Números

Los **números** son objetos abstractos que se han usado para contar, ordenar, repartir, medir...

El desarrollo de la civilización hizo necesario inventar (o descubrir?) cada vez mas números, con los que se podían hacer cada vez mas cosas: primero fueron los números naturales, luego las fracciones, los números negativos, los números reales, los números complejos...

Algo que distingue a los números de otros objetos matemáticos es que con ellos se pueden hacer **operaciones** que producen otros números:

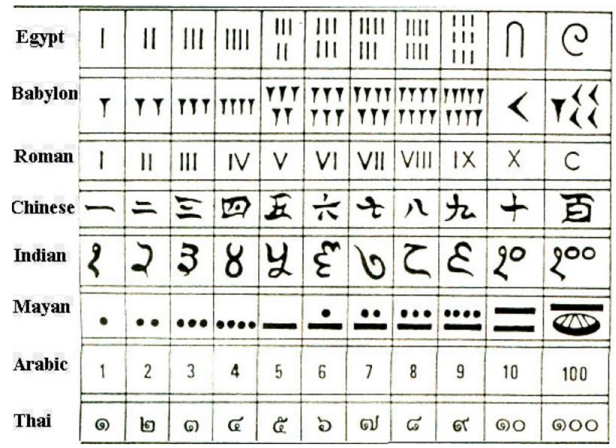
- Los números naturales se pueden sumar y multiplicar para obtener otros naturales.
- Los números enteros se pueden sumar, restar y multiplicar para obtener otros enteros.
- Las fracciones se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir (excepto si el divisor es 0) para obtener otras fracciones.

Uno puede preguntarse si no existirán otros números con los que se puedan hacer aún mas cosas. Entender las propiedades de los números a través de sus operaciones ha hecho posible la invención de muchos nuevos objetos matemáticos que aunque no sirven para contar, repartir o medir, sí admiten operaciones que los hacen similares a los números. El álgebra abstracta trata sobre estos objetos y sus operaciones.

Aquí aprenderemos algo sobre las distintas clases de números y sus operaciones, y veremos algunos ejemplos de grupos, anillos y campos, que los generalizan.

Lo importante no es que aprendan cosas de memoria, sino que entiendan las ideas y sean capaces de enfrentarse a problemas nuevos. Muchos de estos no pueden hacerse aplicando mecánicamente una fórmula o un procedimiento, tienen que pensar para hacerlos. Pedir la solución no solo les quita el chiste, sino que los deja mal parados cuando tengan que enfrentarse solos a otros problemas.

Los números naturales



Los números naturales son los que usamos para contar y que nosotros escribimos como 1,2,3,4...

Hay que distinguir entre los números naturales y la forma en que los escribimos: los babilonios, los egipcios, los chinos, los romanos y los mayas los escribían de maneras distintas. Algunas eran prácticas solo para números muy pequeños, como |||||||||||||||||||||| y otras para números un poco mas grandes, como MCMLXXXIV. Con estos sistemas de escritura sumar es latoso y multiplicar es una proeza.

El sistema que usamos actualmente fue inventado en el siglo V en la India, fue desarrollado por los árabes desde el siglo VIII y llegó a Europa en el siglo XII. Es un sistema *posicional* en el que todos los números pueden escribirse usando únicamente los símbolos que representan a los números mas chicos.

Ejemplo. El sistema posicional en base 10 requiere símbolos para los primeros 10 números, nosotros usamos 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

En este sistema los números se escriben como sumas de potencias de 10:

$$2034 = 2\text{x}10^3 + 0\text{x}10^3 + 3\text{x}10 + 4$$

Para escribir en base 10 basta escribir los residuos que se obtienen al dividir repetidamente entre 10:

$$5173 = 517\text{x}10 + 3$$
$$517 = 51\text{x}10 + 7$$
$$51 = 5\text{x}10 + 1$$
$$5 = 0\text{x}10 + 5$$ *los dígitos del número son los residuos escritos en orden inverso.*

¿Por que usamos base 10? Probablemente porque tenemos 10 dedos. Pero no hay nada especial con el número 10, podemos usar cualquier numero mayor que 1 como base:

Lema. Si n es un número natural mayor que 1, entonces cada número natural N se puede escribir de manera única como suma de potencias de n: $N = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$ con $0 \le a_i < n$.

