

Matrices.

Las *matrices* son arreglos rectangulares de números, como

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 9 & 4 & -1 & -7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & -4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Una **matriz de $m \times n$** es una matriz con m renglones y n columnas. Escribimos $\mathbf{M}=(a_{ij})$ para decir que la matriz M tiene al número a_{ij} en la entrada correspondiente al renglón i y la columna j .

Las matrices se pueden **multiplicar por escalares**:

Si $\mathbf{M}=(a_{ij})$ y $r \in \mathbf{R}$ entonces $r\mathbf{M}=(ra_{ij})$

Ejemplo:

$$\text{Si } M = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{entonces } 2M = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

Y dos matrices del mismo tamaño se pueden **sumar**:

Si $\mathbf{M}=(a_{ij})$ y $\mathbf{N}=(b_{ij})$ entonces $\mathbf{M}+\mathbf{N}=(a_{ij}+b_{ij})$

Ejemplo.

$$\text{Si } M = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{y } N = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{entonces } M+N = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Una **submatriz** de la matriz M es una matriz N que se obtiene suprimiendo algunas de las columnas y/o renglones de M .

Ejemplo. Algunas submatrices de

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 9 & 4 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

son las siguientes:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 9 & 4 & -7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 9 & -1 & -7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{vmatrix}$$

La **transpuesta** de una matriz \mathbf{M} es la matriz \mathbf{M}^T que se obtiene cambiando renglones por columnas. Si $\mathbf{M}=(a_{ij})$ es una matriz de $m \times n$, la transpuesta es una matriz de $n \times m$ $\mathbf{M}^T=(a_{ji})$.

Ejemplo.

$$\text{Si } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{su transpuesta es } \mathbf{M}^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Rango de una matriz.

Los renglones de una matriz \mathbf{M} de $m \times n$ son vectores en \mathbf{R}^n . El **rango** de la matriz \mathbf{M} es la dimensión del subespacio vectorial de \mathbf{R}^n generado por los m renglones de \mathbf{M} , que es igual al máximo número de renglones linealmente independientes de la matriz. Así que el rango r de una matriz de $m \times n$ cumple $r \leq m$, $r \leq n$ (tersa).

Ejemplos.

matriz	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	2	3	1	1	2	0	1	1	<table border="1"><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>3</td></tr></table>	2	2	2	0	1	4	0	0	3
1	2	3																							
1	1	2																							
0	1	1																							
2	2	2																							
0	1	4																							
0	0	3																							
rango	1	1	1	2	2	2	3																		

Hay algunos cambios que se le pueden hacer a una matriz que no afectan su rango.

Las **operaciones elementales** (por renglones) son:

1. Intercambiar dos renglones
2. Multiplicar un renglón por un número
3. Sumar a un renglón otro renglón

Ejemplo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -3 & -6 & -9 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Las operaciones 2 y 3 se pueden combinar para obtener otra operación muy útil:

4. Sumarle a un renglón un múltiplo de otro renglón

Ejemplo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2-4r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-7r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Lema. Las operaciones elementales por renglones no afectan el rango de la matriz.

Demostración. Basta ver que las operaciones elementales no cambian el subespacio generado por los renglones (por lo tanto no cambian la dimensión, que es el número de renglones linealmente independientes). Veamos:

1. Cambiar el orden de los generadores no cambia el subespacio.
2. Multiplicar un generador por un escalar distinto de 0 tampoco.
3. Reemplazar un generador U por su suma con otro generador V tampoco cambia el subespacios, ya que lo que generan U y V es el mismo que el que generan U+V y V.
4. Se obtiene aplicando 2 y luego 3 y luego 2, así que tampoco cambia es subespacio. \square

Una **matriz escalonada** es una matriz donde las entradas distintas de 0 en cada renglón empiezan después de las entradas distintas de 0 del renglón anterior.

Ejemplos.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Lema. Toda matriz se puede convertir en una matriz escalonada usando operaciones elementales.

