Los números racionales.

Una **fracción** es una expresión de la forma $\frac{m}{n}$ con m y n enteros, $n \neq 0$.

Al hablar de fracciones asumimos que es posible partir a cada numero natural m en n partes iguales: la fracción $\frac{m}{n}$ representa a la cantidad que multiplicada por n da m.

Observar que si m es un entero entonces $m = \frac{m}{1}$ y que $m\frac{1}{n} = \frac{m}{n}$.

Hay muchas fracciones distintas que representan la misma cantidad: si a es entero distinto de 0, entonces $\frac{m}{n}$ y $\frac{am}{an}$ representan la misma cantidad ya que si multiplicamos ambas cantidades por an dan lo mismo.

A las cantidades que pueden representarse como fracciones se les llama **números racionales**.

Lema 1. Dos fracciones $\frac{m}{n}$ y $\frac{m'}{n'}$ representan el mismo número racional si y solo si $mn'=m'n$.

Demostración. Si $mn'=m'n$ entonces $\frac{mn'}{nn'} = \frac{m'n}{nn'}$ y vimos antes que $\frac{mn'}{nn'} = \frac{m}{n}$ y que $\frac{m'n}{nn'} = \frac{m'}{n'}$.

Recíprocamente, si $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ y multiplicamos por nn' obtenemos $mn'=nn'\frac{m}{n} = nn'\frac{m'}{n'} = \frac{nn'm'}{n'} = nm'$. •

Teorema 2. Cada número racional distinto de 0 puede expresarse de manera única como $\frac{m}{n}$ con m y n primos relativos y n positivo.

Demostración. Si en la fracción $\frac{m}{n}$ los números m y n no son primos relativos y su mcd es d, entonces, $m=da$ y $n=db$ donde a y b son primos relativos y $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$, así que cada racional distinto de 0 es una fracción de primos relativos. Veamos que esta fracción reducida es única

Si $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ con m, n primos relativos y m', n' primos relativos, entonces por el lema 1 $mn'=m'n$.

Así que $m|m'n$ y como m y n son primos relativos entonces $m|m'$. También $m'|mn'$ y como m' y n' son primos relativos entonces $m'|m$. Como $m|m'$ y $m'|m$ y m y m' tienen el mismo signo, entonces $m=m'$.

El mismo argumento prueba que $n=n'$. •

Problemas.

1. (Sin usar calculadora) Ordena estas fracciones de acuerdo a las cantidades que representan:

   $5/7$ $6/9$ $7/10$ $8/11$ $9/13$ (hint: piensen que diría el lema 1 para desigualdades)

2. Demuestra que los únicos números racionales que pueden expresarse simultáneamente como fracciones de la forma a/m y b/n con m y n primos relativos son los enteros.

Podemos definir la suma de dos fracciones con el mismo denominador como $\frac{m}{n}+\frac{m'}{n}=\frac{m+n'}{n}$

y la suma de dos fracciones con distinto denominador debe ser $\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}=\frac{mn'}{nn'}+\frac{nm'}{nn'}=\frac{mn'+m'n}{nn'}$.

Es inmediato que la suma de fracciones es conmutativa y es fácil ver que es asociativa (tarea).

La multiplicación de fracciones está dada por $\frac{m}{n}\cdot\frac{a}{b}=\frac{ma}{nb}$

de modo que multiplicar una cantidad por $\frac{m}{n}$ equivale a multiplicarla por m y dividirla entre n.

Las fracciones también pueden dividirse: $\frac{a}{b}\div\frac{m}{n}$ es la cantidad que multiplicada por $\frac{m}{n}$ da $\frac{a}{b}$.

Como $\frac{an}{bm}\cdot\frac{m}{n}=\frac{a}{b}$ entonces $\frac{a}{b}\div\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{n}{m}$

Teorema 3. Los números racionales con la suma y la multiplicación, forman un campo.

Demostración. La suma de fracciones es una fracción y el producto de fracciones es otra fracción. La suma y el producto son operaciones asociativas y conmutativas, y el producto se distribuye con la suma. El 0 es neutro aditivo y cada racional tiene un inverso aditivo. El 1 es neutro multiplicativo y cada racional $\frac{m}{n}\neq 0$ tiene un inverso multiplicativo $\frac{n}{m}$. Así que se cumplen todos los axiomas de campo. •

Al campo formado por los números racionales se le denota por **Q** (de *Quotient*).

Problemas.

