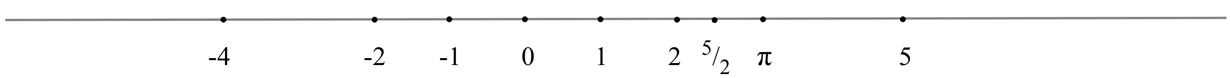
Vectores.

Los vectores son objetos algebraicos parecidos a los números, que se pueden sumar (pero no multiplicar) y tienen muchísimas aplicaciones en las matemáticas, física, ingeniería, economía,...

Empezar por considerar los vectores mas sencillos.

Los números reales pueden identificarse con los puntos de una línea recta, de modo que las distancias entre puntos corresponden a las diferencias entre los números:



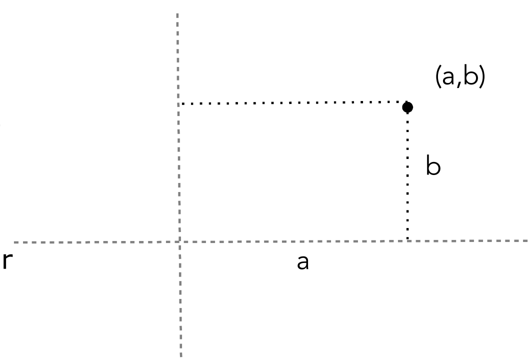
Aunque podemos sumar, restar y multiplicar números reales, no tiene mucho sentido sumar, restar y multiplicar puntos. Pero en lugar de identificar a los números con puntos, podemos identificarlos con *desplazamientos,* que indicamos con *flechas*: los números positivos con desplazamientos a la derecha y los negativos a la izquierda.

Los desplazamientos o flechas se pueden sumar y restar, y se pueden multiplicar por números reales. Estas flechas son *vectores* en una dimensión.

Vectores en 2 dimensiones.

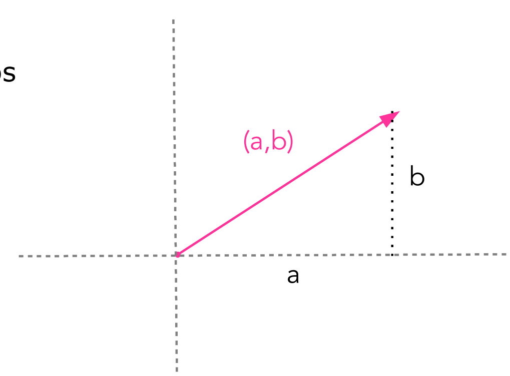
Podemos identificar a las parejas de números reales (a,b) con los puntos del plano.

Aunque podemos sumar y restar parejas de números reales (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d) y multiplicar una pareja por un número real r(a,b)=(ra,rb), no tiene mucho sentido sumar y restar puntos.



Pero también podemos identificar a las parejas de números reales con desplazamientos en el plano, y estos pueden visualizarse como flechas. Estas flechas son *vectores* en dos dimensiones.

En particular podemos pensar en la pareja de números reales (a,b) como en la flecha que va del punto (0,0) al punto (a,b).



Los vectores en 2 dimensiones se pueden multiplicar por números reales (que en el lenguaje de los vectores son llamados *escalares*), multiplicando sus coordenadas por ese numero.

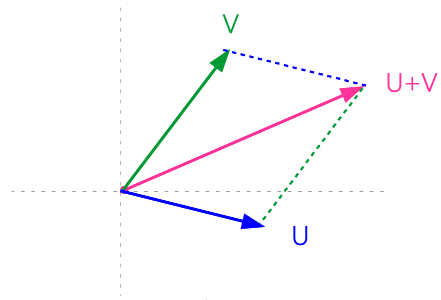
Si U=(a,b) entonces -U=-1(a,b)=(-a,-b)   Si U=(a,b) entonces rU=r(a,b)=(ra,rb)

La multiplicación por escalares positivos cambia el tamaño de los vectores sin cambiar su dirección, la multiplicación por escalares negativos cambia además el sentido.

Los vectores en dos dimensiones se pueden sumar:

Si U=(a,b) y V=(c,d) entonces U+V=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)

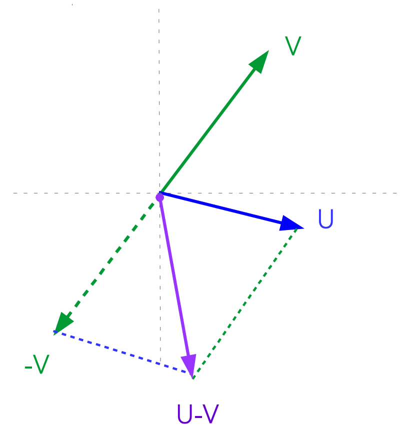
La suma corresponde a hacer un desplazamiento y luego el otro.



Los vectores también se pueden restar:

Si U=(a,b) y V=(c,d) entonces U-V = (a,b)-(c,d) = (a-c,b-d)

La resta corresponde a hacer un desplazamiento y luego el opuesto al otro: restarle V a U equivale a sumar U con -V.

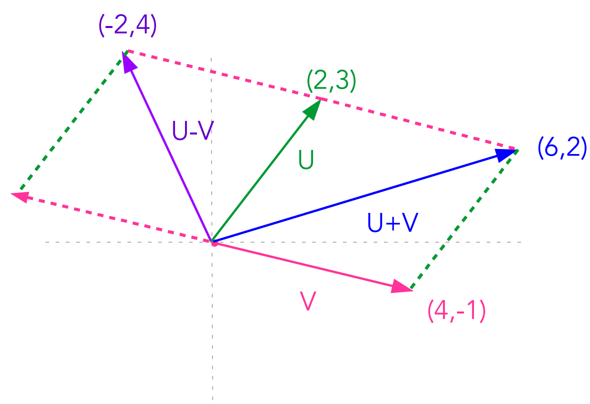


Ejemplo. Si U=(1,3) y V=(4,-1)

entonces

U+V=(5,2)

U-V=(-3,4)



Podemos usar la suma de vectores y la multiplicación por escalares para obtener nuevos vectores. Si U y V son vectores, las combinaciones de la forma rU+sV se llaman **combinaciones lineales** de U y V.

