Lógica deductiva

Una **proposición** es una oración que afirma o niega algo, y que solo puede ser verdadera o falsa (aunque no sepamos).

Ejemplos de proposiciones:

A : *Los murciélagos son aves*

B : *El sol brilla*

C : *No hay vida extraterrestre*

D : *3 > 5*

E : *Los triángulos tienen 3 lados*

Dos proposiciones son **equivalentes** si significan lo mismo.

Ejemplos:

10 es múltiplo de 5 es equivalente a *5 es divisor de 10*

A es el hija de B es equivalente a *B es el padre o la madre de A*

Las proposiciones pueden combinarse de distintas maneras para obtener otras proposiciones:

La **negación** de una proposición P es la proposición que dice que P es falsa, se le denota por ¬P y se dice "no P".

B : *El sol brilla*	¬B : *El sol no brilla*
C : *No hay vida extraterrestre*	¬C : *Hay vida extraterrestre*
D : *3 > 5*	¬D : *3 ≤ 5*

Observar que ¬P es verdadera cuando P es falsa y ¬P es falsa cuando P es verdadera.

La negación de P consiste de todas las alternativas posibles a P, así que la negación de la negación de P es P:

E : *Los triángulos tienen 3 lados*

¬*E : Los triángulos no tienen 3 lados*

¬¬E : *Los triángulos sí tienen 3 lados* (que equivale a E)

La **conjunción** de dos proposiciones P y Q es la proposición que dice que *ambas* son verdaderas, se le denota por $P \wedge Q$ y se dice "P y Q".

Ejemplos:

$A \wedge B$: *Los murciélagos son aves y el sol brilla*

Si $F : x \leq y$, $G : x \geq y$ entonces $F \wedge G : x = y$

La **disyunción** de dos proposiciones P y Q es la proposición que dice que *al menos una* de ellas es verdadera, se le denota por $P \vee Q$ y se dice "P o Q".

Ejemplos:

$A \vee B$: *Los murciélagos son aves o el sol brilla*

Si $H : x < y$ $I : x > y$ *entonces* $H \vee I : x \neq y$

La "o" en $P \vee Q$ es *inclusiva*, es cierta si una o ambas proposiciones sean ciertas.

Ejemplo. Si J : *6 es múltiplo de 2* y K : *6 es múltiplo de 3*

$J \vee K$: *6 es múltiplo de 2 o de 3* (verdadera)

¿Como será la negación de una conjunción? $P \wedge Q$ dice dice que las dos son ciertas.

Negar $P \wedge Q$ equivale a decir que al menos una de las dos es falsa, es decir

$$\boxed{\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q}$$

Ejemplo:

$A \wedge B$: *Los murciélagos son aves **y** el sol brilla*

$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$: *Los murciélagos no son aves **o** el sol no brilla*

¿Como será la negación de una disyunción? $P \vee Q$ dice que al menos una de las dos es cierta.

Negar $P \vee Q$ equivale a decir que ninguna de las dos es cierta, es decir que ambas son falsas

$$\boxed{\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q}$$

Ejemplo:

$A \vee B$: *Los murciélagos son aves **o** el sol brilla*

$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$: *Los murciélagos no son aves **y** el sol no brilla*

La **condicional** $P \rightarrow Q$ es la proposición que dice que si P es cierta entonces Q también es cierta, se lee "si P entonces Q".

Ejemplos:

L : *n es múltiplo de 4* M : *n es par*

$L \rightarrow M$: *Si n es múltiplo de 4 entonces n es par* (verdadera)

$M \rightarrow L$: *Si n es par entonces n es múltiplo de 4* (falsa)

Observar que $P \rightarrow Q$ no dice que P o Q sean verdaderas, únicamente dice que si P es verdadera entonces Q también lo es. $P \rightarrow Q$ es falsa únicamente cuando P es verdadera y Q es falsa, así que $P \rightarrow Q$ *es equivalente* a $\neg P \vee Q$.