Demostración. Podemos dividir a cada número repetidamente entre n, apartando en cada paso el residuo.

$$\begin{array}{ll}
N = N_1\, n + r_0 & 0 \le r_0 < n \\
N_1 = N_2\, n + r_1 & 0 \le r_1 < n \\
N_2 = N_3\, n + r_2 & 0 \le r_2 < n \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
N_k = 0\, n + r_k & 0 \le r_k < n
\end{array}$$

entonces $N = N_1 n + r_0 =$

$= (N_2 n+r_1)n + r_0 =$

$= ((N_3 n+r_2)n+r_1)n + r_0 =$

$= (((N_4 n+r_4)n+r_2)n+r_1)n + r_0 =$

$= ((((..(0n+r_k)n+...)n+r_4)n+r_2)n+r_1)n + r_0 =$

$= r_k n^k + r_{k-1} n^{k-1} +... + r_2 n^2 + r_1 n + r_0$

Ahora podemos invertir el proceso para ver que los coeficientes de cualquier representación de N como suma de potencias de n son los residuos de la división repetida de N entre n, y como en cada paso solo hay un resultado posible para la división y el residuo, la expresión de cada número N en base n es única. •

El lema anterior muestra que cada natural N puede expresarse como suma de potencias de n, y podemos escribir a N en base n usando los residuos de las divisiones consecutivas de N entre n. Necesitamos n símbolos para representar a los n residuos, como a veces usamos los mismos símbolos en distintas bases, pondremos un indice después de la secuencia para distinguirlas.

Ejemplo. En base 7 se necesitan 7 símbolos, podemos usar 0,1,2,3,4,5,6.

¿Que número representa 342_7? $342_7 = 3x7^2 + 4x7 + 2x1 = 147 + 28 + 2 = 177$

¿Como se escribe 659 en base 7? Hay que dividir repetidamente entre 7:

659 = 94x7 + 1

94 = 13x7 + 3

13 = 1x7 + 6

1 = 0x7 + 1 así que $659_{10} = 1631_7$

podemos comprobar el resultado calculando $1x7^3 + 6x7^2 + 3x7 + 1 = 343 + 294 + 21 + 1 = 659$.

Ejemplo. Para escribir en base 12 necesitamos 12 símbolos, digamos: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B.

¿Como se escribe $A42_{12}$ en base 10? $A42_{12} = 10x12^2 + 4x12 + 2 = 1200+48+2 = 1248_{10}$

¿Como se escribe 1000 en base 12? 1000 = 83x12 + 4

83 = 6x12 + 11

6 = 0x12 + 6 así que $1000_{10} = 6B4_{12}$

Podemos comprobarlo calculando $6x12^2 + 11x12 + 11 = 864 + 132 + 4 = 1000$.

Ejemplo. En base 2 solo se necesitan dos símbolos, podemos usar 0 y 1.

¿Que número representa $\mathbf{1001101_2}$ en base 10?

$\mathbf{1001101_2} = 1x2^6+0x2^5+0x2^4+1x2^3+1x2^2+0x2^1+1x2^0= 64+8+4+1 = 77_{10}$

¿Como se escribe 315_{10} en base 2?

$$315 = 157x2 + 1$$
$$157 = 78x2 + 1$$
$$78 = 39x2 + 0$$
$$39 = 19x2 + 1$$
$$19 = 9x2 + 1$$
$$9 = 4x2 + 1$$
$$4 = 2x2 + 0$$
$$2 = 1x2 + 0$$
$$2 = 0x2 + 1 \qquad 315_{10} = \mathbf{100111011}_2$$

Pregunta. ¿Hasta que número podemos contar con los dedos de las manos?