Ejemplo. Si U=(1,2) y V=(4,-3) entonces una combinación lineal de U y V es -2U+V=(2,-7)

y otra combinación lineal es ${}^{3}/_{2}U+{}^{1}/_{4}V = ({}^{5}/_{2},{}^{9}/_{4})$.

Ejemplo. Mostrar que el vector (5,6) es una combinación lineal de los vectores (1,2) y (4,-3).

Buscamos escalares r y s tales que $r(1,2)+s(4,-3)=(5,6)$

desarrollando queda $(r+4s,2r-3s)=(5,6)$

así que

$r+4s=5 \to r=5-4s$

$2r-3s=6 \to 2(5-4s)-3s=6 \to 10-11s=6 \to 11s=4 \to s={}^{4}/_{11}$

$r=5-4({}^{4}/_{11})= {}^{55}/_{11} -{}^{16}/_{11} = {}^{39}/_{11}$

Ahora podemos comprobarlo:

${}^{39}/_{11}(1,2)+{}^{4}/_{11}(4,-3) = ({}^{39}/_{11},{}^{78}/_{11})+({}^{16}/_{11},{}^{-12}/_{11}) = ({}^{55}/_{11},{}^{66}/_{11})=(5,6)$. ◙

Ejemplo. Demuestra que todos los vectores del plano son combinaciones lineales de (1,2) y (3,1).

Para ver que cada vector (x,y) es combinación lineal de (1,2) y (4,3), hay que hallar r y s tales que

$r(1,2)+s(3,1)=(x,y)$

o sea $(r+3s,2r+s)=(x,y)$

$r+3s=x \to r=x-3s \to r=x-3s =x-3({}^{2}/_{5}x-{}^{1}/_{5}y)=-{}^{1}/_{5}x+{}^{3}/_{5}y$

$2r+s=y \to 2(x-3s)+s=y \to 2x-5s=y \to 5s=2x-y \to s={}^{2}/_{5}x-{}^{1}/_{5}y$

Podemos comprobar que esto esta bien calculando la combinación lineal:

$(-{}^{1}/_{5}x+{}^{3}/_{5}y)(1,2) + ({}^{2}/_{5}x-{}^{1}/_{5}y)(3,1) = (-{}^{1}/_{5}x+{}^{3}/_{5}y,-{}^{2}/_{5}x+{}^{6}/_{5}y) + ({}^{6}/_{5}x-{}^{3}/_{5}y,{}^{2}/_{5}x-{}^{1}/_{5}y) = ({}^{5}/_{5}x,{}^{5}/_{5}y) = (x,y)$

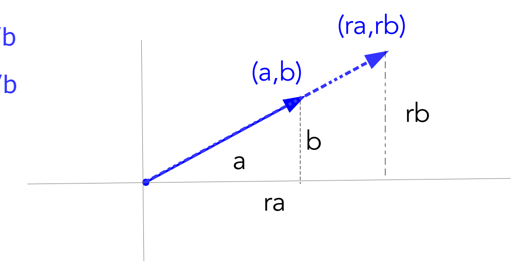
◙

Diremos que dos vectores tienen *la misma dirección* si uno es múltiplo escalar del otro.

Observar que $(a',b')=r(a,b) \Leftrightarrow a'=ra$ y $b'=rb \Leftrightarrow a'/a=r=b'/b$

Así que (a,b) y (a',b') tienen la misma dirección si y solo si $a'/a=b'/b$

y esto sucede si y solo si $ab'=a'b$.



Ejemplo. (2,-4) y (3,-6) y (-5,10) tienen la misma dirección

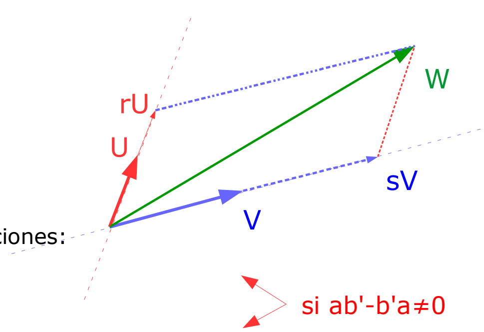
Lema. Si U y V son dos vectores del plano con distintas direcciones, entonces todos los vectores del plano son combinaciones lineales de U y V.

Demostración. Sean U=(a,b) , V=(a',b') y W=(x,y).

Para ver que cada vector W es combinación lineal de U y V hay que ver que existen escalares r y s tales que $r(a,b)+s(a',b')=(x,y)$ o sea

$ra+sa'=x \qquad rb+sb'=y$

mutiplicando la primera por b y por b' y la segunda por a y a' quedan 4 ecuaciones:



$rab+sa'b=xb$	$rab'+sa'b'=xb'$	
$rba+ab'a=ya$	$rba'+ab'a'=ya'$	restandolas queda
$sa'b-sb'a=xb-ya$	$rab'-rba'=xb'-ya'$	y simplificando queda
$s=xb-ya/a'b-b'a$	$r=xb'-ya'/ab'-ba'$	siempre y cuando $ab'-b'a\neq0$, lo que ocurre cuando (a,b) y (a',b') no tienen la misma dirección. Y se puede comprobar que $r(a,b)+s(a',b')=(x,y)$ ◙

Problemas.

