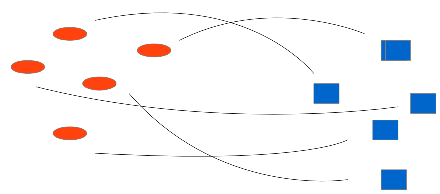
Cardinalidad

Los números se inventaron para contar, pero decir *que son los números* no es tan fácil.

Los números (naturales) son las clases de equivalencia formadas por todos los conjuntos con la misma cardinalidad (Fregue).

Intuitivamente, dos conjuntos A y B tienen la misma cardinalidad si tienen el mismo número de elementos, pero para esto necesitamos saber antes que son los números....
Es mejor empezar al revés, diciendo que los conjuntos A y B tienen la **misma cardinalidad** si podemos aparear los elementos de A con los elementos de B, es decir si existe una función biyectiva de A a B. En este caso escribimos |A|=|B|

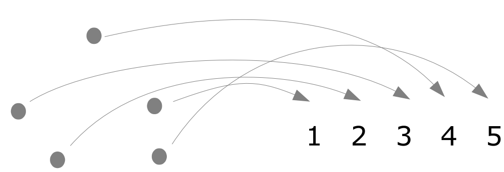
.



Tener la misma cardinalidad es una relación de equivalencia entre conjuntos (tarea). Podemos pensar entonces en los números naturales como las clases de equivalencia de conjuntos pequeños (*finitos)*.

También podemos pensar en los números naturales como un conjunto *ordenado* de símbolos, de modo que hay un primer símbolo y cada símbolo tiene un sucesor. En occidente usamos los símbolos 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,..., en oriente se usan otros símbolos, pero lo que importa no es como se escriben sino lo que significan.

Para contar los elementos de un conjunto A les asignamos números consecutivos, empezando con el 1 Si terminamos en algún número n decimos que el conjunto A es **finito** y que tiene **cardinalidad** n, y escribimos |A|=n. De otro modo decimos que A es **infinito.**



Si terminamos en algún número n decimos que el conjunto A es **finito** y que tiene **cardinalidad** n, y escribimos |A|=n. De otro modo decimos que A es **infinito.**

Vamos a probar algunas cosas que podrían parecer obvias, pero que no lo son (y no siempre son ciertas para los conjuntos infinitos).

Sea I_n ={1,2,3,...,n} el conjunto de los primeros n números naturales.

Lema. El resultado de contar los elementos de un conjunto finito no depende del orden en que lo hagamos (así que la cardinalidad de un conjunto finito está bien definida).

Demostración. Hay que demostrar que un conjunto A no puede tener simultáneamente la misma cardinalidad que I_m y I_n si $m\neq n$, y para esto basta ver que si $m\neq n$ entonces I_m y I_n no tienen la misma cardinalidad.
Procederemos por contradicción. Supongamos que existieran $m\neq n$ tales que I_m y I_n tienen la misma cardinalidad. Sea m el numero natural mas pequeño de modo que exista una función biyectiva $f: I_m \to I_n$ para algún $m<n$.
Si $f(m)=n$ entonces la función f envía a $\{1,2,...n-1\}$ a $\{1,2,...,m-1\}$ y da una biyección $f: I_{m-1}$ ☐ I_{n-1} .

Pero esto es imposible porque $m-1\neq n-1$ y m era el numero mas chico para el que existía una biyección entre $I_m \to I_n$ con $m<n$.

Si $f(m)\neq n$ entonces (como f es biyectiva existe un o tal que $f(o)=n$. Definamos $g: I_m \to I_n$ como

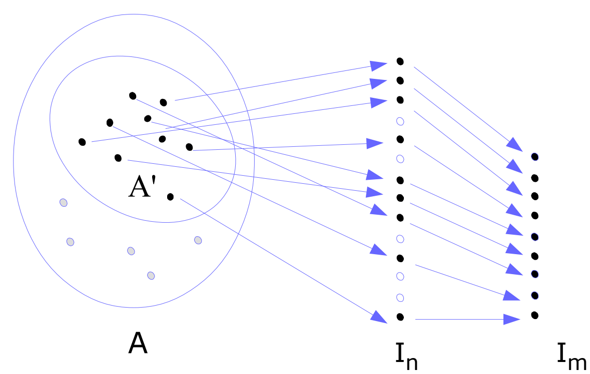
$$g(i) = \begin{cases} f(i) & \text{si } i\neq o,m \\ f(m) & \text{si } i=o \\ f(o) & \text{si } i=m \end{cases}$$

