Matrices.

Las *matrices* son arreglos rectangulares de números, como

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 9 & 4 & -1 & -7 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 & -4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Una **matriz de mxn** es una matriz con m renglones y n columnas. Escribimos $\mathbf{M}=(a_{ij})$ para decir que la matriz M tiene al numero a_{ij} en la entrada correspondiente al renglón i y la columna j.

Las matrices pueden representar muchas cosas, como transformaciones y sistemas de ecuaciones lineales.

Las funciones lineales de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$ se pueden representar como matrices de mxn. Por ejemplo, la transformación T(x,y,z)=(x+2y+3z,4x-5y+7z) está dada por la matriz

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 7 \end{vmatrix}$$

Los sistemas de m ecuaciones lineales con n incognitas también se pueden ver como matrices de mxn. Por ejemplo,

$$\begin{array}{l} 2x+3y-4z=5 \\ x-2y+6z=0 \\ 3x+4z=-1 \end{array} \quad \text{puede verse como la matriz} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 1 & -2 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

Las matrices pueden multiplicarse por escalares:

Si $\mathbf{M}=(a_{ij})$ y $r\in\mathbf{R}$ entonces $r\mathbf{M}=(ra_{ij})$

Ejemplo:

Si $M = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ entonces $2M = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & -4 \end{vmatrix}$

Y dos matrices del mismo tamaño también se pueden sumar:

Si $\mathbf{M}=(a_{ij})$ y $\mathbf{N}=(b_{ij})$ entonces $\mathbf{M+N}=(a_{ij}+b_{ij})$

Ejemplo.

Si $M = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ y $N = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ entonces $M+N = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Así que las matrices de mxn forman un espacio vectorial. Este espacio está generado por las matrices que tienen una entrada igual a 1 y las otras iguales a 0. Como hay mxn de estas matrices, su dimension es mxn.

Hay varias maneras de construir nuevas matrices a partir de una matriz dada. Una **submatriz** de la matriz M es una matriz que se obtiene suprimiendo algunas de las columnas y/o renglones de M.

Si M es la matriz

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 9 & 4 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

algunas submatrices de M son:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 9 & 4 & -7 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 9 & -1 & -7 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{vmatrix}$$

La **transpuesta** de una matriz **M** de mxn es la matriz $\mathbf{M}^{\mathbf{T}}$ de nxm que se obtiene cambiando renglones por columnas. Si $\mathbf{M}=(a_{ij})$, la transpuesta de M es $\mathbf{M}^{\mathbf{T}}=(a_{ji})$.

Ejemplo.

Si $M=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ su transpuesta es $M^T=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

Rango de una matriz.

Los renglones de una matriz M de mxn son vectores en $\mathbf{R}^n$. El **rango** de la matriz M es la dimensión del subespacio vectorial de en $\mathbf{R}^n$ generado por los m renglones de M, que es igual al máximo numero de renglones linealmente independientes de la matriz. Así que el rango **r** de una matriz de mxn cumple **r**≤m, **r**≤n.

Ejemplos.

matriz	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$
rango	1	1	2	1	2	2	3

Hay cambios que se le pueden hacer a una matriz que no afectan su rango.

Las **operaciones elementales** (por renglones) son:

1. Intercambiar dos renglones
2. Multiplicar un renglón por un numero
3. Sumar a un renglón otro renglón

Ejemplo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -3 & -6 & -9 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

La operaciones 2 y 3 se pueden combinar para obtener otra operación muy útil:

4. Sumarle a un renglón un múltiplo de otro renglón

Ejemplo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \overset{r_2-4r_1}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \overset{r_3-7r_1}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} \overset{r_3-2r_2}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Lema. Las operaciones elementales por renglones no cambian el rango de la matriz.