Demostración. Si un renglón tiene primera entrada distinta de 0 podemos ponerlo hasta arriba y podemos restar múltiplos de ese renglón a los siguientes renglones, para que todos ellos tengan primera entrada igual a 0. Si hay un renglón distinto del primero con segunda entrada distinta de 0 podemos ponerlo en el segundo lugar y restar múltiplos de ese renglón a los siguientes renglones para que todos ellos tengan segunda entrada igual a 0. Si hay un renglón distinto de los primeros dos con tercera entrada distinta de 0 podemos ponerlo en el tercer lugar y restar múltiplos de ese renglón a los siguientes renglones para que todos ellos tengan tercera entrada igual a 0, etc. \square

Ejemplo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2-4r_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 8 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 8 \\ 0 & -9 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-9/5r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & -32/5 \end{vmatrix}$$

Lema. El rango de una matriz escalonada es el número de renglones distintos de 0.

Demostración. Basta observar que los renglones distintos de 0 de una matriz escalonada son vectores linealmente independientes.

Veamos que si V_1, V_2, \dots, V_m son vectores en \mathbf{R}^n tales que para cada V_i las entradas distintas de 0 de V_i empiezan después que las entradas distintas de 0 para los V_i anteriores entonces si V_1, V_2, \dots, V_m son linealmente independientes. Supongamos que $a_1V_1 + a_2V_2 + \dots + a_mV_m = 0$

Hay una coordenada que es distinta de 0 para V_1 y es igual a 0 para todos los otros V_i 's. Como en esa coordenada en la combinación lineal, que debe ser 0, solo aparece a_1 , entonces $a_1 = 0$.

Hay una coordenada que es distinta de 0 para V_2 y es igual a 0 para los V_i 's con $i > 2$. Como en esa coordenada en la combinación lineal, que debe ser 0, solo aparecen a_1 y a_2 , y $a_1 = 0$, entonces $a_2 = 0$.

En general, hay una coordenada que es distinta de 0 para V_k y es igual a 0 para los V_i 's con $i > 2k$. Como en esa coordenada en la combinación lineal, que debe ser 0, solo aparecen a_1, a_2, \dots, a_k , y $a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = 0$, entonces $a_k = 0$. \square

Así que podemos calcular el rango de cualquier matriz usando operaciones elementales para convertirla en una matriz escalonada.

Ejemplo. ¿Cual es el rango de esta matriz?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Hacemos operaciones de renglones para llevarla a una matriz escalonada:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - 4r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - 7r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Como la matriz escalonada resultante tiene 2 renglones distintos de 0, el rango de la matriz es 2.

Los vectores $(1, 2, 3)$ y $(0, -3, -5)$ forman una base del subespacio generado por los renglones.

Problemas.

1. Escribe explícitamente las siguientes matrices de 4×3 :

a. $M = (a_{ij})$ donde $a_{ij} = i + j$ a. $M = (a_{ij})$ donde $a_{ij} = ij$

2. Usa operaciones elementales para convertir las siguientes matrices en matrices escalonadas.

∈ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

3. Halla el rango de estas matrices y da una base para el espacio generado por los renglones.

a. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

4. Demuestra que el rango de una matriz M es mayor o igual al rango de todas sus submatrices. Demuestra que el rango de M es igual al máximo de los rangos de sus submatrices cuadradas.

Matrices cuadradas y determinantes.

Las matrices de $n \times n$ (que tienen el mismo número de renglones y columnas) se llaman **matrices cuadradas**. Las matrices cuadradas que solo tienen entradas distintas de 0 en la diagonal principal (es decir, aquellas matrices (a_{ij}) donde $a_{ij}=0$ si $i \neq j$) se llaman **matrices diagonales**. Las matrices cuyas entradas debajo de la diagonal son 0 se llaman **matrices triangulares**.