$$\boxed{P \rightarrow Q = \neg P \vee Q}$$

Así que negar $P \rightarrow Q$ equivale a decir que P es verdadera y Q no lo es.

$$\boxed{\neg(P \rightarrow Q) = P \wedge \neg Q}$$

Ejemplo:

$M \rightarrow L$: *Si n es par entonces n es múltiplo de 4*

$\neg(M \rightarrow L) = M \wedge \neg L$: *n es par y n no es múltiplo de 4*

$$\text{Como} \quad \begin{array}{ccc} P \rightarrow Q & = & \neg P \vee Q \\ & & \| \\ \neg Q \rightarrow \neg P & = & Q \vee \neg P \end{array}$$

$$\text{entonces} \quad \boxed{P \rightarrow Q \quad = \quad \neg Q \rightarrow \neg P}$$

Ejemplo. Las tres proposiciones siguientes son equivalentes:

$L \rightarrow M$: *Si n es múltiplo de 4 entonces n es par*
$\|$
$\neg L \vee M$: *n no es múltiplo de 4 o n es par*
$\|$
$\neg M \rightarrow \neg L$: *Si n no es par entonces n no es múltiplo de 4*

Los conectores lógicos $\neg$ $\wedge$ $\vee$ $\rightarrow$ pueden combinarse de muchas maneras para obtener proposiciones mas complejas.

Por ejemplo, la **doble condicional** $P \leftrightarrow Q$ es la afirmación que dice que si P es cierta entonces Q es cierta y que si Q es cierta entonces P es cierta. Se le denota por $P \leftrightarrow Q$ y se lee "P si y solo si Q".

Así que $P \leftrightarrow Q = (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

Ejemplos:

$V \leftrightarrow S$: *Hoy es viernes si y solo si mañana es sábado*

$L \leftrightarrow A$: *Los lados de un triángulo son iguales si y solo si los ángulos del triángulo son iguales*

Ejercicios.

1. Escribe las siguientes proposiciones como combinaciones de proposiciones mas simples (entre mas simples mejor) usando los conectores lógicos $\neg \wedge \vee \to$.

A : *Si hoy es martes mañana es miércoles*

B : *Las motos son rápidas pero peligrosas*

D : *Para x>0 y y>0 se cumple que* $\sqrt{x+y} < \sqrt{x}+\sqrt{y}$

E : *n es divisible entre 12 si es divisible entre 4 y entre 6*

2. Escribe las negaciones de las siguientes proposiciones:

F : *Los insectos tienen 6 patas o tienen 8 patas*

G : Los reptiles no vuelan ni nadan

H : *Cuando nieva hace frio*

I : n es divisible entre 5 y no es divisible entre 7

J : *Si* $a<b$ *entonces* $a^2 < b^2$

3. Escribe proposiciones equivalentes sin usar condicionales:

K : *Si un polígono no tiene 3 lados entonces no es un triángulo*

L : *Si* $x>1$ *entonces* $x^2>x$

4. Usa los conectores $\neg \wedge \vee$ para construir un o *exclusivo*, es decir, una combinación de dos proposiciones P, Q que sea cierta cuando una sea cierta pero no cuando ambas sean ciertas.

5. Escribe proposiciones equivalentes a las siguientes usando únicamente la conjunción, la disyunción y la negación (sin usar condicionales)

a. $\neg P \to Q$ b. $\neg(P \to Q)$ c. $P \Leftrightarrow Q$ d. $(P \to Q) \to R$

Tablas de verdad

La verdad o falsedad de las proposiciones que se obtienen a partir de otras por medio de los conectores $\neg$ $\wedge$ $\vee$ $\longrightarrow$ solo depende de la verdad o falsedad de las proposiciones originales y no de lo que estas digan. Podemos resumir esto por medio de las tablas de verdad, que expresan la veracidad o falsedad de la combinación en términos de la veracidad o falsedad de las partes:

P	¬P
V	F
F	V

P	Q	P∧Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	Q	P∨Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

P	Q	P→Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Hay muchas maneras de combinar proposiciones por medio de conectivos lógicos, pero distintas combinaciones pueden ser equivalentes: esto pasa si y solo si sus tablas de verdad son iguales.

