Funciones

Una **función** de un conjunto X a un conjunto Y es una relación entre X y Y tal que cada $x \in X$ esta relacionado con exactamente un $y \in Y$. En lugar de escribir xfy escribimos $f(x)=y$ y decimos que y es la **imagen** de x bajo f.

Para decir que f es una función de X a Y escribimos $\mathbf{f : X \to Y}$, decimos que X es el **dominio** de f y que Y es el **codominio** o **contradominio** de f. La **imagen** de f es el subconjunto de Y formado por todas imágenes de elementos de X, es decir, $\{y \in X \ / \ \exists x \in X \ , \ f(x)=y\}$.

Ejemplos.

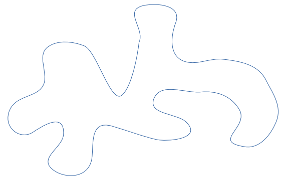
- Si H={seres humanos}
    - f(x) = *la mama de x* es una función de H a H (cada ser humano tiene una mama y solo una). La imagen de f es el conjunto de todas las mamás.
    - g(x) = *la abuela de x* no es una función de H a H porque g no esta bien definida (para obtener una función habría que especificar cual de las 2 abuelas).
    - h(x) = *el hijo de x* no da una función de H a H porque no h esta bien definida (no todos tienen hijos y algunos tienen varios hijos).
    - m(x)=*el hijo mayor de x* no define una función de H a H pero si define una función $m : P \to H$, donde P es el conjunto de los padres (porque cada padre tiene un y solo un hijo mayor). La imagen de m es el conjunto de primogénitos.

- H={seres humanos} y P ={países}
    - n(x) = *el país donde nació x* define una función $n: H \to P$. La imagen de n es todo P.
    - v(x) = *la persona mas vieja de x* define una función $v: P \to H$

- Funciones de H={seres humanos} a **R**.
    - e(x) = *la estatura de* x (hay que especificar las unidades)
    - p(x) = *el peso de* x

- Funciones de H={seres humanos} a $\mathbf{Z}^+$={enteros no negativos}
    - e(x) = *el año en que nació* x
    - h(x) = *el número de hijos de* x

- Funciones de C={curvas cerradas en el plano} a $\mathbf{R}^+$={reales no negativos}
    - p(x) = *el perímetro de* x.
    - a(x) = *el área encerrada por* x.



- Funciones reales (funciones de **R** a **R**)
  - $f(x) = x^2$ define una función f: **R**→ **R** cuya imagen es $\mathbf{R}^+$ ya que el cuadrado de cada numero real es un numero real no negativo.
  - $g(x) = \sqrt{x}$ no define una función de **R** en **R** porque los reales negativos no tienen raíz real, pero si define una función g: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ ya que cada real no negativo tiene una raíz no negativa.
  - $h(x) = \sqrt[3]{x}$ da una función h: **R** → **R** porque cada real tiene exactamente una raíz cubica real.
  - $c(x)={}^1/_{x^2+1}$ define una función de **R** en **R** (c esta bien definida porque el denominador no es 0 para ningún valor de x)
  - $s(x) = {}^1/_{x^2-1}$ no da una función de **R** en **R** (porque no esta definida en x=1 ni en x=-1) pero si define una función s: **R-**{-1,1} → **R**.
- Funciones de **R** a **Z**.
  - $e(x)=\lfloor x \rfloor$ llamada la *parte entera* de x, es el mayor entero que es menor o igual a x.
  - s(x)=1 si x>0, s(x)=-1 si x<0 y s(x)=0 si x=0 es la función que da el signo de x.
  - $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x es racional} \\ 0 & \text{si x es irracional} \end{cases}$ es una función que indica si x es racional o no.
- Funciones de **Q** a **N**.
  - d(x) = n si $x=\pm m/n$ no da una función de **Q** a **N** (porque x puede expresarse usando distintas fracciones m/n)
  - d(x) = n si $x=\pm m/n$, donde m/n es reducida si da una función de **Q** a **N** (porque cada racional puede escribirse de manera única como sólo una fracción reducida)

Diremos que dos funciones son **iguales** si tienen el mismo dominio, el mismo codominio y la misma regla de correspondencia.

Ejemplo. Si **R** = {números reales} y f, g: **R** → **R** son las funciones

$$f(x) = \text{sen}(2x) \qquad g(x) = 2\text{sen}(x)\cos(x)$$

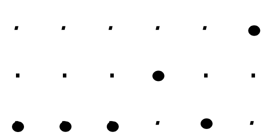
entonces f = g ya que sen(2x) = 2sen(x)cos(x) para todos los valores reales de x.

