fuerte:

Si una afirmación es cierta para el número 1, y si siempre que es cierta los números naturales menores que n también es cierta para n, entonces es cierta para todos los números.

Las demostraciones por inducción fuerte tienen dos partes:

Paso 1. (Base de inducción) Demostrar que la afirmación es cierta en el primer caso.

Paso 2. (Paso de inducción fuerte) Suponer que la afirmación es cierta para todos los números menores a n y probar que entonces es cierta para n.

Aquí hay unos ejemplos de como se usa la inducción fuerte:

Demostrar que cada número natural $n \geq 2$ es un primo o se puede factorizar como producto de números primos.

Demostración por inducción fuerte.

1. Base de inducción fuerte. 2 es primo, ya que no es producto de dos números naturales menores que

2. Paso de inducción fuerte.

   Hipótesis *de inducción:* Todos los números menores a n son primos o producto de primos.

   Por demostrar: n es primo o producto de primos.

   Demostración. Si n es primo ya acabamos. Si n no es primo, es el producto de dos números k y k' menores a n, entonces por hipótesis de inducción k es primo o es producto de primos y k' es primo o es producto de primos. Así que n=kk' es el producto de todos los primos que multiplicados dan k y k'. ◙

Demostrar que todo polígono de $n \geq 3$ lados es la unión de n-2 triángulos.

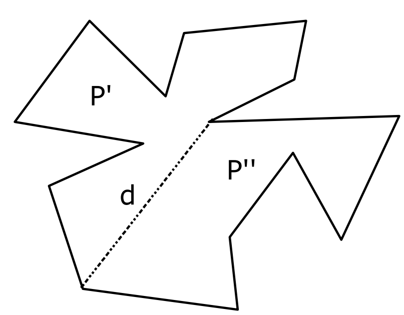
1. Base de inducción. Si n=3 el polígono es un triángulo, que es la unión de 3-2=1 triángulos

2. Paso de inducción fuerte.

   Hipótesis de inducción: Todos los polígonos de k<n lados son la unión de k-2 triángulos

   Por demostrar: todos los polígonos de n lados son la unión de n-2 triángulos

   Demostración. Sea P es un polígono de n lados. Entonces P tiene una diagonal d (una linea que une dos vértices de P y que esta contenida en P) y d corta a P en dos polígonos P' y P''. Si P' tiene k' lados y P'' tiene k'' lados entonces n=k'+k''-2, ya que al unir P y P'' para formar P, sus lados se vuelven lados de P, excepto por dos lados que se unen en d.



   Por hipótesis de inducción P' es unión de k'-2 triángulos y P'' es unión de k''-2 triángulos Así que P=P'UP'' es unión de (k'-2)+(k''-2) = k'+k''- 4 = n-2 triángulos, que es lo que queríamos probar. ◙

Al usar inducción hay que tener cuidado de hacerlo bien, o podemos llevarnos una sorpresa.

¿Que esta mal con las siguientes 'demostraciones' ?

Para todo número natural n, n=n+1.

Demostración por inducción:

Hipótesis de inducción: n=n+1.

Por demostrar: n+1=n+2.

Demostración. Si n=n+1 y sumamos 1 de cada lado obtenemos n+1=n+2. ◙

Todos los números naturales mayores o iguales a 2 son pares.

Demostración por inducción:

1. *Base de inducción.* 2 si es par
2. *Paso de inducción.*

Hipótesis de inducción: supongamos que todos los números menores que n son pares.

Por demostrar: n es par.

Demostración. Como n-2<n, por hipótesis de inducción n-2 es par y si le sumamos 2 sigue siendo par, asi que n es par. ◙

En cualquier conjunto de caballos, todos son del mismo color.

Demostración por inducción sobre la cardinalidad de los conjuntos.

1. *Base de inducción.* Si un conjunto tiene solo un un caballo entonces todos los caballos del conjunto son del mismo color.

2. *Paso de inducción.*

Hipótesis de inducción. En cada conjunto de n caballos, todos son del mismo color.

Por demostrar. En cada conjunto de n+1 caballos, todos son del mismo color.

Demostración. Tomemos un conjunto de n+1 caballos. Si apartamos un caballo entonces queda un conjunto de n caballos, y por hipótesis de inducción deben ser del mismo color. Si regresamos ese caballo y apartamos otro, queda otro conjunto de n caballos que por hipótesis de inducción también deben ser del mismo color. Como el conjunto original de n+1 caballos es la unión de dos conjuntos de n caballos del mismo color, entonces todos los caballos del conjunto deben ser del mismo color. ◙

Problemas.

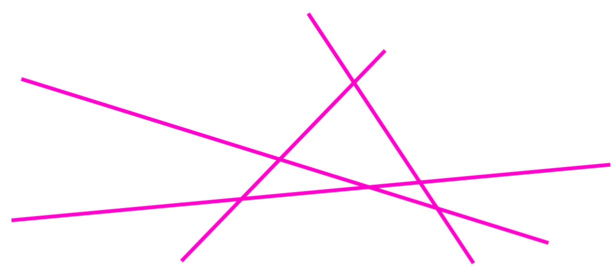
5. Demuestra por inducción que cada numero natural se puede escribir como una suma de potencias de 2 *que no se repiten* (ejemplos: $3=2^1+2^0$, $7=2^2+2^1+2^0$, $8=2^3$, $20=2^4+2^2$)

hint: restar una potencia adecuada de 2 lleva a un caso menor.

6. Demuestra que los ángulos internos de un polígono de n lados suman $180(n-2)$ grados.

Hint: inducción fuerte.

7. Exactamente en cuantas regiones cortan al plano n lineas no paralelas que se cruzan *en puntos distintos*? Haz algunos ejemplos para adivinar la respuesta y demuéstrala por inducción.



Problemas de repaso.

8. Demuestra que 6^n-1 es divisible entre 5 para toda n en **N**.

9. Demuestra por inducción que un número natural es divisible entre 3 si y solo si la suma de sus dígitos es divisible entre 3.

10. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{2n}$ para toda n.

11. Demuestra que $(1+x)^n \geq 1+nx$ para toda x en **R** y toda n en **N**.

12. Demuestra por inducción que si se dibujan n círculos en el plano, entonces es posible pintar las regiones en que dividen al plano de dos colores, de modo que dos regiones del mismo color solo se toquen en un punto.