(g es casi igual a f, solo intercambia las imágenes de o y m para que $g(m)=n$). Ahora $g: I_m \to I_n$ es una función biyectiva tal que $g(n)=m$, y estamos en el caso anterior, que es imposible. □

Si A y B son conjuntos, diremos que la **cardinalidad** de A es **menor o igual** que la de B y escribiremos $|A|\leq|B|$ si existe una función inyectiva de A a B,
Si $|A|\leq|B|$ pero $|A|\neq|B|$ entonces diremos que la **cardinalidad** de A es **menor** qoe la de B y escribiremos $|A|<|B|$.

Lema. Si A es un conjunto finito y A' es un subconjunto propio de A entonces $|A'|<|A|$.

Demostración. Tomemos una función biyecctiva $f: A \to I_n$.
Entonces $f|_{A'}: A' \to I_n$ es una función inyectiva, cuya imagen $f(A')$ es un subconjunto propio de I_n .
Ahora podemos modificar f para obtener una función biyectiva $g: A' \to I_m$ para algún $m<n$, componiendo a f con una función de I_n a I_n que 'baja' para ocupar los lugares desocupados de I_n se muestra en el dibujo: □



Lema. Sean A y B conjuntos finitos. Si existe una función inyectiva $f: A \to B$ entonces $|A|\leq|B|$. Si existe una función suprayectiva $g: A \to B$ entonces $|A|\geq|B|$.

Demostración. $f: A \to B$ es inyectiva entonces f da una función biyectiva de A a $f(A)$, donde $f(A)$ es B o es un subconjunto propio B' de B. En el primer caso $|A|=|B|$ y en el segundo por el lema anterior $|A|=|B'|<|B|$.
Si $f:A \to B$ es suprayectiva, entonces existe una función inyectiva g de B a un subconjunto A' de A (g se puede definir eligiendo para cada b en B un elemento a en A tal que $f(a)=b$). Así que por el caso anterior $|B|\leq|A'|\leq|A|$.

Corolario. Si A y B son conjuntos *finitos* con la misma cardinalidad y f: A → B es una función entonces son equivalentes:

- f es inyectiva
- f es suprayectiva
- f es biyectiva

Demostración. Si f: A → B fuera inyectiva y no fuera suprayectiva, entonces existiría una función biyectiva de A a un subconjunto propio B' de B, así que |A|=|B'|<|B|.
Si f: A → B fuera suprayectiva y no fuera inyectiva, entonces existiría una función biyectiva g de B a un subconjunto propio A' de A. Así que |B|=|A'|<|A|.

El corolario *no* vale para conjuntos infinitos:

Ejemplo. La función f:Z → Z definida por f(n)=2n es inyectiva pero no es suprayectiva
La función f:Z → Z definida por f(n)=|n| es suprayectiva pero no es inyectiva

Problemas.

1. Muestra que *tener la misma cardinalidad* es una relación de equivalencia entre conjuntos.

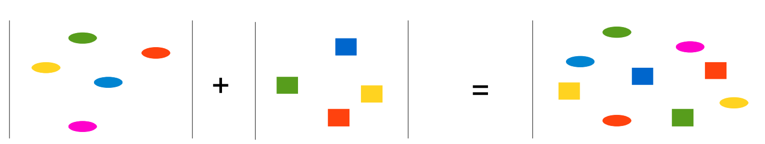
2. Si A y B son conjuntos finitos, demuestra que |A∪B|=|A|+|B|-|A∩B|.

3. Si A y B son conjuntos finitos y existen funciones inyectivas f: A → B y g: B → A, demuestra que f y g son funciones biyectivas.

Los números naturales.

Los números naturales no son solo símbolos que se usan para contar: se pueden sumar y multiplicar, y estas operaciones están relacionadas con la cardinalidad de los conjuntos.

La suma de dos números naturales da la cardinalidad de la unión de dos conjuntos ajenos



Y la multiplicación de dos números naturales da la cardinalidad del *producto* de dos conjuntos.