La **gráfica** de una función f : X → Y es el conjunto de parejas (x,y) en el producto XxY tales que y=f(x). Dos funciones son iguales si sus gráficas son iguales.

Ejemplo. Si A={1,2,3,4,5,6} y B={1,2,3} y f : A → B esta dada por

$$f(n)=\begin{cases} n/2 & \textit{si n es par} \\ 1 & \textit{si n es impar} \end{cases}$$

entonces la gráfica de f se ve así:



Si $f : X \rightarrow Y$ es una función y A es un subconjunto de X, la **imagen** de A es el conjunto $f(A)=\{ y \in Y \ / \ \exists x \in A \ , f(x)=y\}$. Si B es un subconjunto de Y, la **preimagen** (o **imagen inversa**) de B es el conjunto $f^{-1}(B)=\{ x \in X \ / \ f(x) \in B \}$.

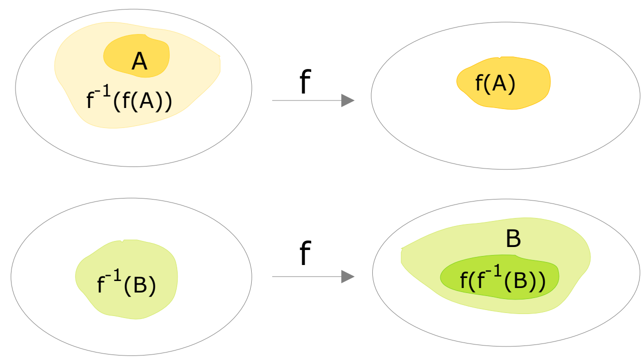
Ejemplo. Si f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ está dada por $f(x)=x^2$ entonces

- La imagen del intervalo [-2,3] es el intervalo [0,9], es decir $f[-2,3]=[0,9]$.
- La imagen inversa del intervalo [1,4] son los intervalos [1,2] y [-2,-1] así que $f^{-1}[1,4]=[-2,-1]U[1,2]$.
- La imagen inversa del intervalo [-3,4] es el intervalo [-2,2], es decir $f^{-1}[-3,4]=[-2,2]$
- La imagen inversa del intervalo [-3,-1] es el vacío, $f^{-1}[-3,-1]=\varnothing$

Lema. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función entonces

$A \subset X \Rightarrow A \subset f^{-1}(f(A))$

$B \subset Y \Rightarrow f(f^{-1}(B)) \subset B$



Demostración. Ver los dibujos.

Ejercicios.

1. Si E={especies de animales} encuentra varios ejemplos de funciones de E a $\mathbf{Z}^+$ y de E a $\mathbf{R}^+$.
2. Si S={planetas del sistema solar}

   a. Da dos funciones de S a $\mathbf{Z}^+$ b. Da cinco funciones de S a $\mathbf{R}^+$.
3. Si P={polígonos en el plano}

   a. Define dos funciones de P a $\mathbf{N}$ b. Define tres funciones de P a $\mathbf{R}$.

   c. ¿puedes dar una función de $\mathbf{N}$ a P? d. ¿y una función de $\mathbf{R}^+$ a P?
4. ¿Cuales de las siguientes relaciones definen funciones de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$? (cuidado con el orden)

   a. xRy si $x=-y$ b. xSy si $x=y^2$ c. xTy si $x=y^3$ d. xUy si $x^2-y^2=1$
5. Las siguientes reglas de correspondencia no definen funciones de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$
   ¿Cuales son los subconjuntos mas grandes de $\mathbf{R}$ donde sí definen funciones?

   a. $f(x) = {}^1/_x$ b. $g(x)= \sqrt{x+1}$ c. $h(x) = \sqrt{x^2-4}$ d. $k(x) = {}^1/_{x^2+x}$
6. Dibuja parte de las gráficas de las siguientes funciones:

   a. $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ dada por $f(n)=\lfloor n/2 \rfloor$ = la parte entera de n/2.

   b. $g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ dada por f(n) = el número mas pequeño que no divide a n.
7. Sean H={seres humanos}, P={papas} y M={mamas}

   Si f: $H \rightarrow H$ es la función f(h)= el papa de h , calcula:

   a. f(P) b. f(M) c. $f^{-1}(P)$ d. $f^{-1}(M)$

Composición de funciones.

