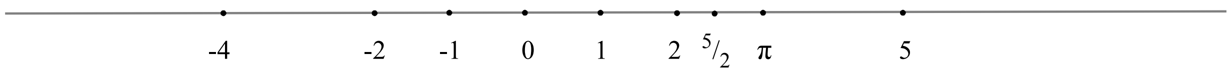
Vectores en 1 dimensión.

Podemos identificar a los números reales con los puntos de una línea recta, de modo que las distancias entre puntos sean proporcionales a las diferencias entre los números que representan:



Aunque podemos sumar, restar y multiplicar números reales para obtener otros números reales, no parece tener mucho sentido sumar, restar y multiplicar puntos.

Pero en lugar de identificar a los números reales con puntos, podemos identificarlos con *desplazamientos* en la línea recta, que podemos indicar con *flechas*:

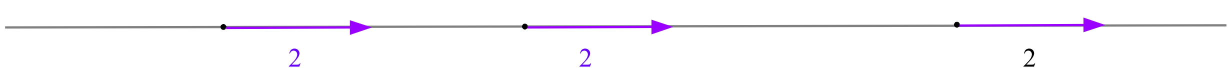
Cada número real nos dice cuanto movernos, dependiendo de su signo y su tamaño: los números positivos corresponden a desplazamientos a la derecha y los negativos a la izquierda, y al doble de un número le corresponde el doble de desplazamiento.

Los desplazamientos (o flechas) sí se pueden sumar y restar, y se pueden multiplicar por números reales.

Observar que hay una biyección entre las flechas basadas en el 0 y los puntos de la recta.

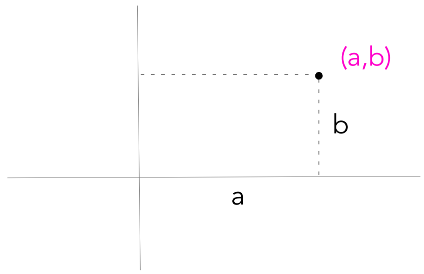
Estas flechas son *vectores* en una dimensión.

Para muchas aplicaciones es conveniente pensar que los vectores no están fijos en el origen, sino que pueden moverse (sin cambiar su tamaño y dirección)



Vectores en 2 dimensiones.

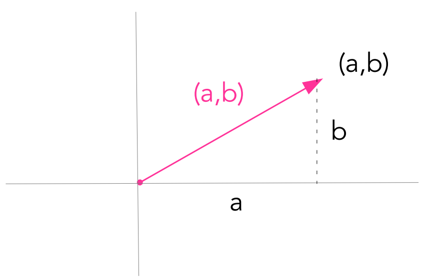
Podemos identificar a las parejas de números reales con los puntos del plano.

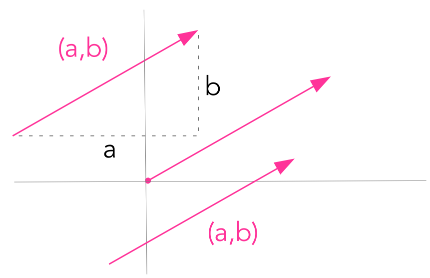


Aunque podemos sumar y restar parejas de números reales $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ y multiplicar una pareja por un número real $r(a,b)=(ra,rb)$, no tiene mucho sentido sumar y restar puntos.

Pero también podemos identificar a las parejas de números reales con *desplazamientos* en el plano, y estos se pueden visualizar como *flechas* entre dos puntos. Estas flechas son *vectores* en dos dimensiones.

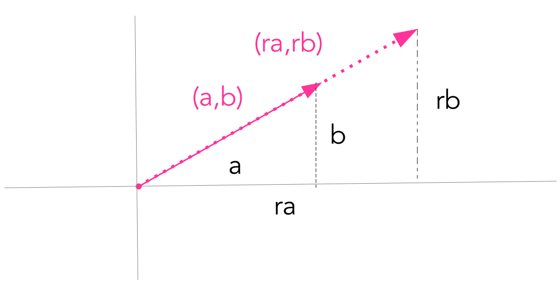
En particular podemos pensar en la pareja de números reales (a,b) como en la flecha que va del origen (0,0) al punto (a,b), pero para muchas aplicaciones conviene pensar que las flechas se pueden mover a cualquier lugar (sin cambiar de dirección ni tamaño) y siguen representando al mismo vector.

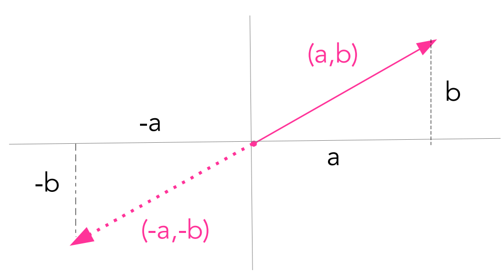




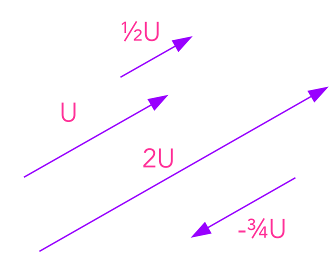
Los vectores en 2 dimensiones se pueden multiplicar por números reales (que en el lenguaje de los vectores son llamados *escalares*), multiplicando sus coordenadas por ese numero:

Si $U=(a,b)$ entonces $rU=r(a,b)=(ra,rb)$





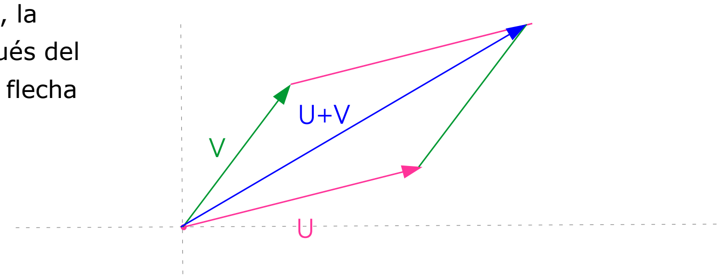
Si pensamos en los vectores como flechas, entonces la multiplicación por escalares las agranda o achica sin cambiar su dirección (ya que los triángulos son semejantes), volteándolas si el escalar es negativo.



Los vectores se pueden sumar, sumando sus coordenadas:

Si U=(a,b) y V=(c,d) entonces U+V=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)

Si pensamos en los vectores como desplazamientos, la suma corresponde a hacer un desplazamiento después del otro. Si los pensamos como flechas, y paramos una flecha donde acaba la otra, la suma es la fecha que va del principio de la primera al final de la segunda.