Es posible *definir* a los números naturales usando conjuntos, de manera recursiva (cada numero se define a partir de los anteriores) por ejemplo podemos definir:

0 = ∅
1 = {∅}
2 = {{∅}}
3 = {({∅}})
...
n = {...({∅}}...)

Esta definición es muy simple, pero no es muy útil (¿como contarían y como sumarían?).
Otra manera mas útil de definir a los números naturales sería así:

0 = ∅
1 = {0} = { ∅ }
2 = {0,1} = { ∅, {∅} }
3 = {0,1,2} = { ∅, {∅}, {∅,{∅} }
4 = {0,1,2,3} = { ∅, {∅}, {∅,{∅}}, {∅,{∅},{∅,{∅}}} }
...
n+1 = {0,1,2,...,n}

Esta definición tiene la ventaja de que el conjunto definido como n tiene n elementos, así que podemos decir que un conjunto A tiene cardinalidad n si existe una biyección de A al conjunto n.

Observar que con los números definidos de esta manera podemos decir que m<n ⇔ m ∈ K

Problemas.

4. Muestra que si se define 0 = ∅ y se define *recursivamente* n+1= nU{n} se obtiene la misma definición de los números naturales dada arriba.

5. Si definimos a los naturales usando conjuntos como arriba ¿como se puede definir la suma?

Los números enteros.

Los números naturales pueden sumarse y multiplicarse, pero no siempre pueden restarse. Para hacerlo necesitamos los números negativos. Los **números enteros** son los números naturales junto con sus negativos y el 0 **Z** = {...,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,...}

¿Será posible describir a los números negativos a partir de los naturales, sin usar la resta?

Una manera de decir m-n=m'-n' es decir que m+n'=m'+n, así podemos definir a los enteros como *clases de equivalencia* de parejas de naturales, usando la suma:

En el conjunto de parejas de naturales **N**x**N** tomamos la relación (m,n)~(m',n') Œ m+n' = m'+n obtenemos una relación de equivalencia (tarea) y la clase de equivalencia de (m,n) representa al numero entero m-n.

Ejemplos. (1,2)~(3,4) ya que 1+4=3+2. La clase de (1,2) representa al entero -1.
(3,1)~(6,4) ya que 3+4=6+1. La clase de (3,1) representa al entero 2.

Esta definición de los enteros como clases de equivalencia de pares de naturales permite definir la suma, la resta y la multiplicación de enteros usando únicamente la suma y el producto de números naturales:

- (a,b) + (c,d) = (a+c,b+d)
- (a,b) - (c,d) = (a+d,b+c)
- (a,b) · (c,d) = (ac+bd,ad+bc)

Es fácil mostrar que estas operaciones en las parejas de naturales corresponden a la suma, resta y multiplicación de los enteros. Por ejemplo, (a,b)+(c,d) = (a+c,b+d) corresponde a la suma porque (a+c)-(b+d) = (a-b)-(c-d).

Problemas.

6. Demuestra que la resta y el producto de parejas definidos arriba corresponden a la resta y producto de enteros.

7.¿Que pasa si repetimos el truco que usamos para definir a los enteros como parejas de naturales, pero ahora usando parejas de enteros? Muestra que la relación en **Z**x**Z** dada por (m,n)~(m',n') ⇔ m+n' = m'+n es una relación de equivalencia. ¿Que números representan las clases de equivalencia?

Números racionales.

Los números enteros pueden sumarse, restarse y multiplicarse, pero no siempre pueden dividirse. Para esto necesitamos *fracciones*.

Los **racionales** son números de la forma m/n, donde m y n son enteros, n≠0.

m/n representa a un número que multiplicado por n da m, así que m/n y m'/n' representan al mismo número si y sólo si mn'=m'n (ya que si multiplicamos a m/n y a m'/n' por nn' obtenemos mn' y m'n respectivamente).

Ejemplos:

- 6/9=2/3 ya que 6·3=2·9
- 7/2≠31/9 ya que 7·9≠2·31
- 7/4<16/9 ya que 7·9<4·16

Los números racionales se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir y el resultado siempre es un número racional (si no se divide entre 0).

