Combinatoria

Contar los elementos de un conjunto puede ser, desde muy fácil hasta muy difícil, dependiendo del conjunto. En algunos casos sencillos hay formulas para contar, pero en general hay que empezar por entender bien el problema y pensar cuidadosamente para llegar al resultado correcto.

Ejemplos:

- ¿Cuantos números naturales de a lo mas 4 dígitos hay?

  El conjunto de números a lo mas 4 cifras es el conjunto de números naturales menores o iguales a 9,999, y hay 9,999 de estos números.

- ¿Cuantos números naturales de 4 dígitos hay?

  Son los números del 1,000 al 9,999, o sea 9,000 números.

- ¿Cuantas "palabras" se pueden formar con 4 letras de un alfabeto de 27 letras?

  (No importa que las "palabras" no quieran decir nada o que no se puedan pronunciar). Cada "palabra" esta formada por 4 letras, para cada una hay 27 posibilidades, así que el numero de palabras posibles es $27x27x27x27=27^4=$ 531,441 palabras.

- ¿Cuantos números naturales de 4 dígitos *distintos* hay?

  El primer dígito puede ser cualquiera del 1 al 9, el segundo dígito puede ser cualquiera del 0 al 9 que no se haya usado en el primero, el tercer dígito cualquiera del 0 al 9 que no se haya usado en los primeros dos, y el cuarto digito cualquiera del 0 al 9 que no se haya sado en los 3 primeros. Así que en total hay 9x9x8x7 = 4,536 números

- ¿Cuantas "palabras" se pueden formar con 4 letras *distintas* del alfabeto?

  La primera letra puede ser cualquiera de las 27 del alfabeto, la segunda puede ser cualquiera, menos la que ya usamos, la tercera puede ser cualquiera menos las dos primeras, etc. Así que en total hay 27x26x25x24 = 421,200 palabras.

- ¿De cuantas maneras distintas se pueden ordenar 8 alumnos libros en una fila?

  En el primer lugar de la fila se puede poner cualquiera de los 8 libros, en el segundo lugar cualquiera de los 7 restantes, en el tercero cualquiera de los 6 que faltan, etc. Así que se pueden acomodar de 8X7x6x5x4x3x2x1 = 40,320 maneras distintas.

- ¿Cuantas placas de coche formadas por 3 números seguidos de 3 letras puede haber? (los números van del 0 al 9 y hay 27 letras)

  Hay 10 posibilidades para el primer numero, 10 para el segundo y 10 para el tercero, y hay posibilidades para la primera letra, 27 para la segunda y 27 para la tercera. En total hay 10x10x10x27x27x27= 19,683,000 posibles placas.

- ¿Cuantas "palabras" se pueden formar con 4 letras de un alfabeto de 27 letras, que contengan exactamente una vocal?

  Hay 5 vocales y 22 consonantes. La vocal puede estar en alguno de los 4 lugares, y en los otros lugares deben ser consonantes. Con la vocal en el primer lugar hay 5x22x22x22 palabras. Con la vocal en el segundo lugar hay 22x5x22x22 palabras, en el tercer lugar hay 22x22x5x22 palabras y en el cuarto hay 22x22x22x5 palabras. Así que en total hay 4x(5x22x22x22) = 212,960 palabras.

Las **ordenaciones con repetición** de n objetos tomados de r en r son las listas $(a_1,a_2,\ldots,a_r)$ donde los a_i's son objetos *que pueden repetirse*.

Ejemplo. Las ordenaciones con repetición de los elementos de {0,1} tomados de 2 en 2 son

(0,0,) (0,1) (1,0) (1,1).

Las ordenaciones con repetición de los elementos de {0,1} tomados de 3 en 3 son

(0,0,0)(0,0,1)(0,1,0)(1,0,0)(1,1,0)(1,0,1)(0,1,1)(1,1,1).

Lema. El numero de ordenaciones con repetición de n objetos tomados de r en r es n^r.

Demostración. En cada lugar de una lista puede aparecer cualquiera de los n objetos, así que en total hay $\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ \ldots \cdot n}_{\text{r veces}} = n^r$ listas. □

Ejemplos.

- Hay 2^4=16 ordenaciones con repetición de 2 objetos tomados de 4 en 4.
- ¿Cuantas palabras de 4 letras podrían formarse en un alfabeto de 27 letras? Son las ordenaciones con repetición de 27letras tomadas de 4 en 4. Hay en total 27^4= 531441

Las **ordenaciones** (sin repetición) de n objetos tomados de r en r son las listas $(a_1,a_2,...,a_r)$ donde los a_i's son distintos objetos.