Si $f : X \to Y$ y $g: Y \to Z$ son dos funciones, la **composición** de f y g es la función $g \circ f : X \to Z$ que se obtiene al aplicar primero f y luego g, es decir, $g \circ f(x) = g(f(x))$.

es decir, *f compuesta con g de x es g de f de x.* Observar que la composición de f con g se escribe *al revés que como se lee* ya que al aplicar $g \circ f$ primero se aplica f y luego g.

Ejemplos.

- Sea H={seres humanos}. Si f y g son las funciones de H en H dadas por
  $f(x) =$ *el papa de x* y $g(x) =$ *la mama de x* entonces
  - $g \circ f(x) = g(f(x)) =$ *la mamá del papá de x = la abuela paterna de x.*
  - $f \circ g(x) = f(g(x)) =$ *el papá de la mamá de x =* el *abuelo materno de x.*
  - $f \circ f(x) = f(f(x)) =$ *el papá del papá de x = el abuelo paterno de x.*
  - $g \circ g(x) = g(g(x)) =$ *la mamá de la mamá de x = la abuela materna de x.*

- Si f y g son las funciones de **R** en **R** dadas por $f(x)=3x+1$ y $g(x)=x^2$ entonces
  - $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(3x+1)=(3x+1)^2 = 9x^2+6x+1$
  - $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 3x^2+1$
  - $f \circ f(x) = f(f(x)) = f(3x+1) = 3(3x+1)+1 = 9x+4$
  - $g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x^2) = (x^2)^2 = x^4$

Lema. Si $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ son funciones entonces $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

así que la composición de funciones es *asociativa*.

Demostración. Por definición, para cada x en X,

$(h \circ g) \circ f(x) = h \circ g(f(x)) = h(g(f(x)))$ y $h \circ (g \circ f)(x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x)))$

así que las dos composiciones tienen la misma regla de correspondencia. □

Problemas.

8. Calcula todas las composiciones entre dos funciones de la siguiente lista (son 16):

$f(x)= 3x+1$ $g(x) = -x+2$ $h(x) = x^2$ $k(x) = 1/x$

(Algunas de estas funciones y sus composiciones no están definidas en todo R, pero lo que importa aquí es hallar la regla de correspondencia cuando si están definidas)

9. Encuentra dos funciones f,g: **R** → **R** (distintas y distintas de la identidad) tales que $f \circ g = g \circ f$

Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas

Una función $f : X \to Y$ es **inyectiva** o **uno a uno** si cada par de elementos distintos de A tienen imágenes distintas en B.

$$f \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow \forall x,x'\in A,\ x\neq x' \Rightarrow f(x)\neq f(x') \Leftrightarrow \forall x,x'\in A,\ f(x)=f(x') \Rightarrow x=x'$$

Una función $f : X \to Y$ es **suprayectiva** o **sobre**, si todos los elementos de B son imágenes de elementos de A.

$$f \text{ es suprayectiva} \Leftrightarrow \forall y\in B,\ \exists x\in A \text{ tal que } f(x)=y.$$

Una función $f : X \to Y$ es **biyectiva** si es inyectiva y suprayectiva.

Ejemplos.

- Si H={seres humanos} entonces la función $p: H \to H$ definida por $p(x)=$*el papa de x* no es inyectiva (ya que hay distintas personas con el mismo papa) y no es suprayectiva (ya que hay personas que no son papa de nadie).
- $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por $f(x) = 2x$ es inyectiva (ya que si $2x=2x'$ entonces $x=x'$) y es suprayectiva (ya que $f(x/2)=2(x/2)=x$).
- $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ dada por $f(n) = 2n$ es inyectiva (por la misma razón que el ejemplo anterior) pero no es suprayectiva (ya que los impares no son el doble de ningún entero).
- $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ dada por $g(n) = \lfloor n/2\rfloor$ es suprayectiva (ya que $g(2n) = \lfloor 2n/2\rfloor = n$) pero no es inyectiva (ya que $g(2)=\lfloor 2/2\rfloor=1$ y también $g(3)=\lfloor 3/2\rfloor=1$).