1. Si U=(3,1) V=(-4,2) W=(-1,5) calcula $-\frac{3}{2}V$, 3U+2V, U-2V, $\frac{2}{3}V+\frac{1}{3}W$, U+V-W

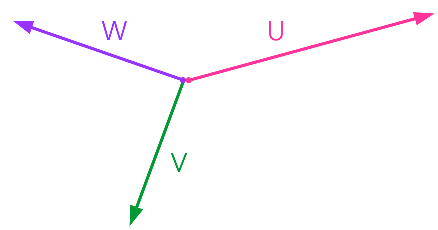
2. Para los vectores U, V y W mostrados, dibuja *cuidadosamente* y sin usar coordenadas los siguientes vectores:

   a. $\frac{1}{2}U + \frac{1}{2}V$

   b. $\frac{1}{2}U - \frac{1}{2}V$

   c. $\frac{1}{3}V + \frac{2}{3}W$

   d. $\frac{1}{3}U + \frac{1}{3}V + \frac{1}{3}W$

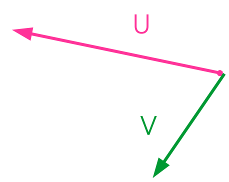


3. ¿El vector (1,0) es combinación lineal de los vectores (1,1) y (1,4)? ¿Y el vector (2,1)?

4. Si U y V son los vectores mostrados, di hacia donde apuntan los vectores rU+sV si

   a. r>0 y s>0 b. r<0 y s<0

   c. r>0 y s<0 d. r<0 y s>0



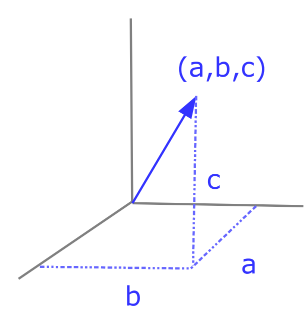
5. Si U y V son los vectores anteriores, di como se ven los vectores rU+sV cuando

   a. r=s b. r+s=0 c. r+s=1

6. Muestra que cada vector (x,y) es combinación lineal de (1,2) y (1,3).

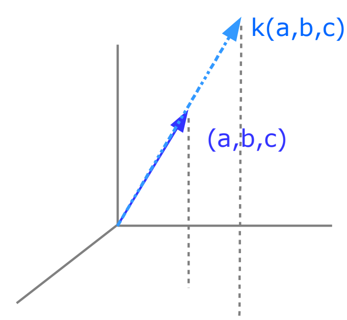
7. Muestra que el vector (0,0) es una combinación lineal de (1,1), (1,2) y (1,3), (0,0)=r(1,1)+s(1,2)+t(1,3), con r,s,t *distintos* de 0.

Vectores en 3 dimensiones



Podemos identificar a las tercias de números reales (a,b,c) con puntos del espacio, y también podemos identificar a esas tercias con desplazamientos o con flechas que van del punto (0,0,0) al punto (a,b,c): estas flechas son vectores en 3 dimensiones.

Los vectores en el espacio pueden representar velocidades, fuerzas y muchas cosas mas.Los vectores se pueden multiplicar por escalares:

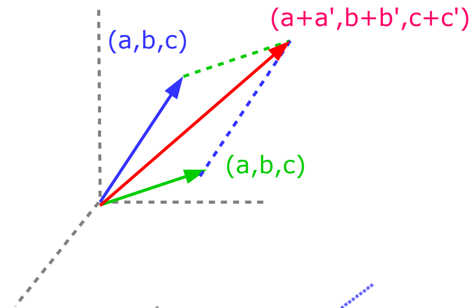


Si U=(a,b,c) y k en **R** entonces kU=(ka,kb,kc).

Geométricamente, al multiplicar un vector U por el escalar r corresponde a estirar o encoger U por un factor r sin cambiar su dirección si r>0, o a estirarlo o encogerlo y voltearlo si r<0.

Los vectores pueden sumarse coordenada a coordenada

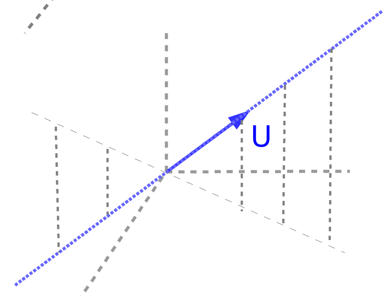
Si U=(a,b,c)   y V=(a',b',c') entonces U+V=(a+a',b+b',c+c').



Geométricamente la suma corresponde a la suma de desplazamientos y el vector U+V está en el plano que contiene a U y V. En física las posiciones, las velocidades y las fuerzas se suman como vectores.

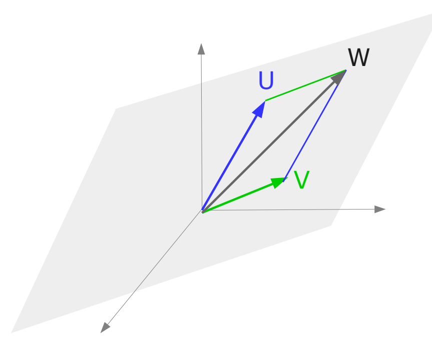
Diremos que 2 vectores tienen la *misma dirección* si uno es múltiplo escalar del otro. Los vectores en la misma dirección forman una recta.

(a,b,c) y (a',b',c') tienen la misma dirección si existe r tal que a'=ra, b'=rb, c'=rc, y esto ocurre si y solo si a'/a=b'/b=c'/c.



Lema. Las combinaciones lineales de 2 vectores con distintas direcciones forman un plano.

Demostración geométrica. Dos vectores U y V basados en el origen y con distintas direcciones están contenidos en un plano. Los múltiplos escalares de cualquier vector contenido en el plano están contenidos en el plano y la suma de dos vectores contenidos en el plano también esta contenida en el plano. Así que todas las combinaciones lineales de U y V están contenidas en el plano.



Y todos los vectores del plano son combinaciones lineales de U y V, porque podemos llegar del origen a su punta moviéndonos en las direcciones de U y de V. ◙

Ejemplo. ¿El vector (-1,1,3) esta en el plano generado por (1,2,3) y (4,5,6)? ¿Y el vector (1,-1,3)?

