# Conjuntos

Intuitivamente, un **conjunto** es una colección de cosas, reales o imaginarias, llamadas **elementos** del conjunto. Para decir que x es elemento de A escribimos $x \in A$.

Esta definición tiene algunos problemas cuando los conjuntos son muy grandes, pero lo importante es que cada conjunto está determinado por sus elementos:

*Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.*

Ejemplos.

- El conjunto de todos los seres vivos.
- El conjunto de las especies de seres vivos.
- El alfabeto ingles = {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z}
- El conjunto de los números naturales **N** = {1,2,3,4,5,...}.
- El conjunto **R** de todos los números reales.

Aunque los conjuntos pueden ser muy heterogéneos, los conjuntos mas útiles están formados por elementos con alguna propiedad en común, algo como

$$\{ x / P(x) \} = \text{El conjunto de los x que tienen la propiedad } P(x)$$

Ejemplos:

- El conjunto de las canciones de los Beatles = {x /x es canción y x fue escrita por los Beatles}
- El conjunto de los números primos = $\{ n \in \mathbb{N} / n$ no es divisible por ningún m con $1<m<n \}$
- El conjunto de los números *racionales* $Q = \{ r \in R / \exists\, m,n \in N, r=m/n\}$
- El conjunto de los números *irracionales* $I = \{ r \in R / \nexists\, m,n \in N, r=m/n\}$

Un **conjunto vacío** es un conjunto que no tiene elementos, así que todos los conjuntos vacíos son iguales, lo denotamos por {} o por $\varnothing$.

Ejemplos.

- El conjunto de todos los perros voladores = $\varnothing$ = El conjunto de los triángulos con 4 lados.
- $\varnothing = \{\} \neq \{\{\}\} = \{\varnothing\}$

Si A y B son conjuntos, decimos que A esta **contenido** en B, o que A es **subconjunto** de B, si todos los elementos de A son elementos de B, y escribimos $A \subset B$ o $A \subseteq B$.

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x,\ x \in A \rightarrow x \in B$$

Por el contrario, cuando A no esta contenido en B escribimos $A \not\subset B$

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x,\ x \in A \quad x \notin B$$

Ejemplos.

- Si A = El conjunto de todas las aves

  B = El conjunto de todos los animales con alas

  C = El conjunto de todos los animales que vuelan

  Entonces $A \subset B$ , $B \not\subset A$ , $B \not\subset C$ , $C \subset B$ , $A \not\subset C$ , $C \not\subset A$ .

- Las rectas y los planos son conjuntos de puntos. Los puntos son *elementos* del plano mientras que las rectas son *subconjuntos* del plano.

*Afirmación.* Si A, B y C son conjuntos y $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$.

*Demostración.* $A \subset B$ y $B \subset C \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x, x \in A \to x \in B) \wedge (\forall x, x \in B \to x \in C) \Rightarrow$

$\overset{\text{silog}}{\Rightarrow} (\forall x, x \in A \to x \in C) \Leftrightarrow A \subset C$ □

*Afirmación.* A = B si y solo si $A \subset B$ y $B \subset A$

*Demostración.* $A = B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ A y B tienen los mismos elementos $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \subset B$ y $B \subset A$ □

## Operaciones con conjuntos.

La **unión** de dos conjuntos A y B es el conjunto AUB formado por los elementos de A y los elementos de B, es decir

$$A \cup B = \{ x / x \in A \vee x \in B\}$$

La **intersección** de dos conjuntos A y B es el conjunto AUB formado por los elementos de A y los elementos de B, es decir

$$A \cap B = \{ x / x \in A \wedge x \in B\}$$

Ejemplo. Si A = El conjunto de los números naturales impares = {1,3,5,7,9,11,13,..}

y B = El conjunto de los múltiplos de 3 = {3,6,9,12,15,...}

entonces A U B = {1,3,5,6,7,9,11,12,13,15,...} $A \cap B$ = (3,9,15,21,27,...)

La **diferencia** entre dos conjuntos A y B es el conjunto A-B formado por los elementos de A que *no* son elementos de B.

$$A - B = \{ x / x \in A \wedge x \notin B \}$$

Ejemplo. Si A y B son los conjuntos del ejemplo anterior, entonces

A-B = el conjunto de los impares que no son múltiplos de 3 = {1,5,7,11,13,17,19,23,...}

B-A = el conjunto de los múltiplos de 3 que son pares = {6,12,18, 24,...}

La unión y la intersección son *operaciones* entre conjuntos, que tienen algunas propiedades parecidas a la suma y la multiplicación de números naturales.