3. Calcula y simplifica

a. 100/99 – 99/100 b. 4/15 · 9/10 · 25/6 c. (9/8) ÷ (5/6 ÷ 3/4)

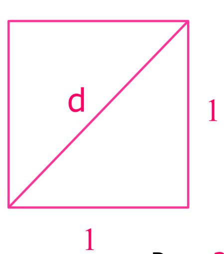
d. (n+1)/n -n/(n+1) e. (n-1)/n ÷ n/(n+1)

4. (Fracciones egipcias) Los egipcios escribían las fracciones puede como suma de inversos de naturales *distintos*, o sea como una suma de fracciones $1/n_1+1/n_2+...1+/n_k$ con *distintos* n_i's, por ejemplo 2/3=1/2+1/6. Encuentra descomposiciones en fracciones egipcias para las fracciones

a. 2/5 b. 3/5 c. 4/5 d. 6/7

Números irracionales.

Los pitagóricos creían que el universo esta regido por los números enteros, y en particular, pensaban que todas las magnitudes podrían representarse usando fracciones, hasta que a alguien se le ocurrió preguntarse cual fracción representaría a la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1.



Por el teorema de Pitagoras, la diagonal del cuadrado satisface $d^2=1^2+1^2=2$, es decir que d es un número cuyo cuadrado es 2.

Si $d=\frac{m}{n}$ con m y n enteros entonces $2=\frac{m^2}{n^2}$ así que $2n^2=m^2$

Esto es imposible porque en la descomposición prima de m^2 cada factor debe aparecer una cantidad par de veces y lo mismo pasa para n^2, así que en la descomposición prima de $2n^2$ el 2 debe aparecer una cantidad *impar* de veces.

Pero $2n^2$ y m^2 deben tener los mismos factores primos porque la descomposición es única.

La conclusión es que no existe ninguna fracción que represente a d, así que existen magnitudes que no pueden expresarse como fracciones. Estas magnitudes son llamadas **irracionales** (porque no son la razón de dos enteros). El hecho de que exista un número irracional implica que existen muchísimos.

Lema 4. La suma de numero irracional y un numero racional es irracional y el producto de un irracional por un racional distinto de 0 es un irracional.

Demostración. Si r y r' son racionales y i es irracional, entonces $r+i=r'$ implicaría que $i=r-r'$, pero la diferencia de racionales es racional. Y si $ri=r'$ y $r\neq 0$, entonces $i=r'/r$ pero el cociente de racionales es racional. •

Ojo: la suma y el producto de irracionales puede ser racional o irracional.

Corolario 5. Hay al menos tantos irracionales como racionales.

Demostración. Si a todos los números racionales les sumamos el mismo numero irracional, obtenemos puros números irracionales. Esto da una función invectiva del conjunto de números racionales al conjunto de números irracionales (ya que si $r+i=r'+i$ entonces $r=r'$). •

Lema 6. Si la raíz cuadrada de un entero n es un número racional, entonces debe ser un entero.

Demostración. Si la raíz de un entero n es una fracción a/b, entonces $n=(a/b)^2$ así que $nb^2 = a^2$.
Los factores primos de a^2 son los mismos que los de a, pero repetidos el doble de veces. Y los factores primos de b^2 son los mismos que los de b, pero repetidos el doble de veces. Como $nb^2 = a^2$ y la factorización en primos es única, en los dos lados deben aparecer los mismos factores primos el mismo número de veces. Como los factores primos de b^2 y a^2 aparecen un numero par de veces, entonces los factores primos de n también deben aparecer un numero par de veces, así que n es un cuadrado. •

Problemas.

5. a. Muestra que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{6}$ son irracionales, así que el producto de irracionales puede ser irracional. b. Demuestra que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es irracional, así que la suma de irracionales puede ser irracional. *(hint: elevalo al cuadrado y usa a.)*

6. Demuestra que las únicas fracciones *reducidas* que tienen un raiz n-esima racional son aquellas cuyo numerador y denominador tienen raíces n-esimas enteras.

Los números reales.

Los números naturales sirven para contar y los números racionales sirven para repartir. Estos números bastan para las aplicaciones practicas, pero no para las matemáticas mas avanzadas.

Los números reales surgieron del deseo de medir exactamente. Podemos pensar en los números reales como todas las posibles longitudes de segmentos en una recta, y es posible definir la suma, la resta, la multiplicación y la división geométricamente.

Así como escribimos a los números enteros como sumas de potencias de 10 (o de otro natural mayor que 1), también podemos escribir a números no enteros como sumas de potencias positivas y negativas de 10 (o de otro número).