Demostración. Basta ver que las operaciones elementales no cambian el subespacio generado por los renglones (por lo tanto no cambian la dimensión, que es el numero de renglones linealmente independientes). Veamos:

1. Cambiar el orden de los generadores no cambia el subespacio.

2. Multiplicar un generador por un escalar distinto de 0 tampoco.

3. Reemplazar un generador U por su suma con otro generador V tampoco cambia el subespacios, ya que lo que generan U y V es el mismo que el que generan U+V y V.

4. Se obtiene aplicando 2 y luego 3 y luego 2, así que tampoco cambia es subespacio. □

Una **matriz escalonada** es una matriz donde las entradas distintas de 0 en cada renglón empiezan *después* de las entradas distintas de 0 del renglón anterior.

Ejemplos.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Lema. Toda matriz se puede convertir en una matriz escalonada usando operaciones elementales.

Demostración. Si un renglón tiene primera entrada distinta de 0 podemos ponerlo hasta arriba y podemos restar múltiplos de ese renglón a los siguientes renglones, para que todos ellos tengan primera entrada igual a 0. Si hay un renglón distinto del primero con segunda entrada distinta de 0 podemos ponerlo en el segundo lugar y restar múltiplos de ese renglón a los siguientes renglones para que todos ellos tengan segunda entrada igual a 0. Si hay un renglón distinto de los primeros dos con tercera entrada distinta de 0 podemos ponerlo en el tercer lugar y restar múltiplos de ese renglón a los siguientes renglones para que todos ellos tengan tercera entrada igual a 0, etc. □

Ejemplo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{r_2-4r_1}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 8 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{r_3-3r_1}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 8 \\ 0 & -9 & 8 \end{vmatrix} \overset{r_3-{}^9/_5r_2}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & -{}^{32}/_5 \end{vmatrix}$$

Lema. El rango de una matriz escalonada es el numero de renglones distintos de 0.

Demostración. Sean $V_1,V_2,\ldots,V_m$ los renglones de una matriz escalonada. Solo pueden ser linealmente independientes los que son distintos de 0, así que basta mostrar que los que son distintos de 0 son linealmente independientes. Supongamos que $a_1V_1+a_2V_2+\ldots+a_mV_m=0$

Como la matriz es escalonada, hay una coordenada que no es 0 para V_1 y si es 0 para todos los otros V_i's. Como esa coordenada en la combinación lineal debe ser 0, y solo aparece a_1, entonces $a_1=0$.

Hay una coordenada que no es 0 para V_2 y si es 0 para los V_i's con $i>2$. Como esa coordenada en la combinación lineal debe ser 0, y solo aparecen a_1 y a_2 , y $a_1=0$, entonces $a_2=0$.

En general, hay una coordenada que no es 0 para V_k y es 0 para los V_i's con $i>2k$. Como esa coordenada en la combinación lineal debe ser 0, y solo aparecen $a_1,a_2,\ldots,a_k$, y $a_1=a_2=\ldots=a_{k-1}=0$, entonces $a_k=0$. □

Así que podemos calcular el rango de cualquier matriz usando operaciones elementales para convertirla en una matriz escalonada.

Ejemplo. ¿Cual es el rango de esta matriz?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Hacemos operaciones de renglones para llevarla a una matriz escalonada:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \overset{r_2-4r_1}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \overset{r_3-7r_1}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} \overset{r_3-2r_2}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Como la matriz escalonada resultante tiene 2 renglones distintos de 0, el rango de la matriz es 2.

Los vectores (1,2,3) y (0,-3,-5) forman una base del subespacio generado por los renglones.

Problemas.

1. Escribe explícitamente las siguientes matrices de 4x3:

a. M=(aij) donde $a_{ij}=i+j$ a. M=(aij) donde $a_{ij}=ij$

2. Usa operaciones elementales para convertir las siguientes matrices en matrices escalonadas.

$\in$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

3. Halla el rango de estas matrices y da una base para el espacio generado por los renglones.

a. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ d. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

4. Demuestra que el rango de una matriz M es mayor o igual al rango de todas sus submatrices. Demuestra que el rango de M es igual al máximo de los rangos de sus submatrices cuadradas.