De la manera usual, en que cada dedo vale 1 solo podemos contar hasta 10. Pero si tomamos en cuenta las posiciones de los dedos, y les damos valores distintos, entonces podemos contar todos los números que en base 2 tienen hasta 10 cifras. Estos son 2^{10}=1024, contando al 0, así que podemos contar hasta 1023.

Una gran ventaja de la notación posicional con cualquier base es que la suma y multiplicación pueden hacerse fácilmente conociendo la suma y multiplicación de los “dígitos” de la base:

Ejemplos.

En base 2 las tablas de la suma y multiplicación son muy sencillas:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

x	0	1
0	0	0
1	0	1

Y las sumas y multiplicaciones se ven así

$$\begin{array}{r} 101111011 \\ +\ 110010010 \\ \hline 1100001101 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10110101 \\ \text{x}\quad 101 \\ \hline 10110101 \\ 00000000 \\ 10110101 \\ \hline 1101001001 \end{array}$$

En base 6 las tablas de la suma y multiplicación se ven así:

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	10
2	2	3	4	5	10	11
3	3	4	5	10	11	12
4	4	5	10	11	12	13
5	5	10	11	12	13	14

x	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	12	14
3	0	3	10	13	20	23
4	0	4	12	20	24	32
5	0	5	14	23	32	41

Y las sumas y productos se ven:

$$\begin{array}{r} 431 \\ +\ 142 \\ \hline 1013 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 321 \\ \text{x } 32 \\ \hline 1042 \\ 1403 \\ \hline 15112 \end{array}$$

Problemas.

1. Escribe los números dados en las otras bases (en base 16 se usan los dígitos 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

Base 10	*Base 16*	*Base 2*
379_{10}		
	$3E0A_{16}$	
		1010101_2

2. Traduce mentalmente entre base 9 y base 7:

a. $10_9 = \ _7?$ b. $10_7 = \ _9?$ c. $77_9 = \ _7?$ d. $63_7 = \ _9?$

3. ¿Cuantos dígitos tiene el número 5463782 escrito en base 60? ¿Cual es el dígito mas significativo? *hint: piensen y háganlo sin escribir el número en esa base.*

4. Haz las siguientes operaciones directamente en base 5:

$$\begin{array}{r} 13423_5 \\ +\ 4131_5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 341_5 \\ \times\ 32_5 \\ \hline \end{array}$$

5. Escribe la tabla de multiplicación en base 7.

6. a. ¿Como se ven los números pares en base 2?
   b. ¿Como se ven los números pares en base 3?

7. Podemos escribir los números en base n usando n símbolos. Viendo sólo los símbolos no podemos adivinar su valor, pero que tal que podemos ver sus sumas o productos?

a. $\begin{array}{r} \Omega\ \square\ \Omega\ \bullet \\ +\ \ \square\ \bullet\ \diamond\ ♪ \\ \hline \bullet\ \Omega\ \bullet\ \Omega\ \square \end{array}$ (base 5) b. $\begin{array}{r} \blacklozenge\spadesuit \\ \times\ \ \heartsuit\clubsuit \\ \hline \spadesuit\heartsuit\heartsuit\clubsuit \end{array}$ (base 4)

Las operaciones en **N**.

Al conjunto de todos los números naturales 1,2,3,... se le denota por **N**.
Las dos operaciones + (suma) y · (producto) en **N** tienen propiedades especiales:

- a+b = b+a — *la suma es conmutativa*
- a · b = b · a — *el producto es conmutativo*

- (a+b)+c = a+(b+c) — *la suma es asociativa*
- (a · b) · c = a · (b · c) — *el producto es asociativo*

- Si a+c = b+c entonces a = b — *en la suma se vale la cancelación por ambos lados*
- Si a · c = b · c entonces a = b — *en el producto se vale la cancelación por ambos lados*

- a·(b+c) = a·b+a·c — *el producto se distribuye con la suma*

Las propiedades de la suma tienen que ver conque al contar el orden no importa, y que tampoco importa como agrupemos, las propiedades del producto tienen que ver conque es una suma repetida.