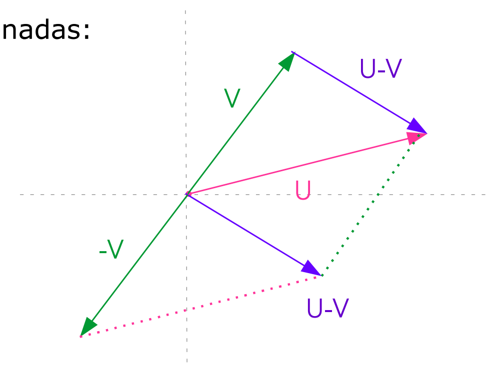


Los vectores también se pueden restar, restando sus coordenadas:

Si U=(a,b) y V=(c,d) entonces U-V=(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)

Restarle V a U equivale a sumar U con -V.

Si pensamos en los vectores U y V como desplazamientos, la resta equivale a hacer el primer desplazamiento y luego el inverso del segundo. Si pensamos a U y V como flechas que empiezan en el mismo punto, U-V es la flecha que va de la punta de V a la punta de U (U-V es "lo que le falta" a V para ser U).



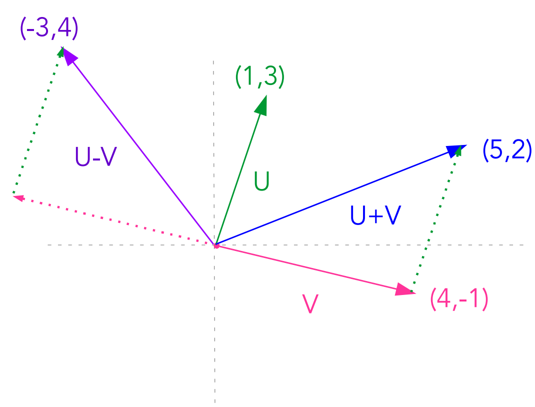
- Ejemplo.

  Si U=(1,3) y V=(4,-1)

  entonces

  U+V=(5,2)

  U-V=(-3,4)



Podemos usar la suma de vectores y la multiplicación por escalares para combinar vectores de muchas maneras, por ejemplo, si U y V son vectores y r y s son escalares, las combinaciones de la forma rU+sV se llaman **combinaciones lineales** de U y V.

Ejemplos.

- Si U=(1,2) y V=(4,-3) entonces una combinación lineal de U y V es -U+V=(3,-5)

  y otra combinación lineal es $^3/_2$U+$^1/_4$V=($^5/_2$,$^9/_4$).

- Mostrar que el vector (5,6) es una combinación lineal de los vectores (1,2) y (4,-3).

  Buscamos escalares r y s tales que

  r(1,2)+s(4,-3)=(5,6)   desarrollando esto queda

  (r,2r)+(4s,-3s)=(5,6)

  (r+4s,2r-3s)=(5,6)

  así que

  r+4s=5   r=5-4s

  2r-3s=6   2(5-4s)-3s=6   10–11s=6   11s=4 $s={}^{4}/_{11}$

  $r=5-4({}^{4}/_{11})= {}^{55}/_{11} -{}^{16}/_{11} = {}^{39}/_{11}$

  Ahora podemos comprobarlo:

  ${}^{39}/_{11}(1,2)+{}^{4}/_{11}(4,-3) = ({}^{39}/_{11},{}^{78}/_{11})+({}^{16}/_{11},{}^{-12}/_{11}) = ({}^{55}/_{11},{}^{66}/_{11})=(5,6)$.

- Demuestra que todos los vectores de $\mathbf{R}^2$ son combinaciones lineales de (1,2) y (3,1).

  Para ver que cada vector (x,y) es combinación lineal de (1,2) y (4,3), hay que hallar los escalares r,s en **R** tales que

  r(1,2)+s(3,1)=(x,y)   (donde a y b dependen de x y y).

  (r,2r)+(3s,s)=(x,y)

  (r+3s,2r+s)=(x,y)

  r+3s=x → r=x-3s → $r=x-3s=x-3({}^{2}/_{5}x-{}^{1}/_{5}y)=-{}^{1}/_{5}x+{}^{3}/_{5}y$

  2r+s=y → 2(x-3s)+s=y → 2x-5s=y → 5s=2x-y → $s={}^{2}/_{5}x-{}^{1}/_{5}y$

  Podemos comprobar que esto esta bien calculando la combinación lineal:

  $(-{}^{1}/_{5}x+{}^{3}/_{5}y)(1,2) + ({}^{2}/_{5}x-{}^{1}/_{5}y)(3,1) = (-{}^{1}/_{5}x+{}^{3}/_{5}y,-{}^{2}/_{5}x+{}^{6}/_{5}y) + ({}^{6}/_{5}x-{}^{3}/_{5}y,{}^{2}/_{5}x-{}^{1}/_{5}y) = ({}^{5}/_{5}x,{}^{5}/_{5}y) = (x,y)$

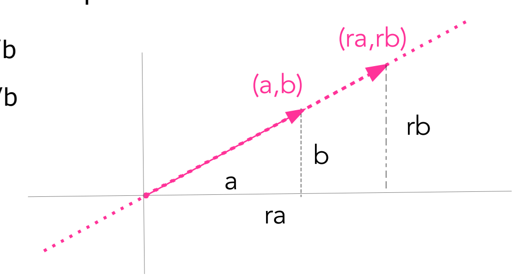
  □

Diremos que dos vectores tienen *la misma dirección* si uno es múltiplo escalar del otro.

Observar que (a',b')=r(a,b) ⇔ a'=ra y b'=rb ⇔ a'/a=r=b'/b

Así que (a,b) y (a',b') tienen la misma dirección si y solo si a'/a=b'/b

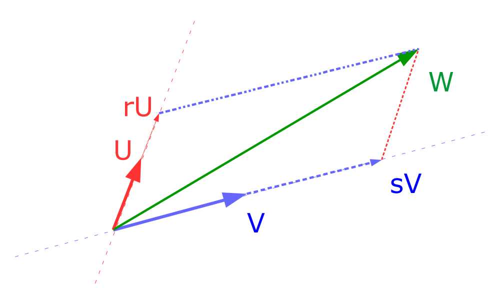
y esto sucede si y solo si ab'=a'b.



- Ejemplo. (2,-4) y (3,-6) y (-5,10) tienen la misma dirección

Lema. Si U y V son dos vectores con distintas direcciones en $\mathbf{R}^2$, entonces todos los vectores de $\mathbf{R}^2$ son combinaciones lineales de U y V.