Afirmación. Si $f : X \to Y$ es una función entonces:

a. f es inyectiva si y solo si $\forall A \subset X,\ f^{-1}(f(A)) \subset A$

b. f es suprayectiva si y solo si $\forall B \subset Y,\ B \subset f(f^{-1}(B))$

c. f es biyectiva si y solo si $\forall A \subset X,\ f(X-A) = Y - f(A)$

Demostración. Todas son por contrapuesta.

a. Si f no es inyectiva entonces existen $x\neq x'$, tales que $f(x)=f(x')$. Si $A=\{x\}$, entonces $x' \notin A$ y $x' \in f^{-1}(f(A))$ por lo tanto $f^{-1}(f(A)) \not\subset A$.

Y si $f^{-1}(f(A)) \not\subset A$ entonces existe x tal que $x \in f^{-1}(f(A))$ y $x \notin A$, así que $f(x) \in f(A)$ y por lo tanto existe $a \in A$ tal que $f(x)=f(a)$ pero $x\neq a$, por lo tanto f no es inyectiva.

b. Si f no es suprayectiva entonces existe $y \in Y$, tal que $y \notin f(X) = f(f^{-1}(Y))$, así que $Y \not\subset f(f^{-1}(Y))$.

Si $B \not\subset f(f^{-1}(B))$ entonces existe b tal que $b \in B$ y $b \notin f(f^{-1}(B))$, así que b no está en la imagen de los elementos de X que caen en B, por lo tanto b no está en la imagen de f.

c. Si f no es sobre entonces $f(X) \neq Y$ por lo tanto $f(X-\varnothing) = f(X) \neq Y = Y-\varnothing = Y-f(\varnothing)$

Si f no es inyectiva entonces existen $x\neq x'$, tales que $f(x)=f(x')$. Por lo tanto $f(x') \in f(X-\{x\}) \not\subset Y-f(\{x\})$.

Si para cada subconjunto A de X se tiene que $f(X-A) = Y-f(A)$, entonces $f(X) = f(X-\varnothing) = Y-f(\varnothing) = Y-\varnothing = Y$ así que f es sobre. Y si a es cualquier elemento de A entonces $f(X-\{a\}) = f(X)-f(\{a\}) = f(X)-\{f(a)\}$ así que la imagen de un elemento distinto de a no puede ser igual a f(a). $\square$

Lema. Sean $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$ son funciones.

a. f y g inyectivas $\Rightarrow$ $g \circ f$ es inyectiva

b. f y g suprayectivas $\Rightarrow$ $g \circ f$ es suprayectiva

c. $g \circ f$ inyectiva $\Rightarrow$ f es inyectiva

d. $g \circ f$ suprayectiva $\Rightarrow$ g es suprayectiva

Demostración.

a. Para mostrar que $g \circ f$ es inyectiva hay que ver que si $x \neq x'$ entonces $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$. Como f es inyectiva, $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$. Y como g es inyectiva, $f(x) \neq f(x') \Rightarrow g(f(x)) \neq g(f(x'))$, así que $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$.

b. Supongamos ahora que f y g son sobre. Para mostrar que $g \circ f$ es sobre hay que ver que dado z en Z, existe x en X tal que $g \circ f(x)=z$. Como g es sobre, existe y en Y tal que $g(y)=z$ y como g es sobre existe x en X tal que $f(x)=y$. Así que $g(f(x))=g(y)=z$.

c. Tarea.

d. Tarea. $\square$

Problemas.

10. Sea H={seres humanos}. Puedes dar un ejemplos de una función $f: H \to H$ tal que...

a. F que sea inyectiva pero no suprayectiva?

b. F que sea suprayectiva pero no inyectiva?

c. F que sea biyectiva pero no sea la función identidad?

11. Dí cuales de estas funciones de **R** de **R** son inyectivas, cuales son suprayectivas y cuales son biyectivas. Justifica tus respuestas!

a. $f(x)=3x-5$ b. $g(x)=x^4$ c. $h(x)=x^3-x$ d. $k(x)=\sqrt[3]{x^7+1}$

12. Muestra que la función $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ dada por $f(n)=(-1)^n\lfloor n/2 \rfloor$ es una función biyectiva.

13. Muestra que la función $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Z}$ dada por $f(m/n)=2^m 3^n$, para cada fracción reducida m/n es una función inyectiva (**Q** es el conjunto de números racionales).

14. a. Demuestra que si $g \circ f$ es inyectiva entonces f debe ser inyectiva, pero g puede no serlo.

b. Demuestra que s $g \circ f$ es sobre entonces g debe ser sobre, pero f puede no serlo.

c. Muestra que $g \circ f$ puede ser biyectiva sin que f ni g sean biyectivas.