*Afirmación.* Si A, B y C son conjuntos entonces se cumplen:

1. $A \cup B = B \cup A$ *La unión es conmutativa*
2. $A \cap B = B \cap A$ *La intersección es conmutativa*
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ *La unión es asociativa*
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ *La intersección es asociativa*
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *La intersección se distribuye sobre la unión*
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *La unión se distribuye sobre la intersección*

*Demostración.*

1. Tenemos que ver que $A \cup B$ y $B \cup A$ tienen los mismos elementos:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B \vee x \in A \Leftrightarrow x \in B \cup A \qquad \square$$

3. Hay que ver que $(A \cup B) \cup C$ y $A \cup (B \cup C)$ tienen los mismos elementos:

$$x \in (A \cup B) \cup C \Leftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C) \qquad \square$$

5. Veamos que $A \cap (B \cup C)$ Φ $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ tienen los mismos elementos:

$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad \square$$

Hay otras maneras de combinar conjuntos para obtener otros conjuntos.

El **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B es el conjunto AxB cuyos elementos son todas las parejas (a,b) formadas por un elemento a de A y un elemento b de B:

$$A \times B = \{ (x,y) \,/\, x \in A \,,\, y \in B \}$$

Ejemplos.

- Si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,2\}$ entonces $A \times B = \{ (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2) \}$
- Si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{ \}$ entonces $A \times B = \{ \}$
- Si **R** es el conjunto de los números reales, entonces **R**x**R** es el conjunto de parejas ordenadas de números reales.

Observar que si $A \neq B$ entonces $A \times B \neq B \times A$.

Ejercicios.

1. ¿Es verdad que AUB = AUC $\Leftrightarrow$ B=C ? ¿Y que $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow B=C$?
   Demuéstralo o da contraejemplos.

2. Demuestra que $\cap$ es conmutativa y asociativa, y que se distribuye sobre U.

3. Muestra que la diferencia de conjuntos no es asociativa, es decir, que $(A-B)-C \neq A-(B-C)$.

4. ¿La unión y la intersección de conjuntos se distribuyen sobre la diferencia?

5. Encuentra 3 conjuntos A, B y C tales que $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cap C$ no sean vacíos, pero $A \cap B \cap C = \emptyset$.

6. Si A, B, C son conjuntos, muestra que $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$. ¿Como definirías $A \times B \times C$?

## Conjuntos universales, complementos.

Cuando pensamos en conjuntos usualmente no nos interesan conjuntos demasiado heterogéneos, donde ser revuelvan por ejemplo manzanas, poemas, números, amenazas y marcianos, sino que nos restringimos de entrada a un universo¨mas pequeño, por ejemplo a los números, y pensamos en conjuntos que estén contenidos en este "conjunto universal", que puede cambiar de acuerdo a lo que nos interese.

Si fijamos un conjunto universal U y A está contenido en U, el **complemento** de A en U es el conjunto $A^c$ formado por los elementos de U que no están en A.

$A^c = \{x \in U \,/\, x \notin A\} = U - A$

Ojo: aunque $A^c$ depende del conjunto universal U, este no se escribe si se adivina del contexto.

Ejemplos.

- Si pensamos en el universo A de todos los animales, el conjunto de los animales que vuelan es

  $V = \{ x \in A \,/\, x \text{ vuela}\}$ y entonces $V^c = \{x \in A \,/\, x \text{ no vuela}\}$

  La propiedad que define a $A^c$ es la negación de la propiedad que define a A, pero $A^c$ depende de quien sea el universo.

- Si $P = \{n \in N \,/\, n \text{ es primo}\}$ entonces se entiende que el conjunto universal es N y

  $P^c = \{n \in N \,/\, n \text{ no es primo}\}$

- El conjunto de los *números algebraicos* es el conjunto

  $A = \{ x \in R \,/\, x$ es raíz de algún polinomio con coeficientes enteros$\}$

  Su complemento (en el universo de los números reales) es el conjunto de los *números trascendentes*:

  $A^c = \{ x \in R \,/\, x$ no es raíz de ningún polinomio con coeficientes enteros$\}$

Afirmación. Si A y B son conjuntos en un universo U, entonces $A - B = A \cap B^c$

*Demostración.* $\forall x,\ x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^c \Leftrightarrow x \in A \cap B^c$ □

Afirmación. Si A y B son conjuntos en un universo U, entonces $A \subset B$ si y solo si $B^c \subset A^c$

*Demostración.* $A \subset B \Leftrightarrow \forall x,\ x \in A \rightarrow x \in B \Leftrightarrow \forall x,\ x \notin B \rightarrow x \notin A \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall x,\ x \in B^c \rightarrow x \in A^c \Leftrightarrow B^c \subset A^c$ □

Las relaciones entre la unión, la intersección y el complemento están dadas por las

**Leyes de De Morgan**:

1. $(AUB)^c = A^c \cap B^c$

2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

*Demostración.*

1. $\forall x,\ x \in (AUB)^c \Leftrightarrow x \notin AUB \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$

2. Ejercicio.

## Ejercicios.

7. Si U=**N** , A={n∈**N** / n es múltiplo de 3} B={n∈**N** / n > 8} calcula $A^c$ , $B^c$ , $(AUB)^c$ y $(A \cap B)^c$ .

8. Demostrar la segunda ley de De Morgan.

10. Demuestra que el complemento de $(A \cup B) \cap C$ es $(A^c \cap B^c) \cup C^c$.

11. Si $A \subset U$ y $B \subset V$, calcula el complemento de AxB en UxV en términos de los complementos de A y B en U y V respectivamente.

## Conjuntos de conjuntos.

Podemos considerar a conjuntos cuyos elementos sean otros conjuntos.

Ejemplos.

- El conjunto formado por los grupos en una escuela.
- El conjunto de todos los intervalos [a,b], donde [a,b]={x∈**R** / a≤x≤b }
- El conjunto formado por todas las rectas en el plano (este conjunto *no* es el plano, que es un conjunto de puntos, sino un conjunto cuyos *elementos* son las rectas!)

Si A es cualquier conjunto, el **conjunto potencia** de A, es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A, y es denotado por $2^A$.

Ejemplos.

- Si $A = \{1,2,3\}$ entonces $2^A = \{ \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}$
- Si $A = \varnothing$ entonces el único subconjunto de A es $\varnothing$ así que $2^{\varnothing} = \{\varnothing\}$

## Familias de conjuntos.

A veces es necesario considerar familias grandes de conjuntos y hacer operaciones con ellos, como intersectarlos o unirlos todos.

Ejemplos.

- Considerar la familia G de todos los grupos de la facultad de ciencias:

$$G = \{g \ / \ g \text{ es un grupo de la facultad}\}$$

La unión de todos los grupos de la facultad se denota por $\bigcup_{g\in G} g$ y la intersección por $\bigcap_{g\in G} g$.

$\bigcup_{g\in G} g$ = el conjunto de alumnos de la facultad y $\bigcap_{g\in G} g = \varnothing$.

La familia G tiene muchas subfamilias, por ejemplo la familia M de los grupos de la mañana.

$\bigcup_{g\in M} g$ = el conjunto de alumnos que toman algún curso en la mañana

y el complemento de este conjunto es

$\left(\bigcup_{g\in M} g\right)^c$ = el conjunto de alumnos que toman todos sus cursos en la tarde

Si a es un alumno de la facultad entonces

$\bigcup_{a\in g} g$ = el conjunto de todos los alumnos que llevan *alguna* clase con a.

$\bigcap_{a\in g} g$ = el conjunto de todos los alumnos que llevan *todas* sus clases con a.

## Ejercicios.

12. Da un ejemplo de un conjunto cuyos elementos sean conjuntos de conjuntos.

13. Si $A = \{1,2\}$ ¿quienes son $2^A$ y $2^{2^A}$?

14. Muestra que si A y B son dos conjuntos entonces

a. $2^{A\cap B} = 2^A \cap 2^B$

b. $2^{A\cup B} \supset 2^A \cup 2^B$.

15. Sea I la familia de todos los intervalos $[n,\infty)$ para n en **Z**. Calcula $\bigcup_{n\in Z}[n,\infty)$ y $\bigcap_{n\in Z}[n,\infty)$

16. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia (posiblemente infinita) de conjuntos

a. ¿Quien es $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c$ ?

b. ¿Quien es $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c$ ?

## Conjuntos y lógica.

Todas las matemáticas modernas están construidas de conjuntos, que están íntimamente ligados a la lógica. Si a cada conjunto A le asociamos la proposición

$$P(A)= x \textit{ es elemento de } A$$

entonces las operaciones lógicas corresponden a operaciones con conjuntos:

- $P(A)\wedge P(B)$ = *x es elemento de* A y *x es elemento de* B

  = *x es elemento de* $A\cap B$

  = $P(A\cap B)$

- $P(A)\vee P(B)$ = *x es elemento de* A o *x es elemento de* B

  = *x es elemento de* $A\cup B$

  = $P(A\cup B)$

- $\neg P(A)$ = *x no es elemento de* A

  = *x es elemento de* $A^{\neq}$

  = $P(A^{\neq})$

- $P(A) \rightarrow P(B)$ = Si *x es elemento de* A entonces *x es elemento de* B