Matrices cuadradas y determinantes.

Las **matrices cuadradas** son las matrices de nxn (mismo numero de renglones y columnas). Las matrices cuadradas que solo tienen entradas distintas de 0 en la diagonal principal (es decir, las matrices (a_{ij}) donde $a_{ij}=0$ si $i\neq j$) se llaman **matrices diagonales**. Las matrices cuyas entradas debajo de la diagonal son 0 se llaman **matrices triangulares**.

A cada matriz cuadrada **M** le podemos asociar un numero real llamado el **determinante** de **M** , que guarda información algebraica y geométrica sobre la matriz.

Si $M=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ el determinante de M es $\text{Det } M = a_1b_2 - a_2b_1$

Ejemplo.

Si $M=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ $\text{Det } M = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2$

Lema. Sea M una matriz de 2x2

1. Si se multiplica un renglón de M por un escalar λ el determinante se multiplica por λ.
2. Si se intercambian los renglones de M el determinante cambia de signo,
3. Si se suma un renglón de M a otro renglón el determinante no cambia.

Demostración.

1. $\text{Det}\begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \lambda a_1b_2 - \lambda a_2b_1 = \lambda(a_1b_2-a_2b_1) = \lambda \text{ Det }\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$

2. $\text{Det}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = b_1a_2 - b_2a_1 = -(a_1b_2-a_2b_1) = -\text{Det}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$

3. $\text{Det}\begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = (a_1+b_1)b_2 - (a_2+b_2)b_1 = (a_1b_2-a_2b_1)+\cancel{b_1b_2}-\cancel{b_2b_1} = \text{Det}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$

Lema. El rango de una matriz M de 2x2 es 2 si y solo si Det M $\neq 0$.

Demostración. Cada matriz de 2x2 se puede convertir en una matriz escalonada usando operaciones elementales, que no cambian el rango de la matriz y no cambian el determinante salvo por el signo.

Así que basta probar el lema para matrices escalonadas, de la forma

$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ Det M $= a_1b_2$ así que Det M=0 si y solo si $a_1=0$ o $b_2=0$.

Pero si $a_2=0$ el segundo renglón es (0,0) y los renglones son linealmente dependientes,

y si $a_1=0$ los renglones son $(0,b_1)$ y $(0,b_2)$ que son linealmente dependientes. □

Matrices de 3x3.

Si $M=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ el determinante es Det M $= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$

Ejemplo.

Si $M=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$ Det M $= 0\cdot4\cdot8 + 1\cdot5\cdot6 + 2\cdot3\cdot7 - 2\cdot4\cdot6 - 1\cdot3\cdot8 - 0\cdot5\cdot7 = 0$

El determinante de una matriz de 3x3 se puede calcular usando los determinantes de submatrices de 2x2:

$$\text{Det } M = a_1 \text{ Det}\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \text{ Det}\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \text{ Det}\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Lema. Sea M una matriz de 3x3.

1. Si se multiplica un renglón de M por un escalar λ el determinante se multiplica por λ.
2. Si se intercambian los renglones de M el determinante cambia de signo,
3. Si se suma un renglón de M a otro renglón el determinante no cambia.

Demostración. Basta calcular los determinantes de las matrices modificadas,

Lema. El rango de una matriz M de 3x3 es 3 si y solo si Det M ≠ 0.

Demostración. El rango de la matriz M es menor que 3 si y solo si los renglones (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_1,b_3) y (ac_1,c_2,c_3) son linealmente dependientes.

Cada matriz de 3x3 se puede convertir en una matriz escalonada usando operaciones elementales, que no cambian el rango de la matriz y no cambian el determinante salvo por el signo.

Así que basta probar el lema para matrices escalonadas.

Si $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$ Det $M = a_1b_2c_3$ así que Det M=0 si y solo si $a_1=0$ o $b_2=0$ o $c_3=0$.