La suma y resta son sencillas cuando las fracciones tienen el mismo denominador: $a/b+c/b=(a+c)/b$, y si no es así hay que usar fracciones equivalentes con el mismo denominador: $a/b\pm c/d=ad/bd\pm bc/bd = (ad\pm bc)/bd$.

La multiplicación y la división de fracciones están determinadas por la multiplicación de los números enteros:

$(a/b)\cdot(c/d) = ac/bd$ ya que $((a/b)\cdot(c/d))\cdot bd= (a/b)b\cdot(c/d)\cdot d = ac = (ac/bd)\cdot bd$

Así como m/n es un número que multiplicado por n da m, $(a/b)/(c/d)$ debería ser un número que multiplicado por c/d de a/b. Como $(c/d)\cdot(ad/bc) = cad/dbc = a/b$ entonces $(a/b)/(c/d) = ad/bc$

Podemos representar a los racionales como pares de números enteros (m,n), donde $n\neq 0$ y además podemos suponer que n es positivo. Si en el conjunto $\mathbf{Z}\times\mathbf{N} = \{ (m,n) / m\in\mathbf{Z}, n\in\mathbf{N} \}$ consideramos la relación de equivalencia $(m,n)\sim(m',n')$ si $m\cdot n' = m'\cdot n$ entonces las clases de equivalencia corresponden a los números racionales.

Ejemplo. $(6,9)\sim(4,6)$ ya que $6\cdot 6=4\cdot 9$ y la clase de equivalencia de $(6,9)$ representa al racional $2/3$.

Al representar a los racionales como clases de equivalencia de parejas, las operaciones +,-,x,/ se traducen a operaciones en las parejas:

- $(a,b) \cdot (c,d) = (a\cdot c,b\cdot d)$
- $(a,b) / (c,d) = (a\cdot d,b\cdot c)$
- $(a,b) + (c,d) = (ad+bc,bd)$
- $(a,b) - (c,d) = (ad-bc,bd)$

Problemas.

8. Ordena los siguientes números racionales en orden creciente *sin usar calculadora y sin hacer divisiones*. $5/7$ $7/9$ $8/11$ $10/13$ $13/17$

9. Muestra que la relación en $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ dada por $(m,n)\sim(m',n') \Leftrightarrow m+n' = m'+n$ es una relación de equivalencia. ¿Que números representan las clases de equivalencia?

Los números reales

Los números naturales permiten *contar* y los números racionales permiten *repartir*, pero si queremos medir con precisión necesitamos mas números, como descubrieron los griegos al demostrar que $\sqrt{2}$ no es racional *(ver la demostración en las notas de lógica).*

Cada número racional puede describirse usando un par de números enteros, pero para determinar a un número real se necesita mucha mas información. Los reales pueden describirse exactamente usando una *expansión decimal*, posiblemente infinita.

Ejemplos:

- 1/4 = 0.25
- 1/3 = 0.33333333333333333333333333333333333333333333.....
- 9/7 = 1.285714285714285714285714285714285714285714....
- $\sqrt{2}$ = 1.4142135623730950488016887242096980785696718 7.....

La expansión decimal de cada número real es única, si evitamos colas de 9's:

Ejemplos:

- 1 = 0.9999999999999999999999999999999999999.....
- 12.34567 = 12.3456999999999999999999999999999.....

A los números reales que no son racionales se les llama *irracionales* y al conjunto de los números irracionales se le denota por **I**. La existencia de un numero irracional implica qe hay al menos tantos irracionales como racionales:

Lema. Existe una función inyectiva de **Q** a **I** , por lo tanto |**Q**|≤|**I**|.

Demostración. Podemos dar una función inyectiva de **Q** a **I** sumándole a todos los números racionales el mismo número irracional (por ejemplo, haciendo $f(x)=x+\sqrt{2}$)

Esta función esta bien definida porque al sumarle a un numero racional un número irracional siempre obtenemos un numero irracional (tarea) y la función es inyectiva porque si $x+\sqrt{2}=x'+\sqrt{2}$ entonces $x=x'$.

Problemas.

10. Encuentra las expansiones decimales de estos números

a. 1/9 b. 1/11 c. 5/13

11. a. Demuestra que la suma de un racional y un irracional es irracional

b. Demuestra que el producto de un racional y un irracional es irracional.

c. Demuestra que el cociente de un racional y un irracional es irracional.