Por ejemplo, como las tablas de verdad de $P \longrightarrow Q$, $\neg P \vee Q$ y $\neg Q \longrightarrow \neg$ son iguales, las tres proposiciones son equivalentes.

P	Q	P ⟶ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	¬P∨Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	¬Q ⟶ ¬P
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejercicios.

6. Usando los conectores $\neg$ $\wedge$ $\vee$ construye combinaciones de P y Q cuyas tablas de verdad sean

a.

P	Q	
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

b.

P	Q	
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

c.

P	Q	
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	V

7. ¿Cuantas proposiciones *no equivalentes* podrán construirse combinando 2 proposiciones? ¿Y combinando 3 proposiciones?

Significados y cuantificadores.

El lenguaje cotidiano puede ser ambiguo, pero al considerar una proposición su significado debe quedar totalmente claro.

> *Todos los perros no ladran* no es nada claro: podría interpretarse de distintas maneras como *No todas los perros ladran* o como *Ningún perro ladra*.
>
> *Ningún perro no ladra* es aun mas confusa.
>
> *Los perros tienen 4 patas* puede querer decir que como especie los perros tienen 4 patas (lo que es cierto) o que cada perro individualmente tiene 4 patas (lo que es falso), así que hay que aclarar a que nos referimos.
>
> *Algunos números no tienen raíz cuadrada* es ambiguo porque no dice a que clase de números se refiere y la verdad o falsedad de la afirmación depende de eso, hay que especificarlo.

En lógica y en matemáticas las palabras tienen significados muy precisos, que pueden diferir del que se les da en el lenguaje común. Al afirmar algo estamos diciendo que es cierto *siempre*, *sin excepciones*, a menos que lo aclaremos explícitamente.

Al decir *Las aves vuelan* queremos decir que *todas las aves vuelan* sin excepciones.

Al decir *Los mamíferos no vuelan* queremos decir que *ningún mamífero vuela* sin excepción.

Para escribir con precisión usamos los siguientes **cuantificadores**

Cuantificador	*Significado*	*Notación formal*	
todos	*se cumple siempre, sin excepciones*	$\forall$	para todo
algunos	*se cumpla al menos una vez (quizá siempre)*	$\exists$	existe
ningún	*no se cumple nunca*	$\nexists$	no existe

Ejemplos:

Todos los gnomos son verdes = *Cada gnomo es verde* = *No existen gnomos que no sean verdes*

Al afirmar que *todos los gnomos son verdes* **no** afirmamos que los gnomos existan, solo que de existir deben ser verdes.

Algunos gnomos son verdes = *Existen gnomos verdes* = *Hay al menos un gnomo verde*

Al afirmar que *algunos gnomos son verdes* **no** afirmamos que *otros gnomos no sean verdes!*

Ningún gnomo es verde = *No existen gnomos verdes*

No dice si existen o no existen los gnomos, sólo afirma que no hay ningúno verde.

No todos los gnomos son verdes = *Existen gnomos que no son verdes*

Al entender el significado exacto de los cuantificadores *todos*, *algunos* y *ninguno*, las negaciones de proposiciones que los contienen se aclaran:

A : *Todas las aves vuelan*	¬A : *Algunas aves no vuelan*
B : *Ningún mamífero vuela*	¬B : *Algunos mamíferos vuelan*
C : *Algunas estrellas brillan*	¬C : *Ninguna estrella brilla*
D : *Algunas estrellas no brillan*	¬D : *Todas las estrellas brillan*
E: *Cada círculo tiene centro*	¬E : *Existe un círculo que no tiene centro*

Algunas veces los cuantificadores no se escriben sino que se sobreentienden

Las bisectrices de un triángulo son concurrentes significa que las bisectrices de *cada* triángulo son concurrentes (no significa que las bisecrices de un triángulo en particular sean concurrentes)

Dos rectas distintas se intersectan en 1 punto significa que *cada* par de rectas distintas se intersectan en 1 punto (no significa que existan 2 rectas distintas que se intersectan en 1 punto)

Lo anterior es fácil de adivinar si recordamos que las afirmaciones en matemáticas deben entenderse con la mayor generalidad posible.