Si $c_3=0$ el tercer renglón es (0,0,0) y los 3 renglones son linealmente dependientes, si $b_2=0$ los últimos 2 renglones son $(0,0,b_3)$ y $(0,0,c_3)$ que son linealmente dependientes, y si $a_1=0$ entonces $b_2=0$ ya que la matriz es escalonada y los últimos dos renglones son $(0,0,b_3)$ y $(0,0,c_3)$ que son linealmente dependientes.

□

Matrices de nxn.

Para calcular el determinante de una matriz M de nxn tomamos todos los productos posibles de n entradas de M que aparecen en distintos renglones y distintas columnas, a la mitad de ellos les cambiamos el signo y los sumamos todos.

Cada producto viene de una elección de una permutación de los números 1,2,3,...,n, que dice en que columna elegimos la entrada de cada renglón. El signo del producto se elige de acuerdo a la *paridad* de la permutación

Una permutación de los números 1,2,3...,n es un reordenamiento de esos números Al conjunto de permutaciones 1,2,3,...,n se le denota por S_n.

Ejemplo. Una permutación de 1,2,3,4,5 es 2,3,5,1,4 Otra manera de escribir esto es decir que σ es la permutación tal que σ1=2, σ2=3, σ3=5, σ4=1, σ5=4. En la permutación 2,3,5,1,4 algunos pares de números no aparecen en el orden usual, por ejemplo, el 5 aparece antes del 1. Decimos que el 5 y el 1 están invertidos. También el 2 y el 1 están invertidos, y también el 3 y el 1 y el 5 y el 4 están invertidos. Todos los otros pares de números están en el orden usual, asi que esta permutación tiene 4 inversiones.

Diremos que una permutación σ de 1,2,3,...,n es **par** si σ tiene un numero par de inversiones, y que es **impar** si σ tiene un numero impar de inversiones.

Ejemplo. La permutación 2,3,5,1,4 es par. La permutación 3,2,5,1,4 es impar.

Lema. Si una permutación σ' se obtiene de otra permutación σ intercambiando dos números, entonces σ y σ' tienen distinta paridad.

Demostración. Al intercambiar dos números i y j se forma o se quita la inversión entre ellos. Las inversiones entre pares de números k y l distintos de i y j no cambian. Falta ver que pasa con las inversiones entre un numero k y i y entre ese numero k y j. Si k no esta entre i y j estas inversiones no cambian. Si k esta entre i y j entonces al intercambiar i y j se forman o se quitan la inversión de k con i y también la inversión de k con j. Así que el numero total de inversiones cambia por un numero impar. □

Corolario. La paridad de una permutación σ esta dada por el numero de intercambios que hay que hacer para llegar de σ a la identidad.

Ejemplo. ¿Cual es la paridad de la permutación 3,1,2,5,4?
3,1,5,2,4 → 1,3,5,2,4 → 1,2,5,3,4 → 1,2,3,5,4 → 1,2,3,4,5 son 4 intercambios, la permutación es impar.

El **determinante** de una matriz cuadrada de nxn se define así:

$$\text{Si } M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \text{entonces} \qquad \text{Det } M = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma 1} a_{2\sigma 2} \ldots a_{n\sigma n}$$

donde ε(σ) es el signo de la permutación σ: + si σ es par y - si σ es impar.

Lema. El determinante de una matriz M tiene las siguientes propiedades.

1. Si se intercambian dos renglones de M el determinante cambia de signo.
2. Si se multiplica un renglón de M por un escalar r, el determinante se multiplica por r.
3. Si R es un renglón de la matriz M, y $R=R_1+R_2$, y si M_1 y M_2 son las matrices que se obtienen de reemplazar el renglón R por R_1 y por R_2, entonces Det M = Det M_1 + Det M_2.

Demostración.

1. Al intercambiar dos renglones los productos que aparecen en el determinante son los mismos, pero la paridad de cada permutación cambia, así que el signo de cada producto cambia.