Ejemplo. Sea A={1,2,3}

Las ordenaciones de los elementos de A tomados de 2 en 2 son (1,2)(1,3)(2,3)(2,1)(3,1)(3,2)

Las ordenaciones de los elementos de A tomados de 3 en 3 son (1,2,3)(1,3,2)(2,1,3)(2,3,1)(3,1,2)(3,2,1)

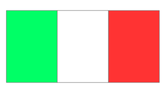
No hay ordenaciones los elementos de A tomados de 4 en 4 (porque tendrían que repetirse en la lista)

Lema. El número de ordenaciones de n objetos tomados de r en r es $O^r_n = \frac{n!}{n-r!}$

Demostración. En el primer lugar de una lista puede aparecer cualquiera de los n objetos, en el segundo solo puede aparecer cualquiera de los n-1 restantes, en el tercer lugar cualquiera de los n-2 que quedan, y así sucesivamente, hasta el r-esimo lugar lugar, donde pueden aparecer los n-(r-1) que no habían aparecido antes. En total hay n x (n-1) x (n-2) x ..x (n-r+1) = n!/n-r! listas distintas. □

Ejemplos.

- ¿Cuantas "banderas" se pueden hacer de 3 rectángulos con 8 colores distintos?



  Para el primer rectángulo hay 8 posibilidades, para el segundo hay 7 y para el tercero hay 6, en total hay 8x7x6 = 336 banderas posibles.

- Las palabras de 4 letras distintas en español son las ordenaciones de 27 letras tomadas de 4 en 4. Hay en total O^{27}_4= 27!/23!=27x26x25x24 = 421,200 palabras.

Si A es un conjunto, una **permutación** de los elementos de A es una ordenación (sin repetición) de todos los elementos de A.

Ejemplos.

- Las permutaciones del conjunto {1,2,3} son (1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1).

- ¿Cuantas permutaciones del conjunto {#,%,@,&,!,^,*} existen?

  El conjunto tiene 7 elementos, sus permutaciones son las ordenaciones de 7 elementos de un conjunto de 7 elementos, o sea 7!= 5,040 permutaciones.

Lema. Si A es un conjunto con n elementos entonces hay una correspondencia biunívoca entre:

1. Las ordenaciones con repetición de los elementos de A tomados de r en r y las funciones de {1,2,3,..,r} a A.
2. Las ordenaciones de los elementos de A tomados de r en r y las funciones inyectivas de {1,2,3,..,r} a A.
3. Las permutaciones de los elementos de A y las funciones biyectivas de {1,2,3,..,n} a A.

Demostración. Tarea.

Problemas.

1. a. ¿Cuantos números pares de 4 dígitos hay?

   b. ¿Cuantos números de 4 dígitos pares hay?

2. Una joven tiene 7 blusas, 3 suéteres, 2 pantalones y 4 faldas ¿de cuantas maneras las puede combinar? *(ojo: hay cosas que se tienen que poner a fuerzas y otras no, y hay cosas que no se pueden poner juntas).*

3. ¿Cuantas palabras de 4 letras sin consonantes ni vocales seguidas hay?

   ¿Cuantas palabras de 4 letras sin vocales seguidas hay? (*difícil*)

4. Si a un hotel que tiene 9 habitaciones vacías llegan 7 huéspedes ¿de cuantas maneras distintas se pueden acomodar (uno por habitación)?

5. Si hay 6 muchachas y 6 muchachos en una fiesta, de cuantas maneras distintas se pueden emparejar (de una y uno) para que todos bailen? (*no son 36*)

6. En el código Morse, que se usó por mucho tiempo para transmitir mensajes, se usaban combinaciones de sonidos cortos (puntos) y sonidos largos (rayas) para transmitir las letras. ¿Cuantas letras se pueden codificar con secuencias de a lo mas 4 puntos y rayas?

   ·   · -   - · -   · - -   · · · -   · - · -

7. Si A={a,b,c,d,e,f} y B={1,2,3,4,5,6,7,8}

a. ¿Cuantas funciones biyectivas hay de A a A?

b. ¿Cuantas funciones inyectivas hay de A a B?

c. ¿Cuantas funciones suprayectivas habrá de B a A? (*solo para valientes*)

8. ¿De cuantas maneras distintas se pueden ordenar 10 libros en un estante?

Combinaciones.