A cada matriz cuadrada **M** le podemos asociar un número real llamado el **determinante** de **M**, que guarda información algebraica y geométrica sobre la matriz.

$$\text{Si } M = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{el determinante de M es } \quad \text{Det } M = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Ejemplo.

$$\text{Si } M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{Det } M = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

Lema. Sea **M** una matriz de 2×2

1. Si se multiplica un renglón de **M** por un escalar λ el determinante se multiplica por λ .
2. Si se intercambian los renglones de **M** el determinante cambia de signo,
3. Si se suma un renglón de **M** a otro renglón el determinante no cambia.

Demostración.

$$\begin{aligned} 1. \text{ Det } \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} &= \lambda a_1 b_2 - \lambda a_2 b_1 = \lambda(a_1 b_2 - a_2 b_1) = \lambda \text{ Det } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \\ 2. \text{ Det } \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} &= b_1 a_2 - b_2 a_1 = -(a_1 b_2 - a_2 b_1) = - \text{ Det } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \\ 3. \text{ Det } \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} &= (a_1 + b_1)b_2 - (a_2 + b_2)b_1 = (a_1 b_2 - a_2 b_1) + \cancel{b_1 b_2} - \cancel{b_2 b_1} = \text{ Det } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lema. El rango de una matriz **M** de 2×2 es 2 si y solo si $\text{Det } M \neq 0$.

Demostración. Cada matriz de 2×2 se puede convertir en una matriz escalonada usando operaciones elementales, que no cambian el rango de la matriz y no cambian el determinante salvo por el signo.

Así que basta probar el lema para matrices escalonadas, de la forma

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \quad \text{Det } M = a_1 b_2 \quad \text{así que } \text{Det } M = 0 \quad \text{si y solo si } a_1 = 0 \text{ o } b_2 = 0.$$

Pero si $a_2 = 0$ el segundo renglón es $(0,0)$ y los renglones son linealmente dependientes, y si $a_1 = 0$ los renglones son $(0, b_1)$ y $(0, b_2)$ que son linealmente dependientes. \square

Matrices de 3x3.

Si $M = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ el determinante es $\text{Det } M = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$

Ejemplo.

Si $M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$ $\text{Det } M = 0 \cdot 4 \cdot 8 + 1 \cdot 5 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 6 - 1 \cdot 3 \cdot 8 - 0 \cdot 5 \cdot 7 = 0$

El determinante de una matriz de 3x3 se puede calcular usando los determinantes de submatrices de 2x2:

$$\text{Det } M = a_1 \text{Det} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \text{Det} \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \text{Det} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Lema. Sea M una matriz de 3x3.

1. Si se multiplica un renglón de M por un escalar λ el determinante se multiplica por λ .
2. Si se intercambian los renglones de M el determinante cambia de signo,
3. Si se suma un renglón de M a otro renglón el determinante no cambia.

Demostración. Basta calcular los determinantes de las matrices modificadas,

Lema. El rango de una matriz M de 3x3 es 3 si y solo si $\text{Det } M \neq 0$.

Demostración. El rango de la matriz M es menor que 3 si y solo si los renglones (a_1, a_2, a_3) , (b_1, b_2, b_3) y (c_1, c_2, c_3) son linealmente dependientes.

Cada matriz de 3x3 se puede convertir en una matriz escalonada usando operaciones elementales, que no cambian el rango de la matriz y no cambian el determinante salvo por el signo.

Así que basta probar el lema para matrices escalonadas.

Si $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$ $\text{Det } M = a_1 b_2 c_3$ así que $\text{Det } M = 0$ si y solo si $a_1 = 0$ o $b_2 = 0$ o $c_3 = 0$.

Si $c_3 = 0$ el tercer renglón es $(0, 0, 0)$ y los 3 renglones son linealmente dependientes, si $b_2 = 0$ los últimos 2 renglones son $(0, 0, b_3)$ y $(0, 0, c_3)$ que son linealmente dependientes, y si $a_1 = 0$ entonces $b_2 = 0$ ya que la matriz es escalonada y los últimos dos renglones son $(0, 0, b_3)$ y $(0, 0, c_3)$ que son linealmente dependientes.