Funciones Inversas.

Si X es un conjunto, la **función identidad** en X es la función $Id_X: X \rightarrow X$ tal que $Id_X(x)=x$

La función identidad no hace nada, hay funciones que *deshacen* lo que hacen otras funciones:

Si $f : X \rightarrow Y$ es cualquier función, entonces $f \circ Id_X = f$ y $Id_Y \circ f = f$.

Una función $g : Y \rightarrow X$ es una **inversa** por la **izquierda** de f si $g \circ f = Id_X$.

Una función $h : Y \rightarrow X$ es una **inversa** por la **derecha** de f si $f \circ h = Id_Y$.

Una función que es inversa por la derecha y por la izquierda de f es una **inversa** de f.

Ejemplos.

- Sea $f: H \rightarrow P$ la función dada por f(x)=*el papa de* x.

  La función $g: P \rightarrow H$, g(x)=*el hijo mayor de x* es una inversa por la derecha de f ya que

  $f \circ g(x) = f(g(x))$ = f(*el hijo mayor de x*) = *el papa del hijo mayor de* x = x.

  La función g no es una inversa por la izquierda de f, ya que

  $g \circ f(x) = g(f(x))$ = g(el papa de x) = *el hijo mayor del papa de* x que no siempre es x.

  Otra inversa por la derecha de f es la función h(x)=*el hijo menor de x* ya que

  $f \circ h(x) = f(h(x))$ = *el papa del hijo menor de* x = x.

  Pero h no es una inversa por la izquierda de f por la misma razón que g no lo era.

- $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida como $f(x) = x+1$ entonces la función $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida como $g(x) = x-1$ es una inversa por la izquierda y también una inversa por la derecha de f, ya que

  $g \circ f(x) = g(x+1) = (x+1)-1 = x$ $\qquad$ $f \circ g(x) = f(x-1) = (x-1)+1 = x$

- $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R^+}$ la función dada por $f(x) = x^2$. Entonces la función $g: \mathbf{R^+} \rightarrow \mathbf{R}$

  dada por $g(x) = \sqrt{x}$ es una inversa por la derecha de f, ya que

  $f \circ g(x) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$ para toda x en $\mathbf{R^+}$.

  Pero g no es una inversa por la izquierda, ya que $g \circ f(x) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$ que *no* es igual a x.

- $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ la función dada por $f(n) = 2n$. Entonces la función $g: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ dada por

  $$g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si n es par} \\ n+1/2 & \text{si n es impar} \end{cases}$$

  entonces $g \circ f(n) = g(f(n)) = g(2n) = n$ así que g es una inversa por la izquierda de f.

  $$f \circ g(n) = f(g(n)) = \begin{cases} f(n/2) = 2(n/2) = n & \text{si n es par} \\ f(n+1/2) = 2(n+1/2) = n+1 & \text{si n es impar} \end{cases}$$

  así que $f \circ g \neq Id$ por lo tanto g no es una inversa derecha de f.

Teorema. Si $f: X \to Y$ es cualquier función entonces

a. f tiene una inversa por la izquierda $\Leftrightarrow$ f es inyectiva.

b. f tiene una inversa por la derecha $\Leftrightarrow$ f es suprayectiva.

c. f tiene inversa $\Leftrightarrow$ f es biyectiva.

Demostración.

a. ($\Rightarrow$) Si g es una inversa por la izquierda de f, entonces $g \circ f = Id_X$ que es una función inyectiva, así que por un lema anterior f debe ser inyectiva. □

a. ($\Leftarrow$) Supongamos ahora que f es inyectiva. Para deshacer lo que hizo f basta regresar cada $y=f(x)$ a x.

Definir $g:Y \to X$ como $g(y)= \begin{cases} x & \text{si } y = f(x) \text{ para alguna } x \text{ en } X \\ \text{cualquier } x \text{ en } X & \text{si } y \neq f(x) \text{ para toda } x \text{ en } X \end{cases}$

g esta bien definida porque para cada y existe a lo mas un x en X tal que $y=f(x)$.

Entonces para cada x en X, $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x$. Así que $g \circ f = Id_X$.

b. ($\Rightarrow$) Si h es una inversa por la derecha de f, entonces $f \circ h = Id_X$ que es una función suprayectiva, así que por un lema anterior f debe ser suprayectiva).

b. ($\Leftarrow$) Supongamos ahora que f es suprayectiva. Entonces para cada y en Y existe un x en X tal que $f(x)=y$.