Para ver si (-1,1,3) esta en el plano veremos si es combinación lineal de (1,2,3) y (4,5,6):

(-1,1,3)=(1,2,3)+s(4,5,6) = (r+4s,2r+5s,3r+6s)

de donde -1=r+4s   r=-1-4s   r=-1-4s=-1-4(-1)=3

1=2r+5s   1=2(-1-4s)+5s=-2-3s   3=-3s   s=-1

3=3r+6s   3=3(-1-4s)+6s=-3-6s s=-1

Y podemos comprobar que 3(1,2,3)-1(4,5,6)=(-1,1,3).

Para ver si (1,-1,3) esta en el plano hacemos   (1,-1,3)=(1,2,3)+s(4,5,6) = (r+4s,2r+5s,3r+6s)

de donde 1=r+4s → r=1-4s

-1=2r+5s → -1=2(1-4s)+5s=2-3s → -3=-3s → s=1

3=3r+6s → 3=3(1-4s)+6s=3-6s   s=0

la contradicción s=1 y s=0 dice que no hay solución, así que (-1,1,3) no esta en el plano. ◙

Ejemplo. Encuentra un vector horizontal que sea combinación lineal de (1,2,3) y (4,5,6)

Buscamos un vector de la forma (x,y,0) que sea combinación lineal de (1,2,3) y (4,5,6), es decir,
(x,y,0)=r(1,2,3)+s(4,5,6) = (r+4s,2r+5s,3r+6s)

de donde x=r+4s x=-2s+4s=2s
y=2r+5s y=2(-2s)+5s=s
0=3r+6s r=-2s

Así que las combinaciones de la forma -2s(1,2,3)+s(4,5,6) deberían ser los vectores horizontales en el plano, lo que podemos comprobar haciendo: -2s(1,2,3)+s(4,5,6)=(2s,s,0). ◙

Diremos que 2 vectores en el espacio son **colineales** si están en una misma línea, y que 3 vectores son **coplanares** si están en un mismo plano.

Lema. Si U,V,W son 3 vectores *no coplanares*, entonces todos los vectores del espacio son combinaciones lineales de U,V y W.

Demostración (geométrica). Si 3 vectores U, V y W no están en el mismo plano, entonces los planos UV, VW y UW son distintos, y cada par de planos se cruza en una recta que contiene a uno de los 3 vectores.

Dado un vector X basado en el origen, podemos dibujar los planos paralelos a UV,VW y UW por la punta de X, Los 6 planos juntos forman un paralelepípedo y el vector X es su diagonal, esto muestra que X es la suma de los 3 vectores dados por las aristas del paralelepípedo, que son múltiplos de U, V y W. ◙

Ejemplo. Muestra algebraicamente que todos los vectores de $\mathbf{R}^3$ son combinaciones lineales de (1,2,0), (3,0,1) y (2,1,-1).

Para ver si cada vector (x,y,z) es combinación lineal de (1,2,0), (3,0,1) y (2,1,-4) escribimos

(x,y,z)=r(1,2,0)+s(3,0,1)+t(2,-1,1)

(x,y,z)=(r+3s+2t, 2r+t, s-t)

x= r+3s+2t r=x-3(z+y-2r)-2(2r-y)=x-y-3z+2r r=-x+y+3z

y=2r-t t=2r-y t=2(-x+y+3z)-y=-2x+y+6z

z= s+t s=z-t=z-(2r-y)=z+y-2r s=z+y-2(-x+y+3z)=2x-y-5z

Y podemos comprobarlo: (-x+y+3z)(1,2,0)+(2x-y-5z)(3,0,1)+(-2x+y+6z)(2,1,-1)=(x,y,z) ◙

Problemas.

8. Sea P el plano generado por los vectores (2,-1,3) y (1,2,-2).

   a. ¿El vector (11,7,-1) esta en P?

   b. ¿Existe algún vector en P cuya segunda coordenada sea 0?

   c. ¿Hay algún vector en P cuya primera y tercera coordenadas sean iguales?

9. Muestra que los vectores en $\mathbf{R}^3$ de la forma (a+2b,4a-3b,-a-5b) con $a,b \in \mathbf{R}$ forman un plano.

10. Muestra que si U, V y W son vectores con distintas direcciones en $\mathbf{R}^3$ y W es una combinación lineal de U y V entonces V es una combinación lineal de U y W.

11. Demuestra que 3 vectores en $\mathbf{R}^3$ están en el mismo plano si y solo si existe una combinación lineal de los 3 que da (0,0,0) y no todos los escalares son 0.

12. Muestra que se puede llegar desde el origen hasta cualquier punto de $\mathbf{R}^3$ moviendose únicamente en las direcciones de los vectores (0,0,1), (0,1,1) y (1,1,1).

13. Muestra como descomponer a cada vector en $\mathbf{R}^3$ como combinación lineal de los vectores (1,2,0), (2,1,3) y (3,0,1).

Espacios vectoriales.

De manera análoga a como se hizo en 1, 2 y 3 dimensiones, es posible definir vectores en n dimensiones para cualquier n. Un **vector** en $\mathbf{R}^n$ es una n-ada de números reales $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Los vectores se pueden sumar coordenada a coordenada y se pueden multiplicar por escalares:

Si $U=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ y $V=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ entonces

$$U+V=(u_1+v_1,u_2+v_2,\ldots,u_n+v_n) \quad \text{y} \quad rU=(ru_1,ru_2,\ldots,ru_n)$$

La suma y el producto por escalares tienen las siguientes propiedades, heredadas directamente de las propiedades de la suma y la multiplicación de los números reales:

$U+V=V+U$	*la suma es conmutativa*
$(U+V)+W=U+(V+W)$	*la suma es asociativa*
$U+\mathbf{0}=U$ donde $\mathbf{0}=(0,0,\ldots,0)$	*existe un neutro aditivo*
$U+(-U)=\mathbf{0}$ donde $-U=(-u_1,-u_2,\ldots,-u_n)$	*existen inversos aditivos*
$r(U+V)=rU+rV$	
$(r+s)U=rU+sU$	
$(rs)U=r(sU)$	*compatibilidad del producto*

Hay muchos objetos matemáticos que se pueden sumar y multiplicar por escalares y que se usan en el álgebra, la geometría, el análisis, la física y la computación.