Aunque usamos las propiedades anteriores todo el tiempo y sin pensarlo, en **N** se pueden definir muchas otras operaciones, para las que esas propiedades pueden cumplirse o no.

Ejemplo. Consideremos las operaciones en **N** definidas por $a\#b = a+b+1$ $\qquad a*b = a$

- $\#$ es conmutativa, ya que $a\#b = a+b+1$ y $b\#a = b+a+1$ así que $a\#b = b\#a$.
- $*$ no es conmutativa, porque $a*b = a$ mientras que $b*a = b$ así que $a*b \neq b*a$.
- $\#$ es asociativa ya que $a\#(b\#c) = a\#(b+c+1) = a+(b+c+1)+1 = a+b+c+2$
  y $(a\#b)\#c = (a+b+1)\#c = (a+b+1)+c+1 = a+b+c+2$ $\therefore$ $a\#(b\#c) = (a\#b)\#c$
- $*$ es asociativa ya que $a*(b*c) = a*b = a$ y $(a*b)*c = a*c = a$ $\therefore$ $a*(b*c) = (a*b)*c$
- $\#$ se distribuye con $*$, es decir, $a\#(b*c) = (a\#b)*(a\#c)$
  ya que $a\#(b*c) = a\#b = a+b+1$ y $(a\#b)*(a\#c) = (a+b+1)*(a+c+1) = a+b+1$
- $*$ no se distribuye con $\#$, es decir, $a*(b\#c) \neq (a\#b)*(a\#c)$
  porque $a*(b\#c) = a*(b+c+1) = a$ mientras que $(a*b)\#(a*c) = a\#a = a+a+1$
- para $\#$ se vale la cancelación por ambas lados:
  - si $a\#b = a\#c$ entonces $a+b+1 = a+c+1$ así que $b = c$
  - si $b\#a = c\#a$ entonces $b+a+1 = c+a+1$ así que $b = c$
- para $*$ solo se vale la cancelación por la derecha, pero no por la izquierda:
  - si $b*a=c*a$ entonces $b=c$
  - si $a*b=a*c$ entonces $a=a$, pero esto no implica que $b=c$

Ejercicio. La resta no es una operación bien definida en **N** (porque puede dar un numero negativo o 0) pero la *diferencia* $a\Delta b =|a-b|$ si es una operación bien definida en **N** $\cup\{0\}$:

- ¿Δ es conmutativa?
  $a\Delta b =|a-b|=|b-a|=b\Delta a$ así que Δ si es conmutativa
- ¿Δ es asociativa?
  La pregunta es si $(a\Delta b)\Delta c = a\Delta(b\Delta c)$, es decir si $||a-b|-c|=|a-|b-c||$
  pero esto no siempre es cierto, por ejemplo $||1-2|-3|=2$ pero $|1-|2-3||=0$ así que Δ no es asociativa
- ¿Se vale la cancelación?
  La pregunta es si $a\Delta b=a\Delta c$ implica que $b=c$, es decir si $|a-b|=|a-c|$ implica $b=c$
  esto no es siempre cierto, por ejemplo $|2-1|=|2-3|$ pero $1\neq 3$ así que no se vale la cancelación
- ¿Δ se distribuye con la suma?
  La pregunta es si $a\Delta(b+c)=a\Delta b+a\Delta c$ es decir si $|a-|b+c|| = |a-b|+|a-c|$
  esto no siempre es cierto, por ejemplo $|1-|2-3||=0$ pero $|1-2|+|1-3|=3$ así que Δ no se distribuye sobre la suma.

Problema.

8. ¿Cuales de las siguientes operaciones en **N** son conmutativas? ¿Cuales son asociativas? ¿para cuales se vale la cancelación (por un lado o por los dos)? ¿cuales se distribuyen con la suma (por un lado o por los dos)?

a. $m♦n = 2m+3n$ b. $m♥n = \max\{m,n\}$ c. $m♣n = m^n$

El orden en **N**.