Ejercicio.

8. Escribe las negaciones de las siguientes proposiciones *sin empezar con no.*

A : *Todos los hombres son mortales*

B : *Ninguna araña tiene 6 patas*

C : *Algunos metales conducen la electricidad*

D : *Algunas plantas no tienen raíces*

E : *Cada rombo tiene 4 lados iguales*

F : *Los números reales son racionales*

G : *Algunos números primos no son impares*

H: *Todo número real es el cuadrado de un número complejo*

I: *Por ningún punto del plano pasan dos paralelas a una recta*

Argumentos lógicos

Al combinar proposiciones por medio de $\neg \wedge \vee \rightarrow$ es posible obtener proposiciones que siempre son verdaderas, o que siempre son falsas, independientemente de si las proposiciones iniciales eran verdaderas o falsas. Por ejemplo:

$P \vee \neg P$ siempre es verdadera, independientemente de P

$P \wedge \neg P$ siempre es falsa, independientemente de P

Las combinaciones de proposiciones que siempre son verdaderas se llaman **tautologías** y son importantes porque son la base de los razonamientos lógicos.

Ejemplos de tautologías:

$P \wedge Q \rightarrow P$ $\qquad$ $P \rightarrow P \vee Q$ $\qquad$ $(P \vee Q) \wedge \neg P \rightarrow Q$ $\qquad$ $P \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$

$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P$ $\qquad$ $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$

Las combinaciones de proposiciones que siempre son falsas se llaman **contradicciones**.

Ejercicio.

9. ¿Cuales de las siguientes proposiciones son tautologías, contradicciones o ninguna de las dos?

a. $(P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q)$ $\qquad$ b. $(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)$

b. $P \rightarrow \neg P$ $\qquad$ c. $(P \rightarrow \neg P) \wedge P$

d. $(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow \neg Q)$ $\qquad$ e. $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q)$

f. $(P \rightarrow Q) \vee (\neg P \rightarrow Q)$ $\qquad$ g. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

Un **argumento lógico** es un razonamiento que a partir de proposiciones verdaderas *siempre* obtiene conclusiones verdaderas sin importar que digan las proposiciones.

Los argumentos lógicos mas sencillos usan las condicionales que son tautologías (las que son siempre ciertas) llamadas **implicaciones** y denotadas por $\Rightarrow$.

Ejemplos de argumentos lógicos usando implicaciones:

$(P \wedge Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$

Hoy es sábado o domingo y *Hoy no es sábado* implican *Hoy es domingo*

$(P \rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$

Si cae nieve hace frio y *Cae nieve* implican *Hace frio*

Hay argumentos que *parecen* lógicos pero no lo son, estos son llamados **falacias**. (del latín *fallatia = engaño*). Algunas falacias comunes vienen de usar condicionales que no son tautologías.

Ejemplos de argumentos lógicos y argumentos inválidos (falacias):

$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$ *es un argumento lógico*

Si cae nieve hace frio   y   *No hace frio*   implican   *No cae nieve*

$(P \rightarrow Q) \wedge \neg P \cancel{\Rightarrow} \neg Q$ *es una falacia*

Si cae nieve hace frio   y   *No cae nieve*   **no** implican   *No hace frio*

$(P \rightarrow Q) \wedge Q \cancel{\Rightarrow} P$ *es una falacia*

Si cae nieve hace frio   y   *Hace frio*   **no** implican   *Cae nieve*

$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow R)$ *es un argumento lógico*

Si cae nieve hace frio   y   *Si hace frio me resfrío*   implican   *Si cae nieve me resfrío*

Ejercicios.