Un **espacio vectorial** (sobre **R**) es una colección de objetos, llamados **vectores** que se pueden sumar y multiplicar por números reales y en donde se cumplen todas las propiedades anteriores.

Estos vectores pueden verse muy distintos a los vectores en $\mathbf{R}^n = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}\}$.

Ejemplos de espacios vectoriales:

- El conjunto de sucesiones infinitas $(x_1,x_2,...,x_n,....)$ $x_i \in \mathbf{R}$.
- El conjunto de polinomios $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$
- El conjunto de funciones de **R** en **R**.
- El conjunto de matrices reales de mxn.
- El conjunto de ecuaciones lineales en 2 variables, como ax+by=c

Las sucesiones se pueden sumar y multiplicar por escalares, los polinomios también, y lo mismo pasa para las matrices y las ecuaciones. Para las funciones, la suma se define como (f+g)(x)=f(x)+g(x) y el producto por escalares como (rf)(x)=rf(x). Las propiedades de la suma y el producto escalar en cada caso se siguen de las mismas propiedades de los números reales.

Un subconjunto S de un espacio vectorial E es un **subespacio vectorial** de E si los vectores en S forman un espacio vectorial.

Lema. Si E es un espacio vectorial y $S \subset E$, entonces S es un subespacio vectorial de E si y solo si

1. El vector **0** está en S.
2. La suma de vectores en S está en S.
3. Los múltiplos escalares de vectores en S están en S.

Demostración. $\Rightarrow$ Para que S sea un espacio vectorial las propiedades 1,2 y 3 se tienen que cumplir.

$\Leftarrow$ Como la suma y el producto en S son los mismos que en E, las propiedades conmutativas, asociativas, distributivas y de compatibilidad del producto se cumplen. Así que para ver que S es un espacio vectorial basta ver que la suma de vectores en S están en S, que el producto de un vector en S por un escalar está en S, que el vector 0 (el neutro de la suma) está en S y que el inverso aditivo de cada elemento U de S esta en S. Y todo esto se sigue de las propiedades 1,2 y 3 (el inverso de U es el producto escalar de U por -1). ◙

Ejemplos.

- Los vectores del tipo (x,0) forman un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^2$: el vector (0,0) es de ese tipo, la suma de (x,0) y (x',0) es (x+x',0) que es de ese tipo, y r(x,0)=(rx,0) que es de ese mismo tipo. Los vectores del tipo (x,1) no forman un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^2$, porque no se cumple ninguna de las 3 condiciones: (0,0) no es de ese tipo, (x,1)+(y,1)=(x+y,2) no es de ese tipo y r(x,1)=(rx,r) tampoco es de ese tipo si $r\neq 1$.
- El origen, las lineas y los planos que pasan por el origen son subespacios vectoriales de $\mathbf{R}^3$. Las rectas y planos que no pasan por el origen **no** son subespacios.
- Los vectores (x,y,z) tales que x+2y+3z=0 forman un subespacio de $\mathbf{R}^3$ ya que $0\text{-}2\cdot 0+3\cdot 0=0$, y si x+2y+3z=0 y x'+2y'+3z'=0 entonces (x+x')-2(y+y')+3(z+z')=0 y (rx)+2(ry)+3(rz)=0. Los vectores (x,y,z) tales que x+2y+3z=4 **no** forman un subespacio (¿por que no?) }

- Los polinomios de grado 5 **no** forman un subespacio del espacio de polinomios (la suma puede tener grado menor que 5). Los polinomios de grado menor o igual a 5 si forman un subespacio.
- Las funciones continuas forman un subespacio del espacio de todas las funciones de **R** en **R**: la función constante 0 es continua, la suma de funciones continuas es continua y los múltiplos de una función continua son funciones continuas. Las funciones crecientes no forman un subespacio (que falla?).

Problemas.

14. Encuentra otros ejemplos de espacios vectoriales sobre **R**.

15. ¿Cuales de los siguientes subconjuntos de $\mathbf{R}^2$ son subespacios vectoriales de $\mathbf{R}^2$?

a. $\{(x,y) \,/\, x+2y=0\}$ b. $\{(x,y) \,/\, xy=0\}$ c. $\{(x,y) \,/\, x^2=y^3\}$

16. ¿Cuales de los siguientes subconjuntos de $\mathbf{R}^3$ son subespacios vectoriales de $\mathbf{R}^3$?

a. $\{(x,y,z) \,/\, x-y=z\}$ b. $\{(x,y,z) \,/\, x-y=z-1\}$

17. Demuestra que la intersección de 2 subespacios vectoriales de un espacio E es un subespacio vectorial de E.

18. Encuentra 2 subespacios de cada uno de los siguientes espacios vectoriales:

a. $\{(x,y,z) \,/\, x+y+z=0\}$
b. El espacio de polinomios de grado 2.
b. El espacio de ecuaciones lineales.
c. El espacio de funciones reales.

Si $V_1,V_2,...V_n$ son vectores de un espacio vectorial E, sus **combinaciones lineales** son los vectores de la forma $r_1V_1+r_2V_2+...+r_nV_n$, con $r_1,r_2,...r_n$ en **R**.