Observar que para cada par de números naturales a y b sucede una de 3 cosas: $a=b$, o existe x tal que $a+x=b$, o existe x tal que $a=b+x$.
Decimos que a es *menor* que b, y escribimos $a<b$, si existe x en **N** tal que $a+x=b$.
Así que para cada par de números a y b en N sucede que $a=b$ o $a<b$ o $b<a$, y esto define un *orden* en **N**.

El orden en **N** tiene las siguientes propiedades:

1. Si $a<b$ y $b<c$ entonces $a<c$
2. Si $a<b$ entonces $a+c<b+c$
3. Si $a<b$, entonces $a·c<b·c$

Demostración.
1. Si a<b entonces existe x ∈ **N** tal que a+x=b, y si b<c entonces existe y∈**N** tal que b+y=c. Sustituyendo queda a+x+y=b+y=c, así que existe z=x+y ∈ **N** tal que a+z=c, y esto dice que a<c.

2. Si a<b entonces existe x ∈ **N** tal que a+x=b. Sumando c de ambos lados queda a+x+c=b+c así que (a+c)+x=(b+c) con x ∈ **N** y esto dice que a+c<b+c.

3. Si a<b entonces existe x ∈ **N** tal que a+x=b. Multiplicando c de ambos lados queda (a+x)c=bc así que ac+xc=bc con xc ∈ **N** y esto dice que ac<bc. •

Problemas.

11. Demuestra que si a,b,c son números naturales y $a+c<b+c$ entonces $a<b$.

12. ¿Será verdad que si $a·b<c·d$ entonces $a<c$ o $b<d$? Demuéstralo o da un contraejemplo.

13. ¿Si m y n son dos números naturales y m<n, quien es mas grande, m^n o n^m?

14. Si en la definición de desigualdad reemplazamos la suma por la multiplicación, obtenemos otra noción importante: decimos que a *divide* a b, y escribimos a|b, si existe z en **N** tal que a·z=b. ¿Que propiedades análogas a las del orden tiene la divisibilidad?

Inducción en **N**.

Una propiedad muy importante de **N** es que existe un numero natural (el 1) tal que al sumarlo repetidamente da todos los números naturales. De aquí se obtiene el **principio de inducción**.

Principio de inducción: Si S es un subconjunto de **N** tal que

- $1 \in S$.
- Si $n \in S$ entonces $n+1 \in S$

entonces S contiene a todos los números naturales.

El principio de inducción es muy útil para demostrar afirmaciones sobre los números naturales. Para demostrar por inducción que una afirmación vale para todos los naturales basta:

1. *Probar que la afirmación vale para el numero 1.*
2. *Suponer que la afirmación vale para algún numero n y demostrar que entonces debe valer para el siguiente número, n+1.*

El mismo principio se usa para demostrar afirmaciones para todos los naturales a partir de alguno, en este caso hay que empezar por demostrar la afirmación para ese numero.

Ejemplos.

- Demostrar que la suma de los n primeros números impares es $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

  Para $n=1$ la formula dice $1=1^2$, lo cual es cierto.

  Supongamos ahora que la formula vale para algún numero n y mostremos que entonces también vale para n+1: La formula para n es $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ y la formula para n+1 (en caso de ser cierta) seria $1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$

  Si $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ entonces sumándo el siguiente numero impar queda

  $1+3+5+...+(2n-1)+(2n+1) = n^2 + 2n+1 = (n+1)^2$

  así que la formula también vale para n+1.

- Demostrar por inducción que para todo numero natural n, el numero n^2+n es par.

  Para 1 se tiene que $1^2+1=2$ que es impar.

  Supongamos ahora que la afirmación es cierta para un numero n, es decir, que n^2+n es par, y demostremos que es cierta para el siguiente numero, n+1, es decir, que $(n+1)^2+(n+1)$ es par.

  $(n+1)^2+(n+1)= n^2+2n+1+n+1= n^2+n+2(n+1)$. que es suma de dos pares, así que es par.

  n^2+n es par por hipotesis de induccion, $2(n+1)$ es múltiplo de 2

- Demostrar que para todo numero natural $n\geq 4$, se cumple que $4n\leq 2^n$.