Idea geométrica de la demostración.
Si los vectores U y V tienen dos direcciones distintas entonces podemos movernos en esas direcciones para llegar a cualquier punto del plano: basta trazar paralelas a esas direcciones por el punto para formar un paralelogramo que dice cuales múltiplos de los vectores U y V hay que sumar para obtener el vector W.



Demostración formal (algebraica). Sean U=(a,b) , V=(a',b') y W=(x,y).

Para ver que cada vector W es combinación lineal de U y V hay que ver que existen escalares r y s tales que

r(a,b)+s(a',b')=(x,y)

(ra+sa',rb+sb')=(x,y)

ra+sa'=x rb+sb'=y

rab+sa'b=xb rba+ab'a=ya resonadoras queda sa'b-sb'a=xb-ya s=xb-ya/a'b-b'a

rab'+sa'b'=xb' rba'+ab'a'=ya' resonadoras queda rab'-rba'=xb'-ya' r=xb'-ya'/ab'-ba'

si ab'-b'a≠0

Se puede comprobar (tarea) que r(a,b)+s(a',b')=(x,y)

siempre y cuando ab'-b'a≠0, y esto ocurre cuando (a,b) y (a',b') no tienen la misma dirección □

Problemas.

1. Si U=(3,1) V=(-4,2) W=(-1,5) calcula $-\frac{3}{2}V$, 3U+2V, U-2V, $\frac{2}{3}V+\frac{1}{3}W$, U+V-W

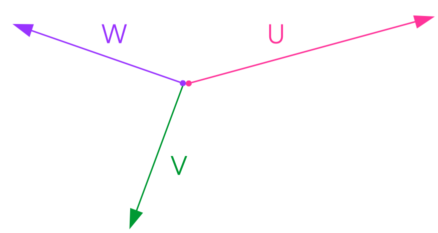
2. Para los vectores U, V y W mostrados abajo, dibuja cuidadosamente y sin usar coordenadas los siguientes vectores (todos basados en el mismo punto).

a. $\frac{1}{2}U + \frac{1}{2}V$

b. $\frac{1}{2}U - \frac{1}{2}V$

c. $\frac{1}{3}V + \frac{2}{3}W$

d. $\frac{1}{3}U + \frac{1}{3}V + \frac{1}{3}W$



3. Si (1,2), (4,3) y (2,0) son tres vértices de un paralelogramo ¿donde esta el cuarto vértice? ¿Donde esta el centro del paralelogramo?

4. ¿El vector (-1,-5) es combinación lineal de los vectores (1,-2) y (3,1)? ¿Y el vector (1,1)?

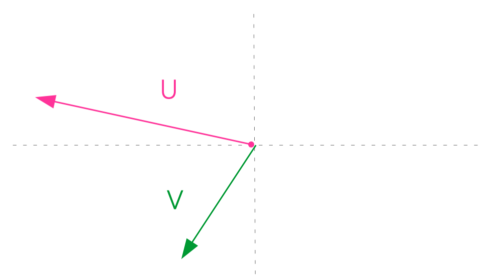
5. Si U y V son los vectores dibujados abajo, ¿hacia adonde apuntan los vectores aU+bV si

a. a,b>0 ?

b. a,b<0 ?

c. a>0 y b<0 ?

d. a<0 y b>0 ?



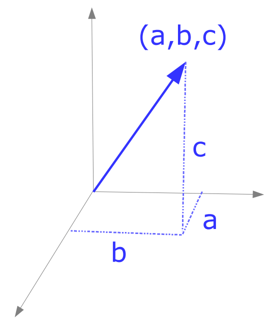
6. Si U y V son dos vectores como en la figura anterior, ¿como se verán todos los vectores de la forma rU+sV si... a. r+s=0 ? b. r-s=0 ? c. r+s=1 ? d. r+s=-1 ?

7. a. Muestra que (1,0) y (0,1) son combinaciones lineales de (1,2) y (1,3).
   b. Usa a. para ver que cada vector (x,y) es combinación lineal de (1,2) y (1,3).

8. a. Muestra que cada uno de los vectores (1,1), (1,2) y (1,3) es combinación lineal de los otros.
   b. Muestra que el vector (0,0) es una combinación lineal no trivial de esos tres vectores, es decir (0,0)=r(1,1)+s(1,2)+t(1,3), donde *no todos* los escalares r,s,t son 0.

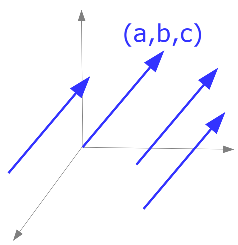
9. ¿Tiene solución la ecuación x(6,3)+y(4,3)=(1,1)?¿Y la ecuación x(6,3)+y(4,2)=(1,1)?¿Por que?

Vectores en 3 dimensiones

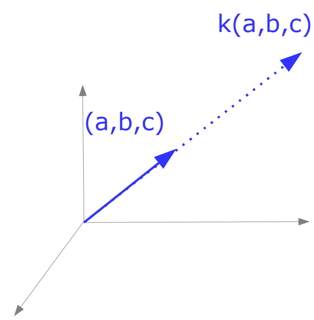


Podemos identificar a las tercias de números reales (a,b,c) con puntos del espacio, y también podemos identificarlas con desplazamientos en el espacio o con flechas que van del punto (0,0,0) al punto (a,b,c): estas flechas son vectores en 3 dimensiones.

Los vectores en el espacio pueden representar puntos, desplazamientos, velocidades, fuerzas y muchas cosas mas...



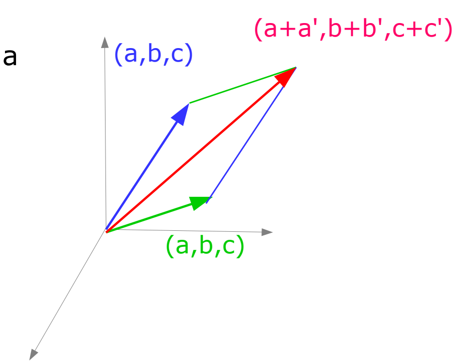
Para las aplicaciones podemos pensar que dos flechas que tienen la misma dirección y el mismo tamaño corresponden al mismo vector, sin importar donde estén colocadas.



Los vectores en el espacio se pueden multiplicar por escalares:

Si U=(a,b,c) y k en **R** entonces kU=(ka,kb,kc).