Lema. En un espacio vectorial E, las combinaciones lineales de cualquier conjunto de vectores $V_1,V_2,...V_n$ forman un subespacio vectorial (el **subespacio generado** por $V_1,V_2,...V_n$)

Demostración. Hay que checar 3 condiciones del lema anterior:

1. 0 es una combinación lineal de $V_1,V_2,...V_n$:

$$0 = 0V_1+0V_2+...+0V_n.$$

2. La suma de dos combinaciones lineales de $V_1,V_2,...V_n$ es una combinación lineal de $V_1,V_2,...V_n$:

$$(r_1V_1+r_2V_2+...+r_nV_n) + (s_1V_1+s_2V_2+...+s_nV_n) = (r_1+s_1)V_1+(r_2+s_2)V_2+...+(r_1+s_n)V_n$$

3. Cada múltiplo escalar de una combinación lineal de $V_1,V_2,...V_n$ es una combinación lineal de $V_1,V_2,...V_n$:

$$k(r_1V_1+r_2V_2+...+r_nV_n) = kr_1V_1+ kr_2V_2+...+kr_nV_n \quad ◙$$

Ejemplos.

- El subespacio mas pequeño de que contiene a los vectores (1,2,3) y (4,5,6) es el conjunto formado por sus combinaciones lineales, que es $\{(a+4b,2a+5b,3a+6b) \,/\, a,b\in\mathbf{R}\}$.

- El conjunto $S=\{(x,y,z) / x+2y+3z=0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$, así que S debe ser el $\{(0,0,0)\}$, o una linea por (0,0,0), o un plano por (0,0,0), o todo $\mathbf{R}^3$. Para averiguarlo observemos que hay vectores con distintas direcciones que están en S (por ejemplo (2,-1,0) y (3,0,-1) y también hay vectores que no están en S, como (1,1,1). Así que S contiene a un plano pero no puede ser todo $\mathbf{R}^3$, por lo tanto S es el plano generado por (2,-1,0) y (3,0,-1).
- Las funciones lineales $f(x)=ax+b$ forman un subespacio del espacio de todas las funciones de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$. Este subespacio está generado por las funciones $i(x)=x$ y $c(x)=1$.

Decimos que los vectores $V_1,V_2,...V_n$ son **linealmente dependientes** si existe una combinación lineal no trivial de ellos que da el vector 0, es decir si existen escalares $r_1,r_2,...r_n$ *no todos* 0, tales que $r_1V_1+r_2V_2+...+r_nV_n = \mathbf{0}$.

Decimos que los vectores $V_1,V_2,...V_n$ son **linealmente independientes** si la única combinación lineal de ellos que de el vector 0 es la combinación trivial, o en otras palabras,
si $r_1V_1+r_2V_2+...+r_nV_n = \mathbf{0}$ solamente cuando $r_1=r_2=...=r_n=0$.

Ejemplos.

- Los vectores U=(2,-4) y V=(-3,6) son linealmente dependientes, ya que 3U+2V=(0,0)
- Los vectores (1,1) y (1,-1) son linealmente independientes, ya que si r(1,1)+s(1,-1)=(0,0) entonces r+s=0 y r-s=0. Sumando queda 2r=0 (así que r=0) y restando queda 2s=0 (así que s=0)
- Los vectores U=(1,1), V=(-1,1) y W=(1,0) son linealmente dependientes, ya que U-V-2W=(0,0)
- Los polinomios $p(x)=2x^2-x+3$, $q(x)=3x^2+4x$ y $r(x)=11x-9$ son linealmente dependientes ya que $3p(x)-2q(x)+r(x)=0$

Lema. Los vectores $V_1,V_2,...,V_n$ son linealmente dependientes si y solo si alguno de ellos es combinación lineal de los otros.

Demostración. $\Rightarrow$ Si $V_1,V_2,...V_n$ son linealmente dependientes entonces existen escalares $r_1,r_2,...r_n$ *no todos* 0, tales que $r_1V_1+r_2V_2+...+r_nV_n = \mathbf{0}$. Si $r_i\neq 0$, entonces podemos despejar V_i en términos de los otros V_j's:
$V_i= r_1/r_iV_1+r_2/r_iV_2+...+r_{i-1}/r_iV_{i-1}+r_{i+1}/r_iV_{i+1}+...+r_n/r_iV_n$, así que V_i es combinación lineal de los otros V_j's.

$\Leftarrow$ Si V_i es combinación lineal de los otros V_j's, $V_i = s_1V_1+s_2V_2+...+s_{i-1}V_{i1}+s_{i+1}V_{i+1}+ ...+s_nV_n$ entonces $s_1V_1+s_2V_2+...+s_{i-1}V_{i-1}+(-1)V_i+s_{i+1}V_{i+1}+ ...+s_nV_n =\mathbf{0}$ y no todos los escalares son 0. ◙

Ejemplos.

- Los vectores (1,0,0), (1,1,0) y (0,1,1) son linealmente independientes ya que (0,1,1) no es combinación lineal de (1,0,0) y (1,1,0).
- 2 vectores en el plano son linealmente dependientes si son colineales y son linealmente independientes si no son colineales. 3 vectores en el plano siempre son linealmente dependientes.
3 vectores en el espacio son linealmente dependientes si y solo si son coplanares.
4 vectores en el espacio siempre son linealmente dependientes.

Problemas.

19. Muestra que no es posible generar a $\mathbf{R}^3$ con 3 vectores cuya ultima coordenada sea 0, pero si es posible generarlo con 3 vectores cuya ultima coordenada es 1.

20. Da una combinación lineal *no trivial* de los vectores (1,1,1), (1,2,3), (2,3,1) y (3,1,2) que de el vector (0,0,0) (piensen antes de usar la fuerza bruta)

21. a. ¿Los vectores (1,1,2), (1,2,3) y (2,1,3) son linealmente independientes?
 b. ¿Y los vectores (1,1,2), (1,2,1) y (2,1,1)?

22. Da 3 polinomios de grado 2 que sean linealmente independientes.

Decimos que un conjunto de vectores $V_1,V_2,...V_n$ forman una **base** del espacio vectorial E si generan a E y son linealmente independientes.

Lema. Si $V_1,V_2,...V_n$ forman una base de E entonces existe una única manera de expresar a cada vector en E como combinación lineal de los V_i's:.