  Para $n=4$ $4\cdot 4=16$ y $2^4=16$ así que la desigualdad se cumple.

  Supongamos ahora que la desigualdad se cumple para algún $n\geq 4$, es decir $4n\leq 2^n$ y mostremos que debe cumplirse para n+1, es decir, que $4(n+1)\leq 2^{n+1}$:

  Si $4n \leq 2^n$ entonces $4(n+1) = 4n+4 \leq 2^n+2^n = 2\cdot 2^{nv} \leq 2^{n+1}$.

  ($4n\leq 2^n$ por hipótesis de inducción, $4\leq 2^4$ ya que $n>2$)

Hay una variante del principio de inducción que a veces es muy útil:

Principio de inducción fuerte: Si S es un subconjunto de **N** tal que

- $1 \in S$.
- Si los números menores que n están en S, entonces $n \in S$

entonces S contiene a todos los números naturales.

Para demostrar que una afirmación vale para todos los números naturales, basta:

1. *Demostrar que la afirmación vale para el numero 1.*
2. *Suponer que la afirmación vale para todos los números naturales menores a n y demostrar que entonces también vale para n.*

Ejemplo.

- Demostrar que cada numero natural n es suma de potencias *distintas* de 2.

  Para $n=1$ tenemos $1=2^0$.

  Supongamos ahora que todos los números naturales menores que n son suma de potencias distintas de 2, y demostremos que lo mismo vale para n.

  Si n es una potencia de 2, $n=2^k$ ya acabamos. Si no, tomemos la potencia mas grande de 2 que sea menor que n, digamos que $2^k<n$ pero que $n<2^{k+1}$.

  Entonces el número $m=n-2^k$ es mayor que 0 y menor que n. Por hipótesis de inducción m es suma de potencias distintas de 2, digamos $m=2^{k_1}+2^{k_2}+...+2^{k_r}$ con $k_i<k_2<...<k_r$

  Entonces $n=2^{k_1}+2^{k_2}+...+2^{k_r}+2^k$, y ya casi acabamos, pero necesitamos asegurarnos que todas las potencias de 2 sean distintas. Si $k=k_s$ entonces $n \geq 2^{k_s}+2^k=2\cdot 2^k=2^{k+1}$ lo que es imposible porque elegimos $n<2^{k+1}$.

La inducción también puede usarse para definir funciones en **N** *recursivamente* dando sus valores para los primeros números y definiéndola para números mayores en términos de los anteriores.

Ejemplos.

- Las potencias de un numero a se pueden definir *inductivamente* como $a^1=a$ y $a^{n+1}=a\cdot a^n$
- La sucesión de Fibonnaci se define de manera inductiva, haciendo $F_1=1$, $F_2=1$ y definiendo para $n>2$, $F_n = F_{n-1}+F_{n-2}$.

  Los primeros números de la sucesión son 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,...

Otra propiedad importante de **N** es el:

Principio del buen orden. Cada subconjunto no vacío de **N** tiene un primer elemento (es decir, uno que es menor o igual que todos los elementos del subconjunto).

El principio del buen orden puede usarse para probar que una afirmación n es cierta para *ningún* numero natural.

> *Basta suponer que la afirmación vale para un número natural n, y demostrar que entonces debe valer para un número natural menor que n.*

Si podemos demostrar esto, entonces el conjunto de los naturales donde la afirmación vale no tiene un primer elemento (ya que siempre hay un elemento menor) por lo que debe ser el conjunto vacío. A este método de demostración por contradicción también se le conoce como método *de descenso infinito*.

Ejemplo.

- Demostrar que ningún cuadrado es igual al doble de otro cuadrado, es decir que no existen dos naturales m y n tales que $m^2=2n^2$.
  Demostración. Supongamos que si existieran tales m y n, y elijamos m de manera que sea el menor número natural con esta propiedad. Como $m^2=2n^2$ entonces m^2 es par y por lo tanto m es par, así que m=2r y por lo tanto $4r^2=2n^2$ asi que $2r^2=n^2$. Así que n cumple la misma propiedad que cumplia m, pero n es menor que m, contradiciendo que n era el menor de todos esos números.