2. Al multiplicar un renglón por un escalar r, uno de los factores en cada producto se multiplica por r, asi que la suma se multiplica por r.

3. Cada producto en el determinante de M tiene un factor en el renglón R, y este es la suma de un factor en el renglón R_1 y otro en el renglón R_2. Así que cada producto en el determinante de M es la suma de uno en el determinante de M_1 y otro en el determinante de M_2. □

Ejemplos.

$$\text{Det} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -\text{Det} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{Det} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\,\text{Det} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Det} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \text{Det} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \text{Det} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Corolario. El determinante también tiene estas propiedades:

4. Si una matriz tiene 2 renglones iguales, su determinante es 0.
5. Si a un renglón de M le sumamos un múltiplo de otro renglón, el determinante no cambia.
6. Si los renglones de M son linealmente dependientes, el determinante de M es 0.

Demostración. 4. Por la propiedad 1, al intercambiar dos renglones el signo del determinante cambia, pero por otro lado, al intercambiar dos renglones iguales la matriz no cambia, asi que el determinante no puede cambiar. La única manera de que el signo cambie y no cambie es que sea 0.

5. Por la propiedad 3 si a un renglón de la matriz M le sumamos otro renglón el determinante de la matriz resultante es la suma de los determinantes de la matriz M y de otra matriz que tiene dos renglones iguales, pero por la propiedad 4 esta última matriz tiene determinante 0. Lo del múltiplo es tarea.

6. Si los renglones son dependientes, podemos restarle a uno una combinación lineal de los otros para que se haga 0, así el determinante es 0, y por la propiedad 5 esta operación no cambia el determinante. □

Problemas.

5. Muestra que toda matriz se puede escalonar sin que cambie el determinante, excepto por el signo.

6. Calcula los determinantes de estas matrices. Hint: usa operaciones elementales.

a. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ d. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ e. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

7. Calcula los determinantes de estas matrices *sin escribir nada*.

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ d. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ e. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

8. Calcular los determinantes de estas matrices usando las propiedades 1-6 (no lo hagan a pata!).

a. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}$

Teorema. El rango de una matriz M de nxn es n si y solo si Det M≠0.

Demostración. El rango de M es menor que n si y solo si sus renglones son linealmente dependientes.

Así que si el rango es menor que n la propiedad 6 implica que Det M=0.

Falta ver que Det M=0 Implica que los renglones de M son linealmente dependientes.

Podemos hacer operaciones elementales para llevar la matriz M a una matriz escalonada M'. Por las propiedades 1,2 y 5 de los determinantes, cada operación elemental solo puede cambiar el determinante multiplicándolo por -1 o por un numero real r distinto de 0.

Pero como M' es una matriz cuadrada escalonada, M' es una matriz triangular, asi que el determinante de M' es el producto de las entradas en la diagonal principal de M'. Por lo tanto Det M'=0 implica que una entrada en la diagonal de M' es 0, y como M' es escalonada todas las entradas en la diagonal abajo de esa son 0, asi que el ultimo renglón es 0, lo que dice que el rango de M', que es igual al rango de M, es menor que n. □

Corolario. El rango de una matriz M de mxn es r si y solo si el determinante de alguna submatriz de M de rxr es distinto de 0, y el determinante de todas las submatrices de (r+1)x(r+1) es 0.

Problemas.

9. ¿Que relación hay entre el determinante de una matriz de nxn y el determinante de su transpuesta? Hint: ¿Que pasa para n=2 y para n=3?

10. Demuestra que si los renglones de una matriz cuadrada son linealmente independientes, entonces las columnas de la matriz son linealmente independientes. Hint: problema anterior.

11. Si definiéramos el determinante de una matriz M como las suma de todos los productos de entradas en distintos renglones y columnas de M, sin considerar los signos de las permutaciones ¿Cuales de las 6 propiedades del determinante descritas anteriormente se cumplirían y cuales no?