Demostración. Si algún vector U se pudiera expresar de dos maneras distintas, digamos $U= a_1V_1+a_2V_2+...+a_nV_n$ y $U= b_1V_1+b_2V_2+...+b_nV_n$ donde algunos $a_k \neq b_k$, entonces $(a_1-b_1)V_1+(a_2-b_2)V_2+...+(a_n-b_n)V_n =\mathbf{0}$ donde algunos escalares a_k-b_k son distintos a 0, lo que diria que $V_1,V_2,...V_n$ f son linealmente dependientes. ◙

Ejemplos.

- Una base de $\mathbf{R}^n$ esta formada por los vectores (1,0,0,...,0), (0,1,0,...,0), ... , (0,0,0,...,1) ya que los vectores generan a $\mathbf{R}^n$: $(x_1,x_2,..., x_n)=x_1(1,0,0,...,0)+x_2(0,1,0,...,0)+...+x_n(0,0,0,...,1)$ y la única combinación lineal de estos vectores que da (0,0,...,0) es cuando cada x_k es 0.

- Si U y V son 2 vectores linealmente independientes en un espacio E entonces U y V forman una base del subespacio $\{ rU+sV / r,s \in \mathbf{R} \}$.

- Una base del espacio de polinomios esta formada por los *monomios* $1,x,x^2,x^3...,x^n,...$

Lema. Si $V_1,V_2,...V_n$ son vectores linealmente independientes en un espacio E y el vector U no esta en el subespacio generado por $V_1,V_2,...V_n$ entonces $V_1,V_2,...V_n,U$ son linealmente independientes.

Demostración. Si $V_1,V_2,...V_n,U$ fueran linealmente dependientes, existiría una combinación lineal $r_1V_1+r_2V_2+...+r_nV_n+rU = \mathbf{0}$ donde no todos los escalares son 0. Pero r no puede ser 0 ya que podríamos despejar a U como combinación lineal de los V_i's. Y si r=0 entonces la combinación lineal anterior es $r_1V_1+r_2V_2+...+r_nV_n= \mathbf{0}$, donde no todos los escalares son 0, así que los V_i's son linealmente dependientes. ◙

Corolario. En un espacio vectorial E, cada conjunto de vectores linealmente independientes está contenido en una base.

Demostración. Si $V_1,V_2,...V_n$ son linealmente independientes y no generan a todo E, entonces existe un vector V_{n+1} en E que no es combinación lineal de $V_1,V_2,...V_n$. Por el lema anterior $V_1,V_2,...,V_n,V_{n+1}$ son linealmente independientes. Si estos vectores no generan a E podemos hallar otro vector V_{n+2} de modo que $V_1,V_2,...,V_n,V_{n+1},V_{n+2}$ sean linealmente independientes. Mientras los vectores no generen podemos seguir añadiendo mas vectores independientes, y cuando ya no se puedan añadir mas vectores independientes deben generar al espacio. ◙

Teorema. En un espacio vectorial E generado por n vectores, cualesquiera n+1 vectores son linealmente dependientes.

Demostración. Por inducción sobre n. Si n=1 entonces E esta formado por los múltiplos escalares de un vector V, y cualesquiera dos o mas múltiplos escalares de V son linealmente dependientes.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para los espacios vectoriales generados por menos de n vectores y veamos que es cierto para los espacios generados por n vectores.

Si E esta generado por n vectores $V_1,V_2,...V_n$ y $U_1,U_2,...U_{n+1}$ son n+1 vectores en E, entonces cada U_j es combinación lineal de los V_i's:

$$U_1 = a_1V_1 + b_1V_2 + c_1V_3 + ... + s_1V_n$$

$$U_2 = a_2V_1 + b_2V_2 + c_2V_3 + ... + s_2V_n$$

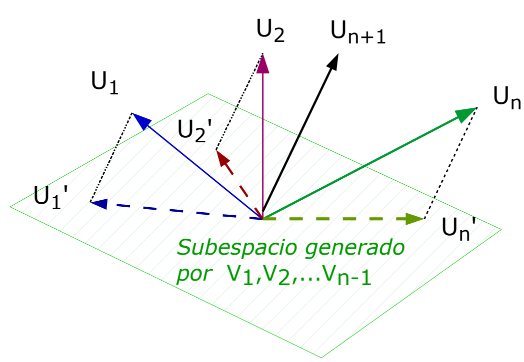
' ' ' ' ' ' ' ' '

$$U_n = a_nV_1 + b_nV_2 + c_nV_3 + ... + s_nV_n$$

$$U_{n+1} = a_{n+1}V_1 + b_{n+1}V_2 + c_{n+1}V_3 + ... + s_{n+1}V_n$$

Si todos los escalares $s_1, s_2,...s_{n+1}$ que aparecen con V_n son 0, entonces los vectores $U_1,U_2, ...U_{n+1}$ están en el espacio generado por los n-1 vectores $V_1, V_2, ..., V_{n-1}$ y por hipótesis de inducción $U_1, U_2, ...,U_{n+1}$ deben ser linealmente dependientes, y ya acabamos.

Si alguno de los escalares $s_1, s_2, ..., s_{n+1}$ es distinto de 0, digamos $s_1\neq 0$, entonces a cada vector U_k le podemos restar un múltiplo de U_1 para obtener otro vector U_k' que es combinación lineal de $V_1,V_2,...V_{n-1}$:



$$U_2' = U_2 - s_2/s_1\, U_1$$

' ' ' ' ' ' ' ' '

$$U_n' = U_n - s_n/s_1\, U_1$$

$$U_{n+1}' = U_n - s_{n+1}/s_1\, U_1$$

Cada U_k' es combinación lineal de $V_1,V_2,...V_{n-1}$ ya que U_1-s_1V_n es combinación lineal de $V_1,V_2,...V_{n-1}$ y

$$U_k' = a_kV_1+b_kV_2 +c_kV_3 +...+s_kV_n - s_k/s_1U_1 =$$

$$= a_kV_1+b_kV_2 +c_kV_3 +...+s_k/s_1(s_1V_n-U_1)$$

Como los vectores $U_2',U_3'....U_{n+1}'$ son n vectores en el espacio generados por n-1 vectores $V_1,V_2,...V_{n-1}$

entonces por hipótesis de inducción $U_2', U_3' \ldots U_{n+1}'$ son linealmente dependientes, es decir, hay una combinación lineal de ellos $\lambda_2 U_2' + \lambda_3 U_3' + \ldots + \lambda_{n+1} U_{n+1}' = 0$ para algunos $\lambda_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ no todos 0.