Hay que tener cuidado al usar inducción o el principio del buen orden. La siguiente afirmación es falsa. ¿que está mal con la "demostración"?

> Para todo numero natural n, n^2+n+1 es par.
>
> *"Demostración"* Si la afirmación no fuera cierta existirían números naturales para los que falla. Sea n el primero. Entonces n^2+n+1 es impar, pero entonces $(n-1)^2+(n-1)+1 = n^2-2n+1+n-1+1 = (n^2+n+1)-2n$ es también sería impar, así que n no era el primer numero natural para el que la afirmación no era cierta, y esto es una contradicción.

Lema. Los principios de inducción, inducción fuerte y del buen orden en **N** son equivalentes.

Demostración.

PIF ⇒ **PBO**

Si el **PBO** fallara, existiría un subconjunto no vacío S de **N** que no tiene un primer elemento.

Entonces $1 \in$ **N**-S (porque si $1 \in S$ entonces 1 sería el primer elemento de S) y si $1,2,3,...,n \in$ **N**-S entonces $n+1 \in$ **N**-S (porque si no, n+1 sería el menor elemento de S).

Así que por el **PIF**, **N**-S es todo **N** y por lo tanto S es vacío, lo que es una contradicción.

PBO ⇒ **PIF**

Si el **PIF** fallara, existiría un subconjunto S de **N** que contiene al 1 y tal que $1,2,3,...,n-1 \in S$ □ $n \in S$ pero S no es todo **N**. Entonces **N**-S es no vacío, y **N**-S no puede tener un primer elemento (si n fuera el primer elemento de **N**-S entonces $1,2,3,...,n-1 \in S$, pero entonces $n \in S$) así que el **PBO** fallaría.

PI $\Rightarrow$ PBO

Si el **PBO** fallara, existiría un subconjunto no vacío S de **N** que no tiene un primer elemento.

Entonces $1 \notin S$ (porque si $1 \in S$ entonces 1 es el primer elemento de S).

Sea $A = \{n \in N \ / \ n<s \ \ \forall s \in S\}$. Entonces $1 \in A$ y si $n \in A$ entonces $n+1 \in A$ (porque si $n \in A$ y $n+1 \notin A$ entonces $n+1 \in S$ y n+1 sería el menor elemento de S. Así que por el **PI**, A sería todo **N** y por lo tanto S sería vacío, lo que es una contradicción.

PBO $\Rightarrow$ PI

Si el **PI** fallara, existiría un subconjunto S de **N** que contiene al 1 y tal que si $n \in S$ entonces $n+1 \in S$, pero S no es todo **N**.

Entonces **N**-S es no vacío, y **N**-S no puede tener un primer elemento (si m fuera el primer elemento de **N**-S entonces $n-1 \in S$, pero entonces $n=(n-1)+1 \in S$) así que el **PBO** fallaría.

Problemas.

15. Demuestra por inducción que $2+4+6+...+2n = n(n+1)$

16. Demuestra por inducción que para todo n en **N**, n^3+2n es divisible entre 3.

17. Demuestra usando inducción fuerte que cada numero natural mayor o igual a 13 es la suma de un múltiplo de 3 y un múltiplo de 4 (los múltiplos deben ser ambos positivos).

18. Define el factorial de n de manera recursiva, y demuestra que para todo $n \geq 4$ se cumple $2^n < n!$

19. Muestra por inducción que si $F_1, F_2, F_3, \ldots$ son los números de Fibonacci, entonces

$$F_1+F_2+\ldots+F_n= F_{n+2}-1$$

20. Demostrar usando el método de descenso al infinito que no existen dos números naturales m y n tales $m^2 - n^2 = mn$ (hint: primero muestren que ambos deberían ser pares)