10. ¿Que conclusiones lógicas puedes obtener basándote *únicamente* en lo que se dice?

a. (*Si p divide a* n^2 *entonces p divide a n*)   y   (*p divide a n*)

b. (*Si p divide a* n^2 *entonces p divide a n*)   y   (*p no divide a n*)

c. (*Si p divide a* n^2 *entonces p divide a n*)   y   (*p no divide a* n^2)

11. ¿Que conclusiones lógicas puedes obtener?

a. $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \neg P) \Rightarrow$

b. $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow \neg Q) \Rightarrow$

c. $(P \rightarrow R) \wedge (\neg S \rightarrow \neg R) \Rightarrow$

Hay otro tipo de argumentos lógicos que se obtienen combinando de maneras mas sutiles las proposiciones con cuantificadores.

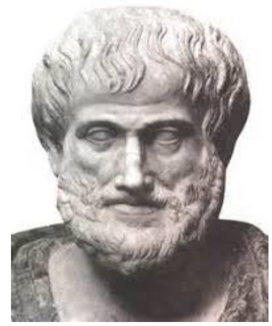
Ejemplos:

a. *Todos los pericos son aves* y *Todas las aves vuelan* $\Rightarrow$ *Todos los pericos vuelan*

b. *Ninguna iguana vuela* y *Todas las aves vuelan* $\Rightarrow$ *Ninguna iguana es ave*

c. *Algunos pájaros son aves* y *Todas las aves vuelan* $\Rightarrow$ *Algunos pájaros vuelan*

Los argumentos de este tipo son muy generales y muy útiles, fueron estudiados por primera vez por Aristoteles en el siglo 4AC. Hay que tener cuidado porque hay muchas combinaciones posibles, algunos son argumentos validos y son llamados **silogismos** y otros son invalidos (son falacias).



Recordar que para que un argumento sea válido no basta con que la conclusión sea verdadera.

Ejemplos:

d. *Todos los pericos son aves* y *Algunas aves vuelan* $\not\Rightarrow$ *Algunos pericos vuelan*

Es verdad que algunos pericos vuelan, pero eso no es una consecuencia lógica de lo anterior. Para ver que el argumento anterior es inválido basta cambiar *pericos* por *pingüinos*.

e. *Ninguna iguana es ave* y *Todas las aves vuelan* $\not\Rightarrow$ *Ninguna iguana vuela*

Se puede ver que el argumento anterior es inválido cambiando *iguana* por *murciélago*.

f. *Ningún insecto es un ave* y *Ningún ave es un reptil* $\not\Rightarrow$ *Ningún insecto es un reptil*

se ve que el argumento es inválido cambiando *insecto* por *cocodrilo*.

g. *Hay políticos bandidos* y *Hay bandidos ricos* $\not\Rightarrow$ *Hay políticos ricos*

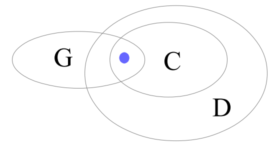
el argumento es inválido, basta cambiar *ricos* por *pobres* para verlo.

Lo importante de estos argumentos no es lo que dicen en particular, sino su estructura, la manera en que están conectadas las distintas partes. Su validez o invalidez se puede aclarar si los vemos de manera mas abstracta, sin referencia a cosas que ya conocemos, o si pensamos en conjuntos.

El lenguaje formal ayuda a aclarar la estructura de las afirmaciones y los argumentos lógicos. Por ejemplo, considerar la afirmación:

Todos los cazadores tienen dientes y algunos gatos son cazadores

si las escribimos como



Todos los C son D y algunos G son C

entonces podemos concluir que   *algunos G son D*

que es   *Algunos gatos tienen dientes*

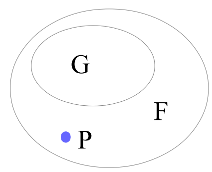
Otro ejemplo.

Platón era un gran filósofo

Todos los griegos eran grandes filósofos

Por lo tanto Platón era griego

Si lo reescribimos como



P es F

Todos los G son F

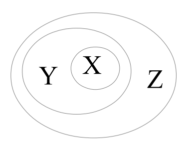
Por lo tanto P es G

vemos que el argumento es invalido: que P sea F y todos los G sean F no dice que P sea G!