Por ejemplo, al número $4x10^2+3x10^1+5x10^0+7x10^{-1}+6x10^{-2}+1x10^{-3}$ lo escribimos 435.761 donde el punto divide a las potencias negativas. Observar que cada suma finita de potencias de 10 es una fracción cuyo denominador es una potencia de 10 (en el ejemplo la fracción es $\frac{435761}{1000}$)

Con la notación decimal todas las fracciones cuyo denominador es una potencia de 10 pueden escribirse usando una cantidad finita de dígitos, pero la mayoría de las fracciones no pueden escribirse exactamente así.

Ejemplo. ¿Como se escribe 1/3 en notación decimal?

$$\frac{3}{10} < \frac{1}{3} < \frac{4}{10} \quad , \quad \frac{33}{100} < \frac{1}{3} < \frac{34}{100} \quad , \quad \frac{333}{1000} < \frac{1}{3} < \frac{334}{1000}$$

o sea que $0.3 < \frac{1}{3} < 0.4 \qquad 0.33 < \frac{1}{3} < 0.34 \qquad 0.333 < \frac{1}{3} < 0.334$

y escribimos $\frac{1}{3} = 0.333...$ (con puntos suspensivos) para indicar que la expansión continúa.

Las aproximaciones sucesivas dan el valor de $\frac{1}{3}$ cada vez con mas precisión, pero nunca dan el valor exacto, que estaría dado por una secuencia infinita de 3's.

Cada número real puede aproximarse tanto como queramos con una suma de potencias positivas y negativas de 10. Su valor exacto esta dado por una suma infinita

$$a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...a_110+a_010^0+a_{-1}10^{-1}+a_{-2}10^{-2}+a_{-3}10^{-3}+a_{-4}10^{-4}+a_{-5}10^{-5}+ \,.\,.\,.$$

que escribimos como una sucesión infinita de dígitos entre 0 y 9: $a_na_{n-1}...a_1a_0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}a_{-4}a_{-5}. . .$
y si a partir de un momento los dígitos son todos 0 no necesitamos escribirlos.

El número real representado por la sucesión infinita $a_na_{n-1}...a_1a_0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}a_{-4}a_{-5}. . .$
es el limite de la secuencia de números racionales representados por sucesiones truncadas:

$a_na_{n-1}...a_1a_0$
$a_na_{n-1}...a_1a_0.a_{-1}$
$a_na_{n-1}...a_1a_0.a_{-1}a_{-2}$
$a_na_{n-1}...a_1a_0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}$
$a_na_{n-1}...a_1a_0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}a_{-4}$
. . . .

Observar que 0.9999999999999.... = 1 ya que el limite de 0.9, 0.99, 0.999, 0.999, . . . es 1.

Por la misma razón, si expansión decimal de un número real tiene una cola de 9's, podemos reemplazarlos por 0's y aumentar el dígito anterior en 1 para obtener otra sucesión sin cola de 9's y que representa al mismo numero. Así que cada número real puede escribirse como una sucesión de dígitos sin colas de 9´s, y con esta convención la representación sí es única (tarea).

Podemos hallar la expansión decimal completa de cualquier fracción usando la división sintética.

Ejemplo. Para hallar la representación decimal de $\frac{1}{6}$ hacemos la división

```
     0.1666
6 | 1
    0
    10
     6
     40
      36
       40
        36
         4
```

Como el residuo se repite cada vez, el numero $\frac{1}{6}$ esta representado por una secuencia infinita

$\frac{1}{6}$ = 0.1666666... que se escribe $0.1\overline{6}$ para indicar que el 6 se repite una infinidad de veces.

Ejemplo. Para hallar las representaciones decimales de $\frac{3}{7}$ y $\frac{11}{7}$ hacemos las divisiones

```
     0.428571                 1.571428
7 | 3                    7 | 11
    0                          7
    30                         40
    28                         35
      20                         50
      14                         49
        60                         10
        56                          7
          40                         30
           50                        28
           49                          20
             10                        14
              7                          60
             30                          56
                                          40
```

cuando llegamos a un residuo que habíamos visto antes, los resultados de las divisiones se repiten.

Así que $\frac{3}{7}$ = 0.428571428571428571... = $0.\overline{428571}$

$\frac{11}{7}$ = 1.571428571428571428... = $1.\overline{571428}$

Lema 7. Cada fracción tiene una representación decimal con cola periódica, y todos números que tienen representaciones decimales con colas periódicas son fracciones.

Demostