Relaciones

Queremos considerar distintas relaciones entre los elementos de dos conjuntos.

Ejemplos.

- Si P es el conjunto de personas y B es el conjunto de bandas de rock, podemos relacionar a cada persona con las bandas que le gustan (puede que le gusten muchas, o ninguna). O podríamos relacionarla con las bandas que conoce (sin importar si le gustan o no) o con las bandas que detesta, o...
- Hay muchas relaciones posibles entre los números enteros. Por ejemplo, podemos relacionar a cada numero n con su cuadrado, o con todos sus divisores, o con los números mayores que n, o con los números que no tienen ningún factor en común con n, o...

Si A y B son conjuntos, una **relación** entre A y B es un subconjunto R del producto cartesiano A x B. Si $(a,b) \in R$ decimos que a está *relacionado* con b y escribimos aRb. Cualquier clase de relación es válida, aunque hay relaciones mas interesantes o más útiles que otras.

Ejemplos.

- A = {alumnos de la facultad} y C = {cursos de la facultad} entonces podemos relacionar a cada alumno a con cada curso c que ha llevado y escribir aRc.
  La relación R es el conjunto de parejas R={ $(a,c) \in AxC$ / a cursó c }
- Si C= {2,3,4,5} y D ={6,7,8,9} y consideramos la relación entre C y D dada por cRd si c divide a d entonces R = { (2,6), (2,8), (3,6), (3,9), (4,8) }
- En el conjunto **R** de los números reales hay muchas relaciones, por ejemplo:
  - a=b si a es igual a b
  - a < b si a es menor que b.
  - aRb si a es la raíz cuadrada de b.
  - a i b si a-b es un entero.
- En L = {rectas del plano} también podemos considerar varias relaciones en L:
  - l // l' si l' es paralela a l.
  - $l \perp l'$ si l' es perpendicular a l.
  - $l \neq l'$ si l es distinta de l'.

El **dominio** de una relación R entre A y B es el conjunto de elementos de A que están relacionados con algún elemento de B.

La **imagen** o **rango** de una relación R entre A y B es el conjunto de elementos de B tales que existe un elemento de A que esta relacionado con b.

Ejemplos.

- H = {seres humanos} y R = { (a,b) ∈ HxH / b es hermana de a } entonces el dominio de R es el conjunto de todos los humanos que tienen hermanas y la imagen de R es el conjunto de todas las hermanas de alguien.
- Si C={3,4,5} y D ={6,7,8,9} y consideramos la relación cRd si c divide a d entonces R ={(3,6), (3,9), (4,8)}. El dominio de R es {3,4} y la imagen es {6,8,9}.
- Si **R** = {números reales} y r~s si r es el cuadrado de s entonces el dominio de ~ es $\mathbf{R}^+$ (los reales no negativos) y el rango de ~ es **R**.
- Si **N** ={números naturales} y D = {(m,n) ∈ NxN / n+5=2m} entonces el dominio de D esta formado por los *m* mayores o iguales a 3 (ya que $m={}^{n}/_{2}+{}^{5}/_{2} \geq 3$) y el rango de D es esta formado por los *n* impares (ya que n+5=2m es par).

Ejercicios.

1. Si A= {aerolíneas} y C = {ciudades}
   a. Da una relación entre A y C
   b. Da una relación entre A y CxC.

2. Si A = {1,2,3,4,5} y B = {1,2,3,4} grafica las siguientes relaciones en A x B:
   a. aRb si a-b=1
   b. aSb si a=2b
   c. aTb si a+b es impar
   d. aPb si ab≥5

. . . . .
4 . . . . .
. . . . .
3 . . . . .
1 2 3 4 5
2

3. Si **Z** = {números enteros}, encuentra el dominio y la imagen de las siguientes relaciones en **Z**:
   a. aRb ⇔ 2b = 3a
   b. aSb ⇔ $b = a^2$

1

4. Muestra que si R es cualquier relación entonces R ⊆ Dominio de R x Rango de R, y muestra que en general no se da la igualdad.

Si R es una relación entre A y B, la **relación inversa** R^{-1} es la relación entre B y A dada por R^{-1}= { (b,a) ∈BxA / (a,b) ∈R }, o en otras palabras, $bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb$.

Ejemplos.

- H = {seres humanos} y M = {mujeres} y R es la relación entre H y M dada por

  R= { (a,b) ∈HxM / b es mama de a } entonces R^{-1} es la relación entre M y H dada por

  R^{-1} = { (b,a) ∈MxH / a es hijo o hija de b }.
- Si **R** = {números reales} y F es la relación en **R** dada por F={ (r,s) ∈**R**x**R** / s = r^2 }

  entonces F^{-1} = { (s,r) ∈**R**x**R** / r =±√s } .

Si R es una relación entre A y B y S es una relación entre B y C la **relación compuesta** es la relación entre A y C dada por

R∘S = { (a,c) ∈AxC / ∃ b ∈B tal que (a,b) ∈R y (b,c) ∈S }

Ejemplos.

- Si H = {seres humanos} y S es la relación en H dada por S = {(a,b) ∈HxH / b es mama de a}

  entonces   S∘S = { (a,c) ∈HxH / c es abuela materna de a }.
- Si Z = { números enteros} y aDb si b=2a y aTb si b=3a entonces aD∘Tc si c=6a.
- Si L = {rectas en el plano} y P es la relación en L dada por

  P= { (l,l') ∈LxL / l' es perpendicular a l } entonces

  P∘P = { (l,l'') ∈LxL / l'' es perpendicular a una perpendicular a l } = { (l,l'') / l'' es paralela a l }

Aún si posible componer R con S y S con R, R∘S y S∘R no tienen por que ser iguales.

Ejemplos.

- Si H={humanos} y R y S son las relaciones en H definidas por aRb si b es hijo de a y aSb si b es hermano de a, entonces a(R∘S)c si c es hermano del hijo de a y a(S∘R)b si c es hijo del hermano de a (y los hijos de los hermanos no son los hermanos de los hijos).
- Si **Z**={enteros} y R y S son las relaciones en **Z** dadas por aRb si b=a+1 y aSb si b=2a

  entonces a(R∘S)c ⇔ ∃b tal que arb y bSc ⇔ ∃b tal que b=a+1 y c=2b ⇔ c=2(a+1)

  mientras que a(S∘R)c ⇔ ∃b tal que aSb y bRc ⇔ ∃b tal que b=2a y c=b+1 ⇔ c=2a+1.

  Como 2(a+1)≠2a+1 entonces R∘S ≠ S∘R.

Afirmación. La composición de relaciones tiene las siguientes propiedades:

1. $(R\circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$
2. $R\circ(S\circ T) = (R\circ S)\circ T$

Demostración.

1. $(c,a) \in (R\circ S)^{-1} \Leftrightarrow (a,c)\ T\ R\circ S \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists b$ tal que $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in S$

$\Leftrightarrow \exists b$ tal que $(b,a) \in R^{-1}$ y $(c,b) \in S^{-1}$

$\Leftrightarrow \exists b$ tal que $(c,b) \in S^{-1}$ y $(b,a) \in R^{-1} \Leftrightarrow (c,a) \in S^{-1}\circ R^{-1}$.

2. $(a,d) \in R\circ(S\circ T) \Leftrightarrow \exists b$ tal que $(a,b) \in R$ y $(b,d) \in S\circ T \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists b$ tal que $(a,b) \in R$ y ($\exists c$ tal que $(b,c) \in S$ y $(c,d) \in T$)

$\Leftrightarrow \exists b,c$ tales que $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in S$ y $(c,d) \in T$.

y por otro lado

$(a,d) \in (R\circ S)\circ T \Leftrightarrow \exists c$ tal que $(a,c) \in R\circ S$ y $(c,d) \in T$

$\Leftrightarrow \exists c$ tal que ($\exists b$ tal que $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in S$) y $(c,d) \in T$

$\Leftrightarrow \exists c,b$ tales que $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in S$ y $(c,d) \in T$.

Como las condiciones que definen a $R\circ(S\circ T)$ y a $(R\circ S)\circ T$ son iguales, las dos relaciones son iguales. •

Ojo: La composición de relaciones a veces se escribe *al revés*, para que coincida con el orden en que se escribe la composición de funciones.

Ejercicios.