Platon sí era griego, pero eso no hace que el argumento sea valido!

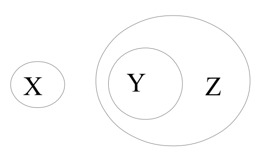
Algunos Silogismos, y como se ven usando conjuntos:

Todo X es Y   y   *Todo Y es Z* $\Rightarrow$ *Todo X es Z*



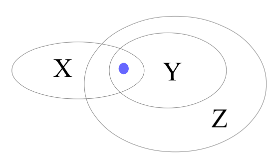
(el ejemplo a. es de este tipo)

Ningún X es Z   y   *Todo Y es Z* $\Rightarrow$ *Ningún X es Y*



(el ejemplo b. es de este tipo)

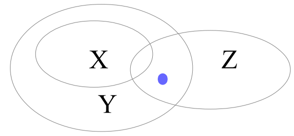
Algún X es Y   y   *Todo Y es Z* $\Rightarrow$ *Algún X es Z*



(el ejemplo c. es de este tipo)

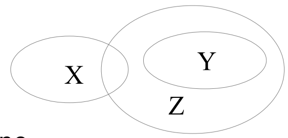
Algunas falacias, y como se ven usando conjuntos:

Todo X es Y y *Algún Y es Z* $\not\Rightarrow$ *Algún X es Z*



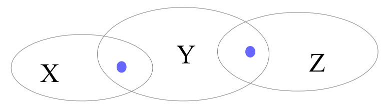
(Los Y que son Z no tienen que ser X) el ejemplo d. es de este tipo

Ningún X es Y y *Todo Y es Z* $\not\Rightarrow$ *Ningún X es Z*



(Pueden haber X que sean Z sin ser Y) el ejemplo e. es de este tipo

Algún X es Y y *Algún Y es Z* $\not\Rightarrow$ *Algún X es Z*



(Los Y que son X no tienen que ser los Y que son Z) el ejemplo g. es de este tipo

No tiene caso tratar de memorizar los distintos silogismos y falacias, son muchos y es fácil confundirse, el chiste está en entender por que unos argumentos son válidos y otros no.

¿Los siguientes argumentos serán válidos o no?

a. *Todos los matemáticos son científicos*
Algunos científicos están locos
así que algunos matemáticos están locos (Inválido)

b. *Todos los marcianos son verdes*
Ningún ser sin antenas es verde
Por lo tanto todos marcianos tienen antenas (Válido)

Ejercicios.

Para que estos ejercicios les sea mas útiles traten de hacerlos en su cabeza, y luego chequen su respuesta haciendo diagramas.

12. ¿Es lo mismo o no es lo mismo?

a. *Todos los x son y* y *Todos los y son x*
b. *Algunos x son y* y *Algunos y son x*
c. *No todo x es y* y *No todo y es x*
d. *Ningún x es y* y *Ningún y es x*

13. ¿Que conclusiones lógicas puedes obtener?

    a. Si *Algún X es Y* y *Ningún Y es Z*
    b. Si *Ningún X es Y* y *Algún Y es Z*
    c. Si *Algún X es Y* y *Algún Y no es Z*

14. ¿Que conclusiones lógicas puedes obtener? (a veces no se puede obtener nada)

    a. *Ningún reptil tiene pelo* y *Todas las serpientes son reptiles*
    b. *Los caballos tienen herraduras* y *Ningún humano tiene herraduras*
    c. *Ningún esquimal es europeo* y *Ningún europeo es marciano*
    d. *Algunos cuadriláteros son rectángulos* y *Los rectángulos son paralelogramos*
    e. *Algunas figuras son polígonos* y *Ningún circulo es un polígono*
    f. *Algunos cuadrúpedos son mamíferos* y *Algunos mamíferos nadan*
    g. *La suma de dos números impares es un número par* y *3 es un número impar*
    h. *La suma de dos números impares es un número par* y *6 es un número par*

Demostraciones.