Como $U_k' = U_k - s_k/s_1 U_1$ entonces

$\lambda_2(U_2 - s_2/s_1 U_1) + \lambda_3(U_3 - s_3/s_1 U_1) + \ldots + \lambda_{n+1} U_{n+1}'(U_{n+1} - s_{n+1}/s_1 U_1) = 0$ o sea

$(-\lambda_2 s_2/s_1 - \lambda_3 s_3/s_1 - \ldots - \lambda_{n+1} s_{n+1}/s_1) U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 + \ldots + \lambda_{n+1} U_{n+1} = 0$ donde $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n+1}$ no son todos 0,

lo que muestra que $U_2, U_3, \ldots U_{n+1}$ son linealmente dependientes. Esto demuestra el paso de inducción. ◙

Ejemplos.

- Cualesquiera 5 vectores en $\mathbf{R}^4$ (por ejemplo (1,2,3,4), (7,6,5,4), (2,4,3,1), (1,4,1,7) y (6,1,5,3)) son linealmente dependientes (pero hallar una combinación lineal no trivial que de 0 es laborioso).
- El espacio de polinomios de grado menor o igual a 3 está generado por 4 polinomios $1, x, x^2, x^3$, asi que cualesquiera 4 polinomios de grado a lo mas 3 (por ejemplo $3x^3-2x^2+x-1$, x^3+2x^2+2x+4, $4x^3+7x^2-2x+3$ y $2x^3-5x^2+8x+7$) son linealmente dependientes

Corolario. En un espacio vectorial E generado por n vectores, cualesquiera n vectores linealmente independientes generan a E.

Demostración. Si hubieran n vectores independientes en E que no generaran a E entonces habría un vector U en E que no es combinación lineal de ellos, así que los n vectores junto con U serian n+1 vectores linealmente independientes en E, que esta generado por n vectores, contradiciendo el teorema anterior. ◙

Ejemplo. Completar el conjunto de vectores {(1,2,3), (1,1,1)} a una base de $\mathbf{R}^3$.

El vector (1,0,0) no es combinación lineal de (1,2,3), (1,1,1) ya que si lo fuera (1,0,0)=a(1,2,3)+b(1,1,1) pero entonces 2a+b=0 y 3a+b=0 y restando queda a=0, así que b=0. Pero entonces $a+b=0\neq 1$.

Por lo tanto (1,0,0), (1,2,3) y (1,1,1) son linealmente independientes y por el corolario anterior deben generar a $\mathbf{R}^3$.

Corolario. Todas las bases de un espacio vectorial E tienen el mismo número de elementos.

Demostración. Si E tuviera dos bases con n y m elementos y n<m, entonces E seria generado por n elementos y E contendría m>n m vectores linealmente independientes, contradiciendo el teorema. ◙

La **dimensión** de un espacio vectorial E es el número de elementos en cualquier base de E.

Ejemplos. La dimensión de $\mathbf{R}^n$ es n.

La dimensión del espacio de matrices de nxn es n^2.

La dimensión del espacio de polinomios de grado a lo mas n es n+1.

Corolario. La dimensión de E es igual a el mínimo número de vectores que generan a E y también al máximo número de vectores linealmente independientes que se pueden hallar en E.

Demostración. Sean d=dimensión de E= el número de elementos en una base de E. G= el mínimo número de generadores de E y i= el máximo número de vectores linealmente independientes en E.

Entonces $g \leq d$ (porque E se puede generar con e vectores) y $i \leq d$ (porque en E no puede haber mas de d vectores independientes). Así que $g \leq d \leq i$.

Pero g no puede ser menor que i ya que en un espacio generado por g vectores no puede haber mas de g vectores linealmente independientes. Por lo tanto $g = d = i$. ◙

Ejemplo. Cual es la dimensión del subespacio $S=\{(x,y,z) \,/\, x+2y+3z=0\}$ de $\mathbf{R}^3$?

Como S es subespacio de $\mathbf{R}^3$ su dimensión es a lo mas 3. Como hay vectores de $\mathbf{R}^3$ como (1,0,0) que no están en S, así que la dimensión de S debe ser menor que 3. Y como los vectores (1,1,-1) y (1,-2,1) están en S y son linealmente independientes, entonces S tiene dimensión al menos 2. Por lo tanto S tiene dimensión 2.

Problemas.

23. Encuentra una base para el espacio vectorial $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,/\, x+y=z\}$.

24. Encuentra una base para el subespacio $\{(a+b-c,a+2b+c,3a-b-c,a+3c) \,/\, a,b,c \in \mathbf{R}\}$ de $\mathbf{R}^4$.

25. a. ¿Que dimensión tiene el subespacio $\{(x,y,z,w) \,/\, x+y+z+w=0\}$ de $\mathbf{R}^4$?
    b. ¿Y el subespacio $\{(x,y,z,w) \,/\, y+z+w=0\}$?

26. Demuestra que cada subespacio vectorial de $\mathbf{R}^n$ que no sea todo $\mathbf{R}^n$ puede generarse con menos de n vectores.

27. ¿Cual es el mínimo numero de polinomios que se necesitan para generar al espacio de polinomios de grado menor o igual a 3? ¿Cuantos polinomios linealmente independientes de grado menor o igual 3 se pueden encontrar? No trabajen de mas.