□

Matrices de nxn.

Para calcular el determinante de una matriz M de nxn tomamos todos los productos posibles de n entradas de M que aparecen en distintos renglones y distintas columnas, a la mitad de ellos les cambiamos el signo y los sumamos todos.

Cada producto viene de una elección de una permutación de los números $1,2,3,\dots,n$, que dice en que columna elegimos la entrada de cada renglón. El signo del producto se elige de acuerdo a la *paridad* de la permutación

Una permutación de los números $1,2,3,\dots,n$ es un reordenamiento de esos números. Al conjunto de permutaciones $1,2,3,\dots,n$ se le denota por S_n .

Ejemplo. Una permutación de $1,2,3,4,5$ es $2,3,5,1,4$. Otra manera de escribir esto es decir que σ es la permutación tal que $\sigma_1=2, \sigma_2=3, \sigma_3=5, \sigma_4=1, \sigma_5=4$. En la permutación $2,3,5,1,4$ algunos pares de números no aparecen en el orden usual, por ejemplo, el 5 aparece antes del 1. Decimos que el 5 y el 1 están invertidos. También el 2 y el 1 están invertidos, y también el 3 y el 1 y el 5 y el 4 están invertidos. Todos los otros pares de números están en el orden usual, así que esta permutación tiene 4 inversiones.

Diremos que una permutación σ de $1,2,3,\dots,n$ es **par** si σ tiene un número par de inversiones, y que es **impar** si σ tiene un número impar de inversiones.

Ejemplo. La permutación $2,3,5,1,4$ es par. La permutación $3,2,5,1,4$ es impar.

Lema. Si una permutación σ' se obtiene de otra permutación σ intercambiando dos números, entonces σ y σ' tienen distinta paridad.

Demostración. Al intercambiar dos números i y j se forma o se quita la inversión entre ellos. Las inversiones entre pares de números k y l distintos de i y j no cambian. Falta ver que pasa con las inversiones entre un número k y i y entre ese número k y j . Si k no está entre i y j estas inversiones no cambian. Si k está entre i y j entonces al intercambiar i y j se forman o se quitan la inversión de k con i y también la inversión de k con j . Así que el número total de inversiones cambia por un número impar. \square

Corolario. La paridad de una permutación σ está dada por el número de intercambios que hay que hacer para llegar de σ a la identidad.

Ejemplo. ¿Cuál es la paridad de la permutación $3,1,2,5,4$?

$3,1,5,2,4 \rightarrow 1,3,5,2,4 \rightarrow 1,2,5,3,4 \rightarrow 1,2,3,5,4 \rightarrow 1,2,3,4,5$ son 4 intercambios, la permutación es impar.

El **determinante** de una matriz cuadrada de nxn se define así:

$$\text{Si } M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{entonces} \quad \text{Det } M = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \dots a_{n\sigma_n}$$

donde $\epsilon(\sigma)$ es el signo de la permutación σ : + si σ es par y - si σ es impar.

Lema. El determinante de una matriz M tiene las siguientes propiedades.

1. Si todas las entradas de un renglón o una columna de M son 0 el determinante es 0.
2. Si se intercambian dos renglones de M el determinante cambia de signo.
3. Si se multiplica un renglón de M por un escalar r, el determinante se multiplica por r.
4. Si R es un renglón de la matriz M, y $R=R_1+R_2$, y M_1 y M_2 son las matrices que se obtienen de reemplazar el renglón R por los renglones R_1 y R_2 entonces $\text{Det } M = \text{Det } M_1 + \text{Det } M_2$.

Demostración. 1. Si todas las entradas de un renglón o una columna son 0 entonces en cada uno de los productos en el determinante hay un factor 0 así que todos los productos son 0.

2. Al intercambiar dos renglones los productos que aparecen en el determinante son los mismos, pero la paridad de cada permutación cambia, así que el signo de cada producto cambia.

3. Al multiplicar un renglón por un escalar r, uno de los factores en cada producto se multiplica por r, así que la suma se multiplica por r.