Geométricamente, el producto por el escalar k corresponde a estirar o encoger el vector U por un factor k sin cambiar su dirección si k>0, o a estirarlo o encogerlo y voltearlo si k<0.

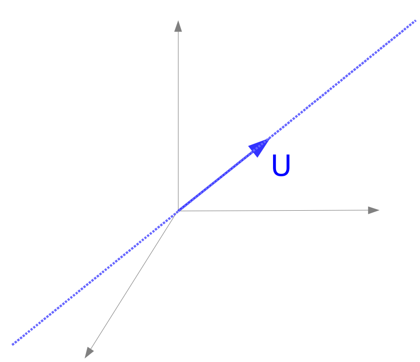


Los vectores también se pueden sumar coordenada a coordenada

Si U=(a,b,c)   y V=(a',b',c') entonces U+V=(a+a',b+b',c+c').

Geométricamente la suma se obtiene poniendo una flecha donde termina la otra, y dibujando la flecha que va del principio de la primera a la punta de la segunda (esto es así porque el desplazamiento resultante en cada dirección es la suma de los desplazamientos).

- En física los desplazamientos, las velocidades y las fuerzas se suman como vectores.

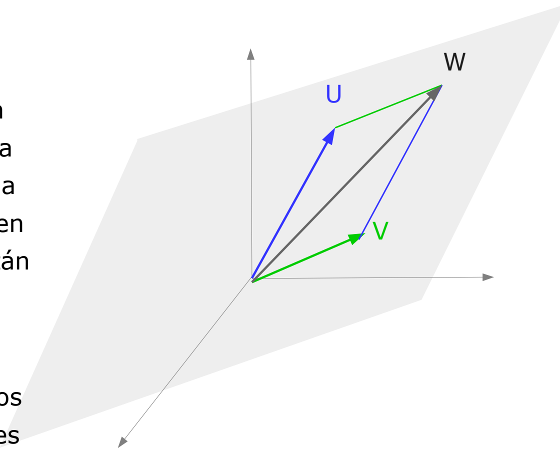


Diremos que 2 vectores tienen la misma dirección si uno es múltiplo escalar del otro.

(a,b,c) y (a',b',c') tienen la misma dirección si existe r en **R** tal que a'=ra, b'=rb, c'=rc, y esto ocurre si y solo si a'/a=b'/b=c'/c.

Observar que los múltiplos escalares de un vector U (basados en un punto) forman una recta.

Lema. Las combinaciones lineales de 2 vectores con distintas direcciones en el espacio forman un plano.



Demostración (geométrica). Observar que dos flechas U y V basadas en el origen y con distintas direcciones determinan un plano, que los múltiplos escalares de cualquier flecha contenida en el plano también están contenidos en el plano y que la suma de dos flechas contenidas en el plano también esta contenida en el plano. Así que todas las combinaciones lineales de U y V están contenidas en el plano.

Recíprocamente, si un vector W esta contenido en ese plano, entonces podemos dibujar un paralelogramo con lados paralelos a U y V que termine en la punta de W, y esto muestra que W es suma de múltiplos de U y V.

Para dar una demostración algebraica de este lema necesitaríamos empezar por *definir algebraicamente* lo que es un plano. Una definición algebraica de *plano* es precisamente como el conjunto de todas las combinaciones lineales de dos vectores con distintas direcciones (así que no hay que demostrar nada).

Ejemplos.

- ¿El vector $(-1,1,3)$ esta en el plano generado por los vectores $(1,2,3)$ y $(4,5,6)$? ¿El vector $(1,-1,-3)$ esta en ese plano? ¿Y el vector $(1,-1,3)$?

  - Para ver si $(-1,1,3)$ esta en el plano veremos si es combinación lineal de $(1,2,3)$ y $(4,5,6)$:

  $(-1,1,3)=(1,2,3)+s(4,5,6) = (r+4s,2r+5s,3r+6s)$

  de donde $-1=r+4s \quad r=-1-4s \qquad r=-1-4s=-1-4(-1)=3$

  $1=2r+5s \qquad 1=2(-1-4s)+5s=-2-3s \quad 3=-3s \quad s=-1$

  $3=3r+6s \qquad 3=3(-1-4s)+6s=-3-6s \quad s=-1$

  Y podemos comprobar que $3(1,2,3)-1(4,5,6)=(-1,1,3)$.

  - Como $(1,-1,-3)$ es el negativo de $(-1,1,3)$ que esta en el plano, entonces $(1,-1,3)$ también debe estar en el plano.
  - Para ver si $(1,-1,3)$ esta en el plano hacemos $(1,-1,3)=(1,2,3)+s(4,5,6) = (r+4s,2r+5s,3r+6s)$

  de donde $1=r+4s \quad r=1-4s$

  $-1=2r+5s \qquad -1=2(1-4s)+5s=2-3s \quad -3=-3s \quad s=1$

  $3=3r+6s \qquad 3=3(1-4s)+6s=3-6s \quad s=0$

  la contradicción $s=1$ y $s=0$ dice que no hay solución, así que $(-1,1,3)$ no esta en el plano. □

- Encuentra un vector horizontal que sea combinación lineal de $(1,2,3)$ y $(4,5,6$

  Buscamos un vector de la forma $(x,y,0)$ que sea combinación lineal de $(1,2,3)$ y $(4,5,6)$, es decir, $(x,y,0)=r(1,2,3)+s(4,5,6) = (r+4s,2r+5s,3r+6s)$

  de donde $x=r+4s \qquad x=-2s+4s=2s$

  $y=2r+5s \qquad y=2(-2s)+5s=s$

  $0=3r+6s \quad r=-2s$

  Así que las combinaciones de la forma $-2s(1,2,3)+s(4,5,6)$ deberían ser los vectores horizontales en el plano, lo que podemos comprobar haciendo: $-2s(1,2,3)+s(4,5,6)=(2s,s,0)$. □

Diremos que 3 vectores en $\mathbf{R}^3$ son **coplanares** si están en un mismo plano.

Lema. Si U,V,W son 3 vectores no coplanares en $\mathbf{R}^3$, entonces todos los vectores de $\mathbf{R}^3$ son combinaciones lineales de U,V y W.

Demostración (geométrica). Si 3 vectores U, V y W no están en el mismo plano, entonces los planos UV, VW y UW son distintos, y cada par de planos se cruza en una recta que contiene a uno de los 3 vectores.