Definir $h:Y \to X$ haciendo $h(y)=$ algún x tal que $f(x)=y$ (si hay varios x para el mismo y elijamos cualquiera de ellos). Entonces para cada y en Y, $f \circ h(y)=f(x)=y$ así que $f \circ h=Id_Y$.

c. Es consecuencia de a y b. □

Ejemplos.

- La función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por $f(x)=3x$ es biyectiva, así que tiene inversa. La inversa es $f^{-1}(x)=x/3$.
- La función $f: \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{Z}^+$ dada por $f(n)=3n$ es inyectiva pero no sobre, así que tiene inversa por la izquierda pero no por la derecha. Algunas inversas por la izquierda son $g(n)=\lfloor n/3 \rfloor$, $h(n)=\lfloor n+1/3 \rfloor$ y $k(n)=\lfloor n+2/3 \rfloor$.
- La función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por $f(x)=x^2$ no es inyectiva ni suprayectiva, así que no tiene inversa por la derecha ni por la izquierda.
- La función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ dada por $f(x)=x^2$ es sobre pero no inyectiva, así que tiene inversa por la derecha pero no por la izquierda. La inversa por la izquierda es $g(x)=\sqrt{x}$.
- La función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por $f(x)=x^3$ si es biyectiva, así que tiene inversa. La inversa es $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$.

Lema. Si una función tiene una inversa por la derecha y una por la izquierda entonces son iguales.

Demostración. Supongamos que $f: X \to Y$ tiene una inversa por la derecha $g: Y \to X$ y también una inversa por la izquierda $h: Y \to X$, es decir $f \circ g = Id_Y$ y $h \circ f = Id_X$.

Entonces $h \circ (f \circ g) = h \circ Id = h$ y $(h \circ f) \circ g = Id \circ g = g$

pero por asociatividad $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$ así que $h=g$. □

Este lema muestra que si una función f tiene una inversa por la derecha y una inversa por la izquierda, entonces f tiene una inversa, que es única, se le denota por f^{-1}.

Problemas.

15. Di cuales de las siguientes funciones de **Z** en **Z** tienen una inversa izquierda y/o derecha y encuéntralas.

a. $f(n)=3n+1$ b. $g(n)=\lfloor n/3 \rfloor$ c. $h(n)=n^3$

16. Di si la función f: **Z** → **Z** dada por

$$f(n) = \begin{cases} n-1 & \text{si } n \text{ es par} \\ n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

tiene inversa y si si, encuéntrala.

17. Encuentra las inversas de las siguientes funciones de **R** en **R** (en estos ejemplos es fácil hacerlo recordando únicamente que la inversa debe deshacer lo que hizo f).

a. $f(x)=3x+2$ b. $g(x)=1-x$ c. $h(x)=x^3+5$ d. $k(x)=\sqrt[3]{2x^5+1}$

18. a. Demuestra que si una función tiene inversa, entonces es única.

b. Muestra que esto no es cierto para inversas derechas o izquierdas.

Ejercicios de repaso.

19. E={elementos de la tabla periódica}

a. Da una relación de equivalencia en E.

b. Da una función de E a E.

c. Da una función de E a **N**.

d. Da una función de E a **R**.

20. Si **Q**={números racionales}

a. Da una relación en **Q** que sea reflexiva y simétrica pero no transitiva.

b. Da una relación en **Q** que sea reflexiva y transitiva pero no simétrica.

c. Da 3 relaciones de equivalencia *distintas* en **Q**.

21. Muestra que cada función se puede ver como la composición de alguna función suprayectiva con otra función inyectiva.

22. Muestra que la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es invertible, y encuentra su inversa.

25. Si **Z**={números enteros} di si las siguientes funciones son inyectivas y/o suprayectivas

a. $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ dada por $f(n) = \lfloor {}^{4}/_{5}\, n \rfloor$

b. $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ dada por $f(n) = \lfloor {}^{5}/_{4}\, n \rfloor$

23. Demuestra que si $f : X \to Y$ es una función y A y A' son subconjuntos de X entonces

a. $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$

b. $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$

c. $X - f(A) \subset f(X-A)$

Da ejemplos que muestren que en los casos b y c no se tienen que dar las igualdades.

24. Demuestra que si $f : X \to Y$ es una función y B y B' son subconjuntos de Y entonces

a. $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

b. $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

c. $f^{-1}(Y-B) = X - f^{-1}(B)$