  = $A \subset B$

- La igualdad $\neg(P(A)\vee\surd(B)) = \neg P(A) \wedge \neg P(B)$

  equivale a la primera ley de De Morgan: $(A \cup B)^{\neq} = A^{\neq} \cap B^{\neq}$

- La igualdad $\neg(P(A)\wedge\surd(B)) = \neg P(A) \vee \neg P(B)$

  equivale a la segunda ley de De Morgan: $(A \cap B)^{\neq} = A^{\neq} \cup B^{\neq}$

La definición intuitiva de conjunto como una colección de cualquier clase de cosas lleva a paradojas lógicas Si pudiéramos hablar de conjuntos sin ninguna restricción, podríamos considerar, por ejemplo, al conjunto U de todos los conjuntos y podríamos considerar lo siguiente:

> *Sea V el conjunto cuyos elementos son todos los conjuntos que no son elementos de si mismos. Entonces podemos preguntarnos si V es elemento de sí mismo, o si no lo es.*
>
> *Si V no es elemento de sí mismo, entonces es uno de los conjuntos que no son elementos de sí mismos, así que V debe ser elemento de V, lo que es una contradicción.*
>
> *Y si V sí es elemento de sí mismo, entonces V no es uno de los conjuntos que no son elementos de sí mismos, y por lo tanto V no es elemento de V, lo que es una contradicción.*

Esta es la paradoja de Russell, que muestra que no puede existir un “conjunto universal” que contenga a todos los conjuntos y que es necesario definir a los conjuntos de manera mucho mas cuidadosa. Pero también siembra la duda de que los conjuntos, aun definidos con mucho mas cuidado, no lleven a otras contradicciones lógicas, y que las matemáticas, que están basadas en los conjuntos, no vayan a ser ilógicas En los últimos 100 años se ha trabajado muchísimo para mostrar que los conjuntos definidos cuidadosamente no llevan a ninguna contradicción lógica (esto se expresa diciendo que la teoría de conjuntos es *consistente*).

No sólo los conjuntos definidos de manera arbitraria llevan a contradicciones lógicas, las proposiciones definidas de manera arbitraria también. Considerar por ejemplo la afirmación:

*Esta afirmación es falsa*

Observar que esa afirmación no puede ser cierta (porque entonces sería falsa!) y tampoco puede ser falsa (porque entonces sería cierta!). Así que no cualquier afirmación es una proposición (algo que es o cierto o falso, pero no ambas o ninguna), y tenemos que tener cuidado en que clase de afirmaciones permitimos.

## Axiomas.

Definir lo que son los conjuntos y los elementos con precisión no es nada fácil (es como tratar de definir lo que son los puntos y las rectas), pero resulta que tampoco es necesario, porque lo que importa realmente son sus *propiedades*.

Para estudiar conjuntos no necesitamos saber exactamente que son, siempre y cuando sepamos cuales son sus propiedades fundamentales, que hacen que se comporten como los conjuntos que conocemos. Una lista de estas propiedades, a partir de las cuales solo necesitamos usar la lógica para averiguar todas las demás, es un **sistema axiomático** para los conjuntos.

Algunos axiomas de los conjuntos (faltan muchos mas):

- Existe un conjunto que no tiene elementos.
- Dos conjuntos son iguales si y solo si tienen los mismos elementos.
- Ningún conjunto es elemento de sí mismo.
- Si A es un conjunto y P es una propiedad entonces $\{x \in A \ / \ P(x)\}$ también es un conjunto.
- Si A es un conjunto entonces existe un conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de A.

## Ejercicios de repaso.

17. Demuestra que son equivalentes

$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = A \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = B.$$

18. Demuestra que $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ si y solo si $C \subset A$.

19. Demuestra que $C-(A \cup B) = (C-A) \cap (C-B)$

20. Muestra que a igualdad $\neg(P(A) \vee P(B)) = \neg P(A) \wedge \neg P(B)$

equivale a la primera ley de De Morgan: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

21. La *diferencia simétrica* o *suma booleana* de dos conjuntos A y B es el conjunto A+B formado por los elementos que están en alguno de los conjuntos pero no en el otro, es decir

$$A+B = (A-B) \cup (B-A)$$

a. Para $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{3,4\}$ calcula A+B.

b. Muestra que $A+B = A \cup B - A \cap B$

c. Muestra que para todo conjunto A, existe un único conjunto A' tal que $A+A' = \varnothing$.

d. Muestra que existe un único conjunto Z tal que para todo conjunto A, A+× = °.

e. Demuestra que + es una operación conmutativa y asociativa entre conjuntos.

22. ¿Puedes dar otros ejemplos de “conjuntos imposibles” y de afirmaciones paradójicas?