Dado un vector X basado en el origen, podemos dibujar los planos paralelos a UV,VW y UW por la punta de X, Los 6 planos juntos forman un paralelepípedo y el vector X es su diagonal, esto muestra que X es la suma de los 3 vectores dados por las aristas del paralelepípedo, que son múltiplos de U, V y W. □

Ejemplo. Muestra algebraicamente que todos los vectores de $\mathbf{R}^3$ son combinaciones lineales de (1,2,0), (3,0,1) y (2,1,-1).

Para ver si cada vector (x,y,z) es combinación lineal de (1,2,0), (3,0,1) y (2,1,-4) escribimos

(x,y,z)=r(1,2,0)+s(3,0,1)+t(2,-1,1)

(x,y,z)=(r+3s+2t, 2r+t, s-t)

x= r+3s+2t		r=x-3(z+y-2r)-2(2r-y)=x-y-3z+2r r=-x+y+3z
y=2r-t	t=2r-y	t=2(-x+y+3z)-y=-2x+y+6z
z= s+t	s=z-t=z-(2r-y)=z+y-2r	s=z+y-2(-x+y+3z)=2x-y-5z

Y podemos comprobar que

(-x+y+3z)(1,2,0)+(2x-y-5z)(3,0,1)+(-2x+y+6z)(2,1,-1)=(x,y,z) □

Problemas.

10. Sea P el plano generado por los vectores (2,-1,3) y (1,2,-2).

a. ¿El vector (11,7,-1) esta en P?

b. ¿Existe algún vector en P cuya segunda coordenada sea 0?

c. ¿Hay algún vector en P cuya primera y tercera coordenadas sean iguales?

11. Muestra que los vectores en $\mathbf{R}^3$ de la forma (a+2b,4a-3b,-a-5b) con $a,b \in \mathbf{R}$ forman un plano.

12. Muestra que si U, V y W son vectores con distintas direcciones en $\mathbf{R}^3$ y W es una combinación lineal de U y V entonces V es una combinación lineal de U y W.

13. Demuestra que 3 vectores en $\mathbf{R}^3$ están en el mismo plano si y solo si existe una combinación lineal de los 3 que da (0,0,0) y no todos los escalares son 0.

14.Muestra como se puede llegar desde el origen hasta cualquier punto de $\mathbf{R}^3$ moviendose únicamente en las direcciones de los vectores (0,0,1), (0,1,1) y (1,1,1).

15. Muestra como descomponer a cada vector en $\mathbf{R}^3$ como combinación lineal de los vectores (1,2,0), (2,1,3) y (3,0,1).

Espacios vectoriales.

De manera análoga a como se hizo en 1, 2 y 3 dimensiones, es posible definir vectores en n dimensiones para cualquier n. Un **vector** en $\mathbf{R}^n$ es una n-ada de números reales $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

Los vectores se pueden sumar coordenada a coordenada y se pueden multiplicar por escalares:

Si $U=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ y $V=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ entonces

$U+V=(u_1+v_1,u_2+v_2,\ldots,u_n+v_n)$

y $rU=(ru_1,ru_2,\ldots,ru_n)$

La suma y el producto por escalares tienen las siguientes propiedades, heredadas directamente de las propiedades de la suma y la multiplicación de los números reales:

$U+V=V+U$	*la suma es conmutativa*
$(U+V)+W=U+(V+W)$	*la suma es asociativa*
$U+\mathbf{0}=U$ donde $\mathbf{0}=(0,0,\ldots,0)$	*existe un neutro aditivo*
$U+(-U)=\mathbf{0}$ donde $-U=(-u_1,-u_2,\ldots,-u_n)$	*existen inversos aditivos*
$r(U+V)=rU+rV$	
$(r+s)U=rU+sU$	
$(rs)U=r(sU)$	*compatibilidad del producto*

Un **espacio vectorial** (sobre **R**) es una colección de objetos, llamados **vectores** que se pueden sumar y multiplicar por números reales y en donde se cumplen todas las propiedades anteriores.

Ejemplos.

- Las flechas (segmentos dirigidos) en un espacio euclidiano.
- $\mathbf{R}^n = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) / x_i\in\mathbf{R}\}$
- Las ecuaciones lineales en 2 variables, como $ax+by+c=0$
- Los polinomios $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$
- Las funciones de **R** en **R**.
- Las matrices reales de mxn.
- Las sucesiones infinitas $(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots.)$ $x_i\in\mathbf{R}$.

Las ecuaciones se pueden sumar y multiplicar por números, los polinomios también, y lo mismo pasa para las matrices y las sucesiones. Para las funciones, la suma se define como $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ y el producto como $(rf)(x)=rf(x)$. Las propiedades de la suma y el producto escalar en cada caso se siguen de las mismas propiedades de los números reales.

Un subconjunto S de un espacio vectorial E es un **subespacio vectorial** de E si los vectores en S forman un espacio vectorial.

Lema. Si E es un espacio vectorial y $S \subset E$, entonces S es un subespacio vectorial de E si y solo si

1. El vector **0** está en S.
2. La suma de vectores en S está en S.
3. Los múltiplos escalares de vectores en S están en S.

Demostración. Por definición, si es un espacio vectorial entonces las propiedades 1,2 y 3 se tienen que cumplir. Por otro lado, como la suma y el producto en S son iguales que en E, las propiedades conmutativas, asociativas, distributivas y de compatibilidad del producto ya se cumplen. Así que para ver que S es un espacio vectorial basta ver que la suma de vectores en S están en S, que el producto de un vector en S por un escalar está en S, que el vector 0 (el neutro de la suma) está en S y que el inverso aditivo de cada elemento U de S esta en S. Y todo esto se sigue de las propiedades 1,2 y 3 (el inverso de U es el producto escalar de U por el escalar -1). □

Ejemplos.

- Los vectores del tipo (x,0) forman un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^2$: el vector (0,0) es de ese tipo, la suma de (x,0) y (x',0) es (x+x',0) que es de ese tipo, y r(x,0)=(rx,0) que es de ese mismo tipo.

  Pero los vectores del tipo (x,1) no forman un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^2$, porque no se cumple ninguna de las 3 condiciones: (0,0) no es de ese tipo, (x,1)+(y,1)=(x+y,2) no es de ese tipo y r(x,0)=(rx,0) tampoco es de ese tipo.

- Los vectores (x,y,z) tales que x+2y+3z=0 forman un subespacio de $\mathbf{R}^3$ ya que 0-2·0+3·0=0, y si x+2y+3z=0 y x'+2y'+3z'=0 entonces (x+x')-2(y+y')+3(z+z')=0 y (rx)+2(ry)+3(rz)=0.
  Pero los vectores (x,y,z) tales que x+2y+3z=4 no forman un subespacio vectorial (¿por que no?)