Una **demostración** es un argumento lógico en el que cada paso esta plenamente justificado y es una consecuencia lógica inmediata de los anteriores.

Para demostrar cualquier cose partimos de una o varias cosas que suponemos que son ciertas (las **hipótesis**) y de ahí debemos llegar con argumentos lógicos a lo que queremos demostrar (la **conclusión**).

Hay varios métodos de demostración, que pueden ser **directos** (por pasos) o **indirectos** (por *contrapositiva* o *por contradicción*) aunque a veces los distintos métodos se combinan.

Demostraciones directas:

Como $(p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q) \Rightarrow (p \rightarrow q)$ entonces podemos demostrar $p \rightarrow q$ mostrando que $p \rightarrow r$ y que $r \rightarrow q$ donde r es cualquier otra proposición.

Mas generalmente, para demostrar que si pasa A entonces pasa Z, podemos hacerlo *por pasos* buscando una serie de proposiciones, C, D, E, ... tales que podamos demostrar que si pasa A entonces pasa B, si pasa B entonces pasa C, si pasa C entonces pasa D.... hasta terminar en Z.

Ejemplos de demostraciones directas:

Demostrar que si algunos A son B y ningún B es C entonces algunos A no son C.

Hipótesis 1: Existe x tal que x es A y x es B
Hipótesis 2: Si y es B entonces y no es C
Por Demostrar: Existe z tal que z es A y z no es C

Demostración (*directa*):
Por la hipótesis 1 existe x tal que x es A y x es B
Como x es B entonces por la hipótesis 2 x no es C
Así que x es A y x no es C, que es *lo que se quería demostrar*. □

Demostrar que el cuadrado de un entero par es par.

Hipótesis: n es un entero par
Por Demostrar: n^2 es par

Demostración (*directa*):
Por la hipótesis n es par
Entonces n=2m para algún entero m
Entonces $n^2 = (2m)^2 = 4m^2$
Por lo tanto $n^2 = 2(2m^2)$ lo que dice que n^2 es par □

Demostraciones contrapositivas:

Como $p \to q$ es equivalente a $\neg q \to \neg p$ entonces podemos demostrar $p \to q$ demostrando la *contrapositiva* $\neg q \to \neg p$

Para demostrar que si pasa A entonces tiene que pasar B podemos **suponer** que B no pasa y mostrar que entonces tampoco pasa A.

Ejemplos de demostraciones contrapositivas:

Demostrar que si algunos A no son B y todos los C son B entonces algunos A no son C.

Hipótesis 1: Existe x tal que x es A y x no es B

Hipótesis 2: Si y es C entonces y es B

Por Demostrar: Existe z tal que x es A y z no es C

Demostración (*contrapositiva*):

Supongamos que *no* existe z tal que z es A y z no es C

Esto significa que si z es A entonces z es C

Así que si z es A entonces (por hip 2) z es B

Por lo tanto no existe z tal que z es A y z no es B *lo que niega la hipótesis 1.* □

Demostrar que si el cuadrado de un número entero es par, entonces el número es par.

Hipótesis: n es un numero entero y n^2 es par

Por Demostrar: n es par

Demostración (*contrapositiva*):

Supongamos que la conclusión es falsa, es decir que n es impar

Entonces n=2m+1 para algún entero m.

Por lo tanto $n^2 = (2m+1)^2 = (2m)^2 + 2(2m\cdot 1) + 1^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$.

Esto dice que n^2 es impar lo que niega la hipótesis. □

Demostraciones por contradicción.

Si r es cualquier proposición *falsa*, entonces $p \to q$ es equivalente a $\neg(p \to q) \to r$.
Así que para demostrar que $p \to q$ podemos suponer que la implicación es falsa, es decir que su negación $p \wedge \neg q$ es verdadera y tratar de llegar a una contradicción.

Ejemplos de demostraciones por contradicción:

Demostrar que si todos los A son B y ningún B es C entonces ningún A es C.