5. Da varias relaciones entre **Q** = {números racionales} y **Z** ={números enteros}.

6. Si L y M son las relaciones en **Z** dadas por $L = \{ (m,m+1) / m\in Z\}$ y $M = \{ (m,m^2) / m\in Z \}$ calcula

a. $L\circ L$	b. $M\circ M$	c. $L\circ M$	d. $M\circ L$
e. L^{-1}	f. M^{-1}	g. $M^{-1}\circ M$	h. $M\circ M^{-1}$

Respuestas

$L\circ L = \{ (m,m+2) \}$	$M\circ M = \{ (m,m^4) \}$	$L\circ M = \{ (m,(m+1)^2) \}$	$M\circ L = \{ (m,m^2+1) \}$
$L^{-1} = \{ (m+1,m) \}$	$M^{-1} = \{ (m^2,m) \}$	$M^{-1}\circ M = \{ (m^2,m^2) \}$	$M\circ M^{-1} = \{ (m,\pm m) \}$

7. Si D es la relación en **N** dada por mDn si m divide a n,
   a. ¿Quien es D^{-1}?
   b. Muestra que $D\circ D = D$.
   c. ¿Quienes son $D\circ D^{-1}$ y $D^{-1}\circ D$?

8. Si L = {rectas en el espacio} y $P = \{ (l,l') \in L\text{x}L$ / l' es perpendicular a l }, muestra que $P\circ P = L\text{x}L$.

Consideremos ahora las relaciones en un solo conjunto A.

Una relación R de A en A se llama **reflexiva** si aRa para toda a en A.

Una relación R de A en A ese llama **simétrica** si para cada a,b en A, aRb implica bRa.

Una relación R de A en A se llama **transitiva** si para cada a,b,c en A, aRb y bRc implican aRc.

Ejemplos.

- En el conjunto de seres humanos:
  - La relación aFb si a y b viven en la misma casa es reflexiva y simétrica y transitiva.
  - La relación aSb si a y b son hermanos, es simétrica, pero no es reflexiva (a no es hermano de a) ni es transitiva (si a es hermano de b y b es hermano de c entonces a y c no tienen que ser hermanos: pueden ser la misma persona)
  - La relación aNb si a es no es mas alto que b es reflexiva y transitiva pero no es simétrica.

- En el conjunto **Z** de números enteros.
  - La desigualdad < es una relación transitiva, pero no es reflexiva ni simétrica.
  - a|b si a divide a b, es una relación reflexiva y transitiva, pero no simétrica.
  - La relación a~b si a-b es divisible entre 3 es reflexiva, simétrica y transitiva.
  - La relación aDb si 2a=b no es reflexiva ni simétrica ni transitiva.

- En el conjunto de rectas del plano:
  - El paralelismo (donde "paralelas" significa tener la misma dirección) es una relación reflexiva, simétrica y transitiva.
  - La perpendicularidad es una relación simétrica que no es reflexiva ni transitiva.
  - Intersectarse (tener puntos en común) es una relación simétrica y reflexiva pero no transitiva.

Una **relación de equivalencia** en un conjunto A es una relación R de A en A que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplos.

- Ser igual es una relación de equivalencia. Ser menor o igual no lo es (no es simétrica)

- El paralelismo es una relación de equivalencia, la perpendicularidad no lo es (no es reflexiva ni transitiva).

Ejercicios.

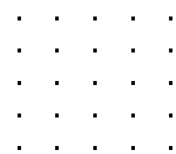
9. ¿Puedes encontrar relaciones en el conjunto de seres humanos donde se cumplan todas las combinaciones de reflexividad y/o simetría y/o transitividad (pero no las otras propiedades)?

10. Si A es un conjunto, da 3 relaciones en 2^A (el conjunto de subconjuntos de A) tales que
   a. La primera sea reflexiva y simétrica, pero no transitiva.
   b. La segunda sea reflexiva y transitiva, pero no simétrica.
   c. La tercera sea simétrica y transitiva, pero no reflexiva.

11. Da 4 relaciones (distintas) en **Z** que sean reflexivas, simétricas y transitivas.

12. ¿Es verdad que toda relación simétrica y transitiva es reflexiva?

13. Si R es una relación en **Z**, como se ve en la gráfica de R si
   a. R es reflexiva?   b. R es simétrica?   c. R es transitiva?



14. Demuestra que una relación R es
   a. Simétrica si y solo si $R = R^{-1}$.
   b. Transitiva si y solo si $R \circ R \subset R$

15. Muestra que si R y S son relaciones de equivalencia en un conjunto A, entonces
   a. la relación $R \cap S$ es de equivalencia.
   b. la relación $R \cup S$ no tiene que ser de equivalencia. ¿cual de las 3 condiciones puede fallar?

Relaciones de equivalencia y Particiones

Una **partición** de un conjunto A es una separación de los elementos de A en subconjuntos ajenos (o sea que no se intersectan).

Ejemplos.

- En el conjunto H de los seres humanos:
  - La fecha de nacimiento da una partición de H.
  - La estatura da una partición de H.
  - Las familias no dan una partición de H (ya que las distintas familias se intersectan).
  - La nacionalidad no da una partición de H porque hay personas con mas de una.

- En **Z** también hay mucha particiones:
  - Z = {pares} ∪ {impares}
  - Z = {n / n<0} ∪ {n / n>0 } ∪ {0}
  - Z = {n / n es primo} ∪ {n / n no es primo}

Las particiones de A y las relaciones de equivalencia en A están estrechamente ligadas.

Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A, la **clase de equivalencia** de un elemento **a** es el conjunto de todos los elementos relacionados con **a**.

Ejemplo. Para la relación de equivalencia en **Z** dada por (mRn si n-m es múltiplo de 3)

- la clase de equivalencia de 3 es {… , -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, ...}

- la clase de equivalencia de 4 es {… , -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, 16, ...}
- la clase de equivalencia de 5 es {… , -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, 17 , ...}

Lema. Si R es una relación de equivalencia en A, entonces cualesquiera dos clases de equivalencia en A son iguales o ajenas.

Demostración. La clase de equivalencia de un elemento a es el conjunto $R_a=\{c\in A \ / \ aRc\}$.
Veamos primero que si $a' \in R_a$ entonces $R_{a'} \subset R_a$: si $c \in R_{a'}$ entonces a'Rc, y como aRa' y R es transitiva entonces aRc así que $c \in R_a$.
Sean $R_a=\{c \in A \ / \ aRc\}$ y $R_b=\{c \in A \ / \ bRc\}$ las clases de equivalencia de dos elementos a y b en A.
Si $R_a \cap R_b \neq \emptyset$ entonces existe $d \in A$ tal que aRd y bRd. Entonces como R es simétrica dRb y como R es transitiva aRb, así que $b \in R_a$ y por lo anterior $R_b \subset R_a$.
El mismo argumento muestra que $R_b \subset R_a$, de modo que $R_b=R_a$. ●

Observar que en la demostración del lema no usamos la reflexividad de R.

Teorema. Si A es un conjunto, cada partición de A define una relación de equivalencia en A, y cada relación de equivalencia en A define una partición de A.

Demostración. Dada cualquier partición de un conjunto A en subconjuntos ajenos $A_1,A_2,A_3,...$
Podemos definir una relación R en A como aRa' si a y a' están en el mismo A_i. Esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva sin importar quien sea la partición.

Por otro lado, si R es una relación de equivalencia en A, entonces por el lema anterior las distintas clases de equivalencia de R son subconjuntos ajenos de A.

Como R es reflexiva cada elemento de A esta en una clase de equivalencia (la suya!) así que la unión de las clases de equivalencia es todo A, es decir, las clases de equivalencia de R forman una partición de A. ●

Ejemplos (de como las relaciones de equivalencia inducen particiones):

- En **Z**
  - La relación (mPn si m y n tienen a misma paridad) divide a **Z** en pares e impares.
  - La relación (mRn si m-n es divisible entre 5) da una partición de **Z** en 5 subconjuntos.

- En el conjunto T de triángulos del plano
  - La semejanza da una partición de T.
  - La congruencia da una partición de T.
  - El área da una partición de T.

Ejercicios.

16. En el conjunto de fracciones *reducidas* $^m/_n$ definimos $^m/_n R ^{m'}/_{n'}$ si n=n'
    ¿Cual es la clase de equivalencia de $^1/_3$? y la de $^1/_6$?

17. Si A es un conjunto, encuentra 3 relaciones de equivalencia en el conjunto potencia 2^A.

18. Dar 5 particiones distintas del conjunto de polígonos en el plano.
    (no escriban los detalles, pero asegúrense que si son particiones y son distintas)

19. ¿Se puede definir una partición a partir de una relación que no es de equivalencia?
¿Que ocurre si la la relación es solo reflexiva y simétrica? ¿Si solo es reflexiva y transitiva?
¿Y si solo es simétrica y transitiva?