- Las funciones continuas forman un subespacio del espacio de todas las funciones de **R** en **R**: la función constante 0 es continua, la suma de funciones continuas es continua y los múltiplos de una función continua son funciones continuas.

Problemas

16. Encuentra mas ejemplos de espacios vectoriales sobre **R**.

17. ¿Cuales de los siguientes subconjuntos de $\mathbf{R}^2$ son subespacios vectoriales de $\mathbf{R}^2$?

    a. {(x,y) / x+y=0} b. {(x,y) / xy=0} c. {(x,y) / $y=x^2$}

18. ¿Cuales de los siguientes subconjuntos de $\mathbf{R}^3$ son subespacios vectoriales de $\mathbf{R}^3$?

    a. {(x,y,z) / x+y=z} b. {(x,y,z) / xy=z}

19. Demuestra que la intersección de 2 subespacios vectoriales de un espacio E es un subespacio vectorial de E.

20. Encuentra varios subespacios de los siguientes espacios vectoriales

    a. El espacio de matrices reales de 2x2 b. El espacio de polinomios de grado ≤ 3

Si $V_1,V_2,...V_n$ son vectores de un espacio vectorial E, sus **combinaciones lineales** son los vectores de la forma $r_1V_1+r_2V_2+...+r_nV_n$, con $r_1,r_2,...r_n$ en **R**.

Observar que si S es un subespacio vectorial de un espacio E, entonces todas las combinaciones lineales de vectores en S deben estar en S.

Lema. El conjunto de todas las combinaciones lineales de cualquier familia de vectores $V_1,V_2,...V_n$ en E es un subespacio vectorial S de E llamado el **subespacio generado por** $V_1,V_2,...V_n$.

Demostración. Hay que checar 3 condiciones del lema anterior:

1. 0 es una combinación lineal de $V_1,V_2,...V_n$:

$$0 = 0V_1+0V_2+...+0V_n.$$

2. La suma de dos combinaciones lineales de $V_1,V_2,...V_n$ es una combinación lineal de $V_1,V_2,...V_n$:

$$(r_1V_1+r_2V_2+...+r_nV_n) + (s_1V_1+s_2V_2+...+s_nV_n) = (r_1+s_1)V_1+(r_2+s_2)V_2+...+(r_1+s_n)V_n$$

3. Cada múltiplo escalar de una combinación lineal de $V_1,V_2,...V_n$ es una combinación lineal de $V_1,V_2,...V_n$:

$$k(r_1V_1+r_2V_2+...+r_nV_n) = kr_1V_1+ kr_2V_2+...+kr_nV_n \qquad \square$$

Observación. En $\mathbf{R}^3$, el subespacio generado por un vector distinto de 0 es una línea, el subespacio generado por dos vectores no colineales es un plano, y el subespacio generado por 3 vectores no coplanares es todo $\mathbf{R}^3$.

Ejemplos.

- El subespacio mas pequeño de que contiene a los vectores (1,2,3) y (4,5,6) es el conjunto formado por sus combinaciones lineales, que es $\{(a+4b,2a+5b,3a+6b) \ / \ a,b\in\mathbf{R}\}$.
- El conjunto $S=\{(x,y,z) \ / \ x+2y+3z=0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$, así que S debe ser el {(0,0,0)}, o una linea por (0,0,0), o un plano por (0,0,0), o todo $\mathbf{R}^3$. Para averiguarlo observemos que hay vectores con distintas direcciones que están en S (por ejemplo (2,-1,0) y (3,0,-1) y también hay vectores que no están en S, como (1,1,1). Así que S contiene a un plano pero no puede ser todo $\mathbf{R}^3$, por lo tanto S es el plano generado por (2,-1,0) y (3,0,-1).
- Las funciones lineales f(x)=ax+b forman un subespacio del espacio de todas las funciones de **R** en **R**. Este subespacio está generado por las funciones i(x)=x y c(x)=1.

Decimos que los vectores $V_1,V_2,...V_n$ son **linealmente independientes** si si la única combinación lineal de ellos que de el vector 0 es la combinación trivial, o en otras palabras,
si $r_1V_1+r_2V_2+...+r_nV_n = \mathbf{0}$ solamente cuando $r_1=r_2=...=r_n=0$.

Decimos que los vectores $V_1,V_2,...V_n$ son **linealmente dependientes** si existe una combinación lineal no trivial de ellos que da el vector 0, es decir si existen escalares $r_1,r_2,...r_n$ *no todos* 0, tales que $r_1V_1+r_2V_2+...+r_nV_n = \mathbf{0}$.

Ejemplos.

- Los vectores U=(2,-4) y V=(-3,6) son linealmente dependientes, ya que 3U+2V=(0,0)
- Los vectores (1,1) y (1,-1) son linealmente independientes, ya que si r(1,1)+s(1,-1)=(0,0) entonces r+s=0 y r-s=0. Sumando queda 2r=0 (así que r=0) y restando queda 2s=0 (así que s=0)
- Los vectores U=(1,1), V=(-1,1) y W=(1,0) son linealmente dependientes, a que U-V-2W=(0,0)

Observaciones.

- Dos vectores en $\mathbf{R}^2$ son linealmente dependientes si son colineales y son linealmente independientes si no son colineales.
- Tres vectores en $\mathbf{R}^2$ siempre son linealmente dependientes (¿por que?)
- Tres vectores en $\mathbf{R}^3$ son linealmente dependientes si son coplanares y son linealmente independientes si no son coplanares.

Lema. Los vectores $V_1,V_2,\ldots,V_n$ son linealmente dependientes si y solo si alguno de ellos es combinación lineal de los otros.

Demostración. $\Rightarrow$ Si $V_1,V_2,\ldots V_n$ son linealmente dependientes entonces existen escalares $r_1,r_2,\ldots r_n$ *no todos* 0, tales que $r_1V_1+r_2V_2+\ldots+r_nV_n = \mathbf{0}$. Si $r_i\neq 0$, entonces podemos despejar V_i en términos de los otros V_j's: $V_i= r_1/r_iV_1+r_2/r_iV_2+\ldots+r_{i-1}/r_iV_{i-1}+r_{i+1}/r_iV_{i+1}+\ldots+r_n/r_iV_n$, así que V_i es combinación lineal de los otros V_j's.