12. a. ¿Es posible que la suma, la resta o el producto de dos irracionales sea racional?

b. ¿Es posible que la suma y la resta de dos irracionales sean ambos racionales?

c. ¿Es posible que el producto y el cociente de dos irracionales sean ambos racionales?

En cada caso da ejemplos de que es posible o demuestra que no es posible.

Conjuntos numerables y no numerables

Un conjunto infinito A se llama **numerable** si tiene la misma cardinalidad que **N**, es decir, si existe una biyección de A a **N.**

A es numerable si podemos recorrer sus elementos, uno por uno, de modo que *eventualmente* pasemos por cada uno de ellos, aunque nunca acabemos de contarlos!

Ejemplos.

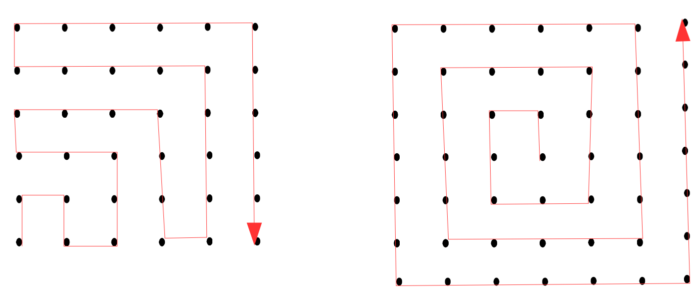
- **Z** es numerable, ya que podemos recorrer sus elementos en este orden: 0,1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,....

  y este recorrido da una función biyectiva f: **N** □ **Z** donde f(1)=0, f(2)=1, f(3)=-1, f(4)=2, f(5)=-2,...

  Hay muchas otras maneras de hacerlo, pero no podemos hacerlo en un orden arbitrario: por ejemplo, si queremos hacerlo pasando primero por todos los números positivos nunca llegaremos a los negativos, así que no obtendremos una biyección de **N** a A.

- **N**x**N** y **Z**x**Z** son numerables

  Aquí se muestran dos posibles recorridos de **N**x**N** y **Z**x**Z**:

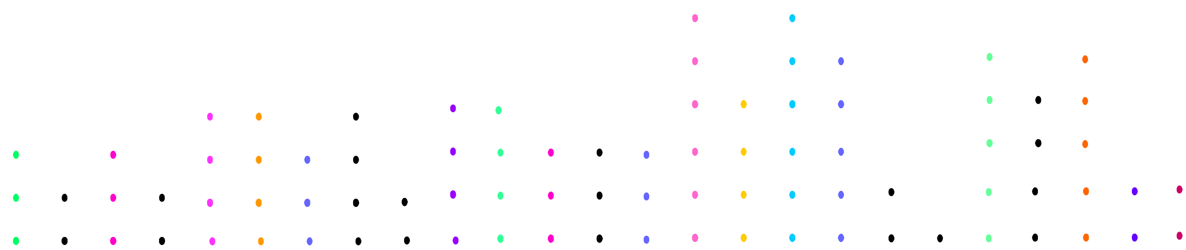


Se dice que un conjunto A es **a lo mas numerable** si A es finito o es numerable.

Teorema.

1. La unión de cualquier familia numerable de conjuntos finitos es a lo mas numerable.
2. La unión de cualquier familia finita de conjuntos numerables es numerable.
3. La unión de cualquier familia numerable de conjuntos numerables es numerable.

Demostración. En el caso 1 pongamos a los elementos de cada conjunto finito formando una columna y en el caso 2 pongamos los elementos de cada conjunto numerable formando una fila. En ambos casos tendremos una colección numerable de columnas, cada una con una cantidad finita de elementos. Hay que ver que podemos recorrer todos los elementos de todas las columnas, pasando eventualmente por cada uno.



Esto es fácil: como las columnas tienen una cantidad finita de elementos, podemos irlas recorriendo una por una. Como los conjuntos no tienen que ser ajenos, la función que obtenemos de N a la unión de los conjuntos puede no ser inyectiva, pero esto es fácil de arreglar, ya que podemos ir numerando los elementos brincándonos los repetidos que ya hayamos contado antes.