Hipotesis 1: Si x es A entonces x es B

Hipotesis 2: Si y es B entonces y no es C

Por Demostrar: Si z es A entonces z no es C

Demostración (*por contradicción*):

Supongamos que las hipótesis son ciertas pero la conclusión no es cierta, es decir que

Existe un z tal que z es A y z es C

Como z es A entonces por la hipótesis 1 z debe ser B.

Como z es C entonces por la hipótesis 2 z no puede ser B.

Por lo tanto z es B y z no es B lo que es una contradicción. □

Demostrar que no existen 2 números naturales m y n tales que m / n = √2.

La afirmación equivale a decir *si m y n son dos números naturales entonces m/n ≠ √2*

Hipótesis: *m y n son dos números naturales*

Por Demostrar: *m/n ≠ √2*

Demostración (por contradicción)

Supongamos que existen dos números naturales m y n tales que m/n = √2

Podemos suponer que m y n no son ambos pares, o podríamos simplificar la fracción m/n.

Si m/n = √2 entonces $m^2/n^2 = 2$ así que $m^2 = 2n^2$

Como $m^2 = 2n^2$ entonces m^2 es par, así que (por una demostración anterior) m es par

m=2m' para algún número natural m´

Así que $(2m')^2 = 2n^2$ por lo tanto $4m'^2 = 2n^2$ o sea $2m'^2 = n^2$

por lo tanto n^2 es par, así que (por una demostración anterior) n es par

Por lo tanto m y n son ambos pares lo que contradice nuestra suposición. □

Ejercicios.

15. Demuestra que si todos los A son B y algunos C no son B entonces algunos A no son C.

16. Demuestra por contrapositiva que si el producto de dos enteros es impar, entonces los dos son impares.

17. Demuestra por contradicción que no existen 2 números naturales tales $m/n = \sqrt[3]{2}$.

Ejercicios de repaso.

18. Identifica cada proposición de la izquierda con una afirmación equivalente en la derecha:

a. P → Q	a'. P v Q
b. P → ¬Q	b' ¬P v ¬Q
c. Q → P	c'. ¬P v Q
d. ¬Q → ¬P	d'. P ∧ ¬Q
d. ¬(P → Q)	e'. ¬(¬P∧Q)

19. Escribe las negaciones de las siguientes proposiciones:

a. *Algunas veces llueve*
b. *Todo es verdad y nada es mentira*
c. *Algunos perros no nadan y ningún gato vuela*
d. *Ningún bicho de 4 o 8 patas es un insecto*
e. *Si un bicho tiene 4 o 8 patas entonces no es un insecto*
f. *Si un bicho es un insecto entonces no tiene 4 o 8 patas*
g. *Los polinomios de grado impar tienen al menos una raiz*
h. *Algunos números reales no tienen raíz cuadrada*
i. *Si una función es suave entonces es continua*
j. *Algunas afirmaciones son falsas y algunas afirmaciones son verdaderas*
k. *Para todo* $n \in N$ *, existe* $m \in N$ *tal que* $m > n$

20. Que conclusiones lógicas puedes obtener?

a. *Algunos orgs son midrs* y *todos los midrs son uchs.*
b. *Todos los orgs son midrs* y *algunos mirds no son exts.*
c. *Algunos perros no ladran* y *todo lo que ladra muerde.*
d. *Algunas raíces son irracionales* y *algunos irracionales son trascendentes.*
e. *Los racionales son algebraicos* y *los trascendentes no son algebraicos.*
f. *Toda función diferenciable es continua* y *existen funciones que no son continuas.*
g. *Toda función diferenciable es continua* y *existen funciones que no son diferenciables.*
h. $\forall x>0$, $\exists z>0$ tal que $z^2=x$ y $w>0$.

21. Muestra que los conectores lógicos ¬ ∧ ∨ pueden combinarse para obtener *cualquier* tabla de verdad (una que tenga la combinación de V's y F's que uno elija)

22. Demuestra que si el cuadrado de un numero entero es divisible entre 3 entonces el número es divisible entre 3.

23. Demuestra que no existen 2 números naturales m y n tales que m / n = √3.