4. Cada producto del determinante de M tiene un factor en el renglón R, y este es la suma de factor en el renglón R_1 y un factor en el renglón R_2 . Así que cada producto de Det M es la suma de un producto en Det M_1 y un producto en Det M_2 . \square

Ejemplos.

$$\text{Det} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -\text{Det} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{Det} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \text{ Det} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Det} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \text{Det} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \text{Det} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Corolario. El determinante también tiene estas propiedades:

5. Si una matriz tiene 2 renglones iguales, su determinante es 0.
6. Si a un renglón de M le sumamos un múltiplo de otro renglón, el determinante no cambia.
7. Si los renglones de M son linealmente dependientes, el determinante de M es 0.

Demostración. 5. Por la propiedad 2, al intercambiar dos renglones el signo del determinante cambia, pero por otro lado, al intercambiar dos renglones iguales la matriz no cambia, así que el determinante no puede cambiar. La única manera de que el signo cambie y no cambie es que sea 0.

6. Por la propiedad 4 si a un renglón de la matriz M le sumamos otro renglón el determinante de la matriz resultante es la suma de los determinantes de la matriz M y de otra matriz que tiene dos renglones iguales, pero por la propiedad 5 esta última matriz tiene determinante 0. Lo del múltiplo es tarea.

7. Si los renglones son dependientes, podemos restarle a uno una combinación lineal de los otros para que se haga 0, así el determinante es 0, y por la propiedad 6 esta operación no cambia el determinante. \square

Problemas.

5. Muestra que toda matriz se puede escalar sin que cambie el determinante, excepto por el signo.

6. Calcula los determinantes de estas matrices. Hint: Puedes usar operaciones elementales para simplificar algunos cálculos.

a. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

e. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

7. Calcula los determinantes de estas matrices *sin escribir nada*.

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

e. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

8. Calcular los determinantes de estas matrices usando las propiedades 1-7 (no lo hagan a pata!).

a. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}$

Teorema. El rango de una matriz M de $n \times n$ es n si y solo si $\text{Det } M \neq 0$.

Demostración. El rango de M es menor que n si y solo si sus renglones son linealmente dependientes.

Así que si el rango es menor que n la propiedad 7 implica que $\text{Det } M = 0$.

Falta ver que $\text{Det } M = 0$ Implica que los renglones de M son linealmente dependientes.

Podemos hacer operaciones elementales para llevar la matriz M a una matriz escalonada M' . Por las propiedades 1, 2 y 5 de los determinantes, cada operación elemental solo puede cambiar el determinante multiplicándolo por -1 o por un número real r distinto de 0 .

Pero como M' es una matriz cuadrada escalonada, M' es una matriz triangular, así que el determinante de M' es el producto de las entradas en la diagonal principal de M' . Por lo tanto $\text{Det } M' = 0$ implica que una entrada en la diagonal de M' es 0 , y como M' es escalonada todas las entradas en la diagonal abajo de esa son 0 , así que el último renglón es 0 , lo que dice que el rango de M' , que es igual al rango de M , es menor que n . \square

Corolario. El rango de una matriz M de $m \times n$ es r si y solo si el determinante de alguna submatriz de M de $r \times r$ es distinto de 0, y el determinante de todas las submatrices de $(r+1) \times (r+1)$ es 0.

Demostración.

Problemas.

9. ¿Que relación hay entre el determinante de una matriz de $n \times n$ y el determinante de su transpuesta? Hint: ¿Que pasa para $n=2$ y para $n=3$?

10. Demuestra que si los renglones de una matriz cuadrada son linealmente independientes, entonces las columnas de la matriz son linealmente independientes. Hint: problema anterior.

11. Si definiéramos el determinante de una matriz M como la suma de todos los productos de entradas en distintos renglones y columnas de M , sin considerar los signos de las permutaciones ¿Cuales de las 7 propiedades del determinante descritas anteriormente se cumplirían y cuales no?