$\Leftarrow$ Si V_i es combinación lineal de los otros V_j's, $V_i = s_1V_1+s_2V_2+\ldots+s_{i-1}V_{i1}+s_{i+1}V_{i+1}+ \ldots+s_nV_n$ entonces $s_1V_1+s_2V_2+\ldots+s_{i-1}V_{i-1}+(-1)V_i+s_{i+1}V_{i+1}+ \ldots+s_nV_n =\mathbf{0}$ y no todos los escalares son 0. □

Ejemplos.

- Los vectores (1,0,0), (1,1,0) y (0,1,1) son linealmente independientes ya que (0,1,1) no es combinación lineal de (1,0,0) y (1,1,0).
- Cuatro vectores en $\mathbf{R}^3$ siempre son linealmente dependientes ya que cualquier vector en $\mathbf{R}^3$ es combinación lineal de cualesquiera 3 vectores no coplanares.

Problemas.

21. Muestra que no es posible generar a $\mathbf{R}^3$ con 3 vectores cuya ultima coordenada sea 0, pero si es posible generarlo con 3 vectores cuya ultima coordenada es 1.

22. Da una combinación lineal *no trivial* de los vectores (1,1,1), (1,2,3), (2,3,1) y (3,1,2) que de el vector (0,0,0) (piensen antes de usar la fuerza bruta)

23. a. ¿Los vectores (1,1,1), (1,2,1) y (2,1,2) son linealmente independientes?
 b. ¿Y los vectores (1,1,2), (1,2,1) y (2,1,1)?

24. a. Muestra que en el espacio de polinomios, cualquier colección de polinomios de distintos grados son linealmente independientes.

 b. Muestra que existen 4 polinomios de grado 3 que son linealmente independientes.

Decimos que un conjunto de vectores $V_1,V_2,...V_n$ forman una **base** del espacio vectorial E si

1. $V_1,V_2,...V_n$ generan a E.
2. $V_1,V_2,...V_n$ son linealmente independientes.

Lema. Si $V_1,V_2,...V_n$ forman una base de E entonces existe una única manera de expresar a cada vector en E como combinación lineal de los V_i's:.

Demostración. Si algún vector U se pudiera expresar de dos maneras distintas, digamos $U= a_1V_1+a_2V_2+...+a_nV_n$ y $U= b_1V_1+b_2V_2+...+b_nV_n$ donde algunos $a_k\neq b_k$, entonces $(a_1-b_1)V_1+(a_2-b_2)V_2+...+(a_n-b_n)V_n =\mathbf{0}$ donde algunos escalares a_k-b_k son distintos a 0, lo que diria que $V_1,V_2,...V_n$ f son linealmente dependientes. □

Ejemplos.

- Una base de $\mathbf{R}^n$ esta formada por los vectores (1,0,0,...,0), (0,1,0,...,0), ... , (0,0,0,...,1) ya que los vectores generan a $\mathbf{R}^n$: $(x_1,x_2,..., x_n)=x_1(1,0,0,...,0)+x_2(0,1,0,...,0)+...+x_n(0,0,0,...,1)$ y la única combinación lineal de estos vectores que da (0,0,...,0) es cuando cada x_k es 0.
- Si U es un vector distinto de 0 en un espacio E entonces U es una base del subespacio $\{ rU / r\in\mathbf{R} \}$.
- Si U y V son 2 vectores linealmente independientes en un espacio E entonces U y V forman una base del subespacio $\{ rU+sV / r,s \in\mathbf{R} \}$.
- Una base del espacio de polinomios de grado menor o igual que n esta formada por los *monomios* $1,x,x^2,x^3...,x^n$.

Lema. Si $V_1,V_2,...V_n$ son vectores linealmente independientes en un espacio E y el vector U no esta en el subespacio generado por $V_1,V_2,...V_n$ entonces $V_1,V_2,...V_n,U$ son linealmente independientes.

Demostración. Si $V_1,V_2,...V_n,U$ fueran linealmente dependientes, existiría una combinación lineal $r_1V_1+r_2V_2+...+r_nV_n+rU = \mathbf{0}$ donde no todos los escalares son 0. Pero r no puede ser 0 ya que podríamos despejar a U como combinación lineal de los V_i's. Y si r=0 entonces la combinación lineal anterior es $r_1V_1+r_2V_2+...+r_nV_n= \mathbf{0}$, donde no todos los escalares son 0, así que los V_i's son linealmente dependientes. □

Corolario. Cualquier conjunto de vectores linealmente independientes en un espacio vectorial E se puede completar a una base de E.

Demostración. Si $V_1,V_2,...V_n$ son linealmente independientes y no generan a todo E, entonces existe un vector V_{n+1} en E que no es combinación lineal de $V_1,V_2,...V_n$. Así que por el lema anterior $V_1,V_2,...,V_n,V_{n+1}$ son linealmente independientes. Si estos vectores no generan a E entonces podemos repetir el argumento anterior y hallar otro vector V_{n+2} de modo que $V_1,V_2,...,V_n,V_{n+1},V_{n+2}$ sean linealmente independientes. Así que podemos seguir añadiendo vectores linealmente independientes hasta que generen a todo el espacio.

□

El siguiente teorema es muy importante. Su demostración no es trivial y vale la pena entenderla.

Teorema. En un espacio vectorial E generado por n vectores, cualesquiera n+1 vectores son linealmente dependientes.

Demostración. Por inducción sobre n. Si n=1 entonces E esta formado por los múltiplos escalares de un vector V, y cualesquiera dos o mas múltiplos escalares de V son linealmente dependientes.

Supondremos ahora que el resultado es cierto para todo espacios vectoriales generados por menos de n vectores y mostraremos que es cierto para los espacios generados por n vectores.

Supongamos que E esta generado por n vectores $V_1,V_2,...V_n$ y tomemos n+1 vectores $U_1,U_2,...U_{n+1}$ en E. Entonces cada U_j es combinación lineal de los V_i's:

$$U_1 = a_1V_1 + b_1V_2 + c_1V_3 + ... + s_1V_n$$

$$U_2 = a_2V_1 + b_2V_2 + c_2V_3 + ... + s_2V_n$$

. . . .

$$U_n = a_nV_1 + b_nV_2 + c_nV_3 + ... + s_nV_n$$

$$U_{n+1} = a_{n+1}V_1+ b_{n+1}V_2+ c_{n+1}V_3 + ... + s_{n+1}V_n$$

Si todos los escalares $s_1, s_2,...s_{n+1}$ que aparecen con V_n son 0, entonces los vectores $U_1,U_2,...U_{n+1}$ están en el subespacio de E generado por los n-1 vectores $V_1,V_2,...V_{n-1}$ y por hipótesis de inducción $U_1,U_2,...U_{n+1}$ deben ser linealmente dependientes, y ya acabamos.