Las ordenaciones son maneras de ordenar los elementos de un conjunto en listas de un tamaño fijo (donde el orden importa). Las **combinaciones** son maneras de elegir elementos de un conjunto para formar subconjuntos de un tamaño fijo (donde el orden no importa).

Ya sabemos como contar las ordenaciones y queremos ver como contar las combinaciones, pero empecemos por contar los subconjuntos de un conjunto con n elementos.

Lema. Un conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos.

Demostración. Hay tantos subconjuntos como funciones de A al conjunto {0,1}, ya que para cada subconjunto S de A, podemos definir una función F_S: A → {0,1} que dice cuales elementos están en S:

$$f_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S \\ 0 & \text{si } x \notin S \end{cases}$$

Recíprocamente, cada función f: A → {0,1} define un subconjunto S de A cuyos elementos son los elementos de A donde f vale 1.

Como las funciones de A a {0,1} están dadas por las listas de sus valores en los n elementos de A, y cada elemento puede tomar 2 valores, hay 2^n posibles listas, así que hay 2^n funciones de A a {0,1} y por lo tanto A tiene 2^n subconjuntos.

Ahora queremos contar el numero de subconjuntos de A con un número fijo de elementos.

Ejemplo. Sea A={1,2,3,4,5}

- ¿Cuantos subconjuntos de 1 elemento tiene A ?

  Hay tantos subconjuntos de 1 elemento de A como elementos de A, así que son 5 subconjuntos.

- ¿Cuantos subconjuntos de 4 elementos tiene A?

  Como A tiene 5 elementos, cada subconjunto de 4 elementos esta determinado por el elemento de A que falta, así que A tiene 5 subconjuntos de 4 elementos.

- ¿Cuantos subconjuntos de 2 elementos tiene A?

  Para formar un subconjunto de 2 elementos el primer elemento se puede elegir de 5 maneras distintas y el segundo de 4 maneras distintas. Pero en un conjunto el orden de los elementos no importa: el conjunto {a,b} es igual al conjunto {b,a}. Así que hay 5x4/2=10 subconjuntos.

- ¿Cuantos subconjuntos de 3 elementos tiene A?

  Podemos calcularlo de dos maneras distintas:

1.Como A tiene 5 elementos, el numero de subconjuntos de 3 elementos de A es el mismo que el numero de sus complementos, que son los subconjuntos de 2 elementos, que ya vimos que era 10.

2. Para formar un subconjunto de 3 elementos el primer elemento se puede elegir de 5 maneras distintas, el segundo de 4 maneras distintas y el tercero de 3 maneras distintas. Pero en un conjunto el orden de los elementos no importa: {a,b,c}={a,c,b}={b,a,c}={b,c,a}={c,a,b}={c,b,a] hay 6 ordenes distintos para elegir a los mismos 3 elementos, así que hay 5x4x3/6=10 subconjuntos.

Los subconjuntos de r elementos de un conjunto con n elementos son las **combinaciones** de n objetos tomados de r en r. El número de combinaciones de r elementos de un conjunto de n elementos es denotado por

$$C^n_r \quad \text{o por} \quad \binom{n}{r}$$

Lema. Para cada r≤n, $C^n_r = C^n_{n-r}$

Demostración. En un conjunto con n elementos, el numero de subconjuntos de r elementos es igual al numero de subconjuntos con n-r elementos, ya que la función que envía a cada subconjunto a su complemento es biyectiva. □

Lema. Si r≤n entonces $O^n_r = C^n_r \times O^r_r$

Demostración. Para obtener una ordenación de r elementos, podemos comenzar por elegir un subconjunto de r elementos y luego ordenarlos. □

Corolario. Para cada r≤n,

$$C^n_r = \frac{n!}{r!\ n-r!} = n(n-1)(n-2)...(n-r+1) \ / \ r(r-1)(r-2)...1$$

Demostración. Por el lema anterior, $C^n_r = O^n_r \ / \ O^r_r = (n! \ / \ n-r! \ ) \ / \ r! = n! \ / \ n-r! \ r!$ □

Ejemplos.

- ¿Cuantos subconjuntos de 4 elementos tiene un conjunto de 7 elementos?

  Tiene C^7_4 = 7!/4!3! = 7x6x5 / 3x2x1 = 35 subconjuntos.

- ¿Cuantos subconjuntos de 5 elementos tiene un conjunto de 10 elementos?

  Tiene C^{10}_5 = 10!/5!5! = 10x9x8x7x6 / 5x4x3x2x1 = 252 subconjuntos.