En el caso 3, podemos acomodar a los elementos de cada conjunto formando una fila numerable, y podemos acomodar los conjuntos uno encima del anterior, para formar un arreglo como **N**x**N**, y ya sabemos como numerar a los elementos de este conjunto. Como en el caso anterior, los conjuntos no tienen que ser ajenos, pero podemos evitar contar dos veces el mismo elemento brincándonos los que hayamos contado antes.

Ejemplos:

- **Q** es numerable, ya que podemos ver a las fracciones a/b como parejas (a,b) en ZxN. A la hora de recorrer ZxN podemos pasar por parejas distintas que den la misma fracción, pero podemos brincarnos las que ya hayamos contado.
- Los **números algebraicos** son los números que son soluciones de algún polinomio con coeficientes enteros.

  Los números algebraicos incluyen a los números racionales, a todas sus raíces n-esimas y todas sus combinaciones (sumas y restas, productos, cocientes y raíces), como $\sqrt{\sqrt{3}/5+2/7}$.

  El conjunto de números algebraicos es numerable, ya que existe una cantidad numerable de polinomios con coeficientes enteros y cada uno tiene una cantidad finita de raíces. (tarea).

Ejemplo. Consideremos los conjuntos que se obtienen al multiplicar al conjunto {0,1} por si mismo:

$\{0,1\}^1 = \{0,1\}$

$\{0,1\}^2 = \{0,1\}\times\{0,1\} = \{(0,0),(0,1), (1,0), (1,1)\}$

$\{0,1\}^3 = \{0,1\}\times\{0,1\}\times\{0,1\} = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$

. . .

$\{0,1\}^n = \{ (a_1,a_2,\ldots,a_n) \ / \ a_i=0 \text{ o } 1\}$ = el conjunto de funciones del conjunto {1,2,...,n} al conjunto {0,1}.

Para cada número natural n, el conjunto $\{0,1\}^n$ tiene 2^n elementos, ya que cada elemento de $\{0,1\}^n$ tiene n coordenadas y cada coordenada puede tomar 2 valores.

Consideremos ahora un conjunto cuyos elementos tienen una *infinidad* de coordenadas de 0,s y 1's, una por cada número natural: este es el conjunto de **sucesiones** de 0's y 1's, y es denotado por $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$.

Las sucesiones de 0´s y 1´corresponden a todas las funciones de **N** a {0,1}.

Afirmación. El conjunto $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ de todas las sucesiones de 0's y 1's *no* es numerable.

Demostración. Si el conjunto de sucesiones de 0's y 1's fuera numerable, podríamos hacer una lista de todas las sucesiones $S_1,S_2,\ldots,S_n,\ldots$ donde $S_i= (a_{i1},a_{i2},a_{i3},\ldots,a_{in},\ldots)$.

Veamos que sin importar como las hayamos ordenado, deben haber sucesiones que se nos escaparon. Tomemos una sucesión $S= (b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n,\ldots)$ de modo que para cada i, la entrada b_i sea *distinta* de la entrada a_{ii} de la sucesión S_i. Entonces S es *distinta* de todas las sucesiones S_i de la lista, porque su entrada i es distinta.

Problemas.

13. ¿Cuantos elementos tiene el conjunto $\{2\}^{10}$? ¿y el conjunto $\{a,b,c\}^4$? ¿Y $\{a,b,c,d\}^3$?

14. Demuestra que si A es un conjunto finito entonces $|A|<|2^A|$ donde 2^A es el conjunto potencia formado por los subconjuntos de A.

15. Demuestra que cada subconjunto de un conjunto numerable es a lo mas numerable.

16. Muestra que el conjunto de todos los números reales *no* es numerable. (hint: basta ver que los números reales entre 0 y 1 no son numerables. Estos números tienen expresiones decimales infinitas, como 0.3410755427474052501... y se puede usar la misma idea de la demostración que $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ no es numerable).

17. Demuestra que solo existen una cantidad numerable de polinomios con coeficientes enteros, y por los tanto solo hay una cantidad numerable de números algebraicos.

18. ¿El conjunto de sucesiones de números naturales que eventualmente se hacen 0, es decir $\{(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,0,0,0,0\ldots) \ / \ a_i \in \mathbf{N} \}$ es numerable o no es numerable? *Justifica tu respuesta.*