Si alguno de los escalares $s_1, s_2,...s_{n+1}$ es distinto de 0, digamos $s_{n+1}\neq 0$, entonces $U_{n+1} - s_{n+1}V_n$ es una combinación lineal de los vectores $V_1,V_2,...V_{n-1}$

Vamos a proyectar los vectores $U_1,U_2,...U_n$ a vectores en el espacio generado por $V_1,V_2,...V_{n-1}$.

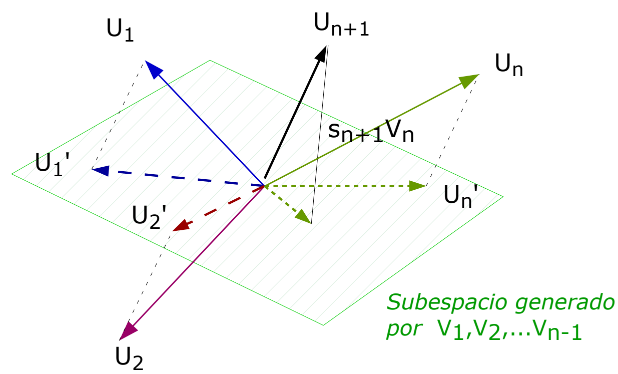
Sean $U_1' = U_1 - s_1/s_{n+1}U_{n+1}$

$U_2' = U_2 - s_2/s_{n+1}U_{n+1}$

. . . .

$U_n' = U_n - s_n/s_{n+1}U_{n+1}$

Entonces los vectores $U_1',U_2',...U_n'$ están en el subespacio generado por $V_1,V_2,...V_{n-1}$ ya que



$$U_k' = U_k - s_k/s_{n+1}U_{n+1} =$$

$$= a_kV_1+b_kV_2 +c_kV_3 +...+s_kV_n - s_k/s_{n+1}U_{n+1}$$

$$= a_kV_1+b_kV_2 +c_kV_3 +...+s_k/s_{n+1}(s_{n+1}V_n-U_{n+1})$$

y ya habíamos visto que el ultimo vector es combinación lineal de $V_1,V_2,...V_{n-1}$.

Como los vectores $U_1',U_2'....U_n'$ están en el espacio generado por los vectores $V_1,V_2,...V_{n-1}$ entonces por hipótesis de inducción $U_1',U_2'....U_n'$ son linealmente dependientes, es decir,

$\lambda_1U_1'+\lambda_2U_2'+....+\lambda_nU_n' = 0$ para algunos $\lambda_1, \lambda_2,...,\lambda_n$ no todos 0.

Y como $U_k'= U_k -1/s_{n+1}U_{n+1}$ entonces

$\lambda_1U_1+\lambda_2U_2+....+\lambda_nU_n -(\lambda_1s_1/s_{n+1}--\lambda_2s_2 /s_{n+1}- ... -\lambda_ns_n/s_{n+1})U_{n+1} = 0$ donde $\lambda_1, \lambda_2,...,\lambda_n$ no son todos 0,

lo que muestra que $U_1,U_2,...U_{n+1}$ son linealmente dependientes. □

Ejemplos.

- En $\mathbf{R}^4$ cualesquiera 5 vectores son linealmente dependientes.
- Cualesquiera 5 matrices de 2x2 son linealmente dependientes.

Corolario. En un espacio vectorial E generado por n vectores, cualesquiera n vectores linealmente independientes generan a E.

Demostración. Si hubieran n vectores independientes en E que no generaran a E entonces habría un vector U en E que no es combinación lineal de ellos, así que los n vectores junto con U serian n+1 vectores linealmente independientes en E, que esta generado por n vectores, contradiciendo el teorema anterior. □

Ejemplo. Completar el conjunto de vectores {(1,2,3), (1,1,1)} a una base de $\mathbf{R}^3$.

El vector (1,0,0) no es combinación lineal de (1,2,3), (1,1,1) ya que si lo fuera (1,0,0)=a(1,2,3)+b(1,1,1) pero entonces 2a+b=0 y 3a+b=0 y restando queda a=0, así que b=0. Pero entonces a+b=0≠1.

Por lo tanto (1,0,0), (1,2,3) y (1,1,1) son linealmente independientes y por el corolario anterior deben generar a $\mathbf{R}^3$.

Corolario. Todas las bases de un espacio vectorial E tienen el mismo número de elementos.

Demostración. Si E tuviera dos bases con n y m elementos y n<m, entonces E seria generado por n elementos y E contendría m>n m vectores linealmente independientes, contradiciendo el teorema. □

La **dimensión** de un espacio vectorial E es el número de elementos en cualquier base de E.

Corolario. La dimensión de E es igual a el mínimo número de vectores que generan a E y también al máximo número de vectores linealmente independientes que se pueden hallar en E.

Demostración. Sea d=dimensión de E, g=mínimo número de generadores de E y i=máximo número de vectores linealmente independientes en E. Entonces g≤d≤i ya que hay n vectores independientes que generan. Ademas g no puede ser menor que i ya que en un espacio generado por g vectores no puede haber mas de g vectores linealmente independientes. Por lo tanto g=d=i. □

Ejemplo. Cual es la dimensión del subespacio S={(x,y,z) / x+2y+3z=0} de $\mathbf{R}^3$?

Como S es subespacio de $\mathbf{R}^3$ su dimensión es a lo mas 3. Como hay vectores de $\mathbf{R}^3$ como (1,0,0) que no están en S, así que la dimensión de S debe ser menor que 3. Y como los vectores (1,1,-1) y (1,-2,1) están en S y son linealmente independientes, entonces S tiene dimensión al menos 2. Por lo tanto S tiene dimensión 2.

Problemas.

25. Encuentra una base para el espacio vectorial $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 / x+y=z \}$.

26. Encuentra una base para el subespacio $\{(a+b-c,a+2b+c,3a-b-c,a+3c) / a,b,c \in \mathbf{R} \}$ de $\mathbf{R}^4$.

27. ¿Que dimensión tiene el subespacio $\{(x,y,z,w) / x+y+z+w=0\}$ de $\mathbf{R}^4$?
 ¿Y el subespacio $\{(x,y,z,w) / x+y+z+w=0, x-y+z-w=0\}$?

28. Demuestra que cada subespacio vectorial de $\mathbf{R}^n$ que no es $\mathbf{R}^n$ puede generarse con menos de n vectores.