- ¿Cuantos equipos distintos de basket (5 integrantes) se pueden formar con 8 jugadores?

  Tantos como subconjuntos de 5 elementos de un conjunto de 8 elementos:

  C^{8}_{5} = 8x7x6x5x4 / 5x4x3x2x1 =8x7x6 / 3x2x1 = 56 equipos.

- Un juego de domino tiene 28 fichas y una mano consta de 7 fichas. ¿Cuantas manos distintas de domino hay?

  Hay tantas manos como subconjuntos de 7 elementos de un conjunto de 28 elementos:

  C^{28}_{7} = 28x27x26x25x24x23x22 / 7x6x5x4x3x2x1 = 1,184,040 manos.

- Si A es un conjunto de n puntos del plano tales que no haya 3 alineados, ¿Cuantas lineas hay que pasen por dos puntos de A? ¿Cuantos triángulos distintos hay con vértices en A?

  Las lineas están determinadas por subconjuntos de dos puntos de A, así que hay tantas lineas como subconjuntos de 2 elementos de A, o sea C^{n}_{2} = n(n-1)/2 lineas.

  Hay tantos triángulos como subconjuntos de 3 elementos de A:

  C^{n}_{3} = n(n-1)(n-2)/3·2·1 triángulos.

Veamos ahora unos ejemplos donde hay que tener mas cuidado en las cuentas:

- ¿De cuantas maneras se puede dividir un grupo de 12 futbolistas en 2 equipos de 6?

  Una vez que hemos elegido a un equipo el otro es su complemento. Hay tantas maneras de elegir al primer equipo como subconjuntos de 6 elementos de un conjunto de 12 elementos:

  C^{12}_{6} = 12x11x10x9x8x7 / 6x5x4x3x2x1 = 924 maneras de elegir al primer equipo.

  Pero elegir a los equipos E y E^c es lo mismo que elegir a los equipos E^c y E así que hay 924/2=462 maneras de dividir a un grupo de 12 en 2 equipos de 6.

- ¿Cuantas placas de coche formadas por 3 números y 3 letras puede haber, si los números y las letras pueden aparecer en cualquier orden?

  Los números aparecen en 3 de los 6 lugares, hay 6x5x4/3x2x1=20 maneras distintas de elegir estos 3 lugares. Ademas hay 10 opciones para elegir el primer numero, 10 para el segundo y 10 para el tercero, y hay 27 opciones para elegir la primera letra, 27 para la segunda y 27 para la tercera.

  En total hay 20x(10x10x10)x(27x27x27)= 393,660,000 posibles placas.

- ☐De cuantas maneras se puede partir un conjunto de 6 elementos en 3 pares de elementos?

  El primer par de elementos los podemos elegir de 6·5/2 maneras, el segundo par de 4·3/2 maneras y el tercer par de 2·1/2 maneras.

  Pero el orden de los pares no importa, y podemos elegir los 3 pares en 3x2x1 ordenes distintos, así que hay (6·5/2)(4·3/2)(2·1/2)/3·2·1 = 15 maneras de partirlo en 3 pares.

Problemas.

9. Si A={1,2,3,4,5,6,7,8,9}
   a. ¿Cuantos subconjuntos de 7 elementos tiene A?
   b. ¿De cuantas maneras se puede separar A en dos conjuntos de 3 y 6 elementos?

10. Si se tienen 7 ingredientes para hacer pizzas.
    a. ¿Cuantas pizzas distintas de 4 ingredientes se pueden preparar?
    b. ¿Cuantas pizzas distintas de a lo mas 4 ingredientes?
    c. ¿Cuantas pizzas de entre 1 y 6 ingredientes? (muy fácil)

11. a. ¿De cuantas maneras se pueden repartir 9 objetos entre 3 niños equitativamente?
    b. ¿De cuantas maneras se pueden repartir 9 objetos entre 3 niños a lo gacho? (difícil)
    c. ¿De cuantas maneras se pueden agrupar 9 objetos en 3 conjuntos de 3? (no es igual a a.)
    d. ¿De cuantas maneras se pueden agrupar 9 objetos en 3 conjuntos no vacíos?

12. a.¿Cuantas manos de domino hay que no tengan fichas dobles, como ●|●?
    b. ¿Cuantas manos de domino hay en las que no aparezca ningún 0, como |●?
    c. ¿Cuantas manos de domino hay en las que aparezca al menos un 0?

13. a. ¿Cuantas manos de poker distintas hay (hay 52 cartas y una mano tiene 5 cartas)?
    b. ¿Cuantas manos de poker hay que no tengan ningún par?
    c. ¿Cuantas manos hay que tengan al menos un par?
    d. ¿Cuantas manos hay que tengan al menos una tercia?

Los coeficientes binomiales y el triángulo de Pascal.

Los números $C^n_k = \binom{n}{k}$ que cuentan los subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos, tienen muchas aplicaciones.

Consideremos los coeficientes que aparecen al desarrollar las potencias de a+b:

$(a+b)^1 = a + b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

¿Cuales serán los coeficientes de $(a+b)^n$?

Lema. $(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{r} a^r b^{n-r} + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$

Demostración. Para multiplicar (a+b)(a+b)(a+b)...(a+b) hay que tomar todos los posibles productos eligiendo a o b en cada uno de los factores (a+b). Los coeficientes de aibn-i dicen de cuantas maneras distintas se puede elegir a y b para que a aparezca i veces y b aparezca n-i veces, y esto es el numero de subconjuntos con i elementos de {1,2,...,n} (cada subconjunto dice en cuales de los n factores elegimos a).

Lema. Para cada $r \leq n$, $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$

Demostración. Si a un conjunto A de n elementos le añadimos un elemento a, entonces los subconjuntos de r elementos de AU{a} son los subconjuntos de r elementos de A, y los subconjuntos de r-1 elementos de A, añadiéndoles a. □

Corolario. Los coeficientes del desarrollo de $(a+b)^n$ están dados por el triángulo de Pascal, que es un arreglo de números que empieza en 1 y en el que los números en cada renglón son la suma de los dos números que están inmediatamente arriba.

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}
$$

Si numeramos los renglones del triángulo como 0,1,2,...n,... y numeramos las n+1 entradas del renglón n como 0,1,2,...,n entonces el numero que aparece en la k-esima entrada del n-esimo renglón es $\binom{n}{k}$.

Lema. Para cada n, $C_1^n + C_2^n + C_3^n + \ldots + C_r^n + \ldots + C_{n-1}^n + C_n^n = 2^n$

Demostración. Si A es un conjunto de n elementos entonces cada C_k^n da el número de subconjuntos de tamaño r de A, y la suma da el número total de subconjuntos de A, que es 2^n.

Ejemplos.

- ¿Si se lanza una moneda n veces, cual es la probabilidad de que salgan k águilas?

  Al lanzar la moneda n veces, todos los resultados posibles pueden expresarse como n-adas que indican que salió en cada lanzamiento, por ejemplo (a,s,s,a,s,...,s). Hay 2^n n-adas posibles.

  Los resultados con k águilas corresponden a todos los subconjuntos de k lanzamientos del conjunto de n lanzamientos. Hay $\binom{n}{k}$ de estos subconjuntos.

  Así que la probabilidad de que al lanzar el dado n veces salgan k águilas es $\binom{n}{k}/2^n$.

- Si se lanza una moneda 6 veces, la probabilidad de que salgan 3 águilas y 3 soles es $\binom{6}{3}/2^6 = 6!/3!3!2^6 = 6\cdot5\cdot4/3\cdot2\cdot1\cdot64=20/64=0.3125$, que es menor que la probabilidad de que salgan mas águilas que soles y de que salgan mas soles que águilas.

Problemas.

14. ¿En un conjunto de 15 elementos hay mas subconjuntos de 7 elementos o subconjuntos de 9 elementos?

15. Al desarrollar $(x+y)^{10}$ ¿cual es el coeficiente de x^7y^3?

16. Si se lanzan 10 monedas ¿cual es la probabilidad de que caigan 4 águilas y 6 soles?

Problemas de repaso.

17. ¿Cuantos divisores tiene 1,000,000,000? ($1,000,000,000=10^9=2^9\cdot5^9$ y los divisores son de la forma $2^m\cdot5^n$ con $0\leq m,n\leq9$)

18. En un grupo de 20 personas hay que elegir una comisión conformada por un presidente, un secretario y 2 vocales. ¿De cuantas maneras distintas se puede formar?

19. En un grupo de 12 jóvenes, de cuantas maneras distintas se pueden formar 6 equipos de 2?

20. Si se lanzan 3 dados ¿cual es la probabilidad de que salgan 3 números distintos?

21. ¿En un juego de domino, cual es la probabilidad de obtener una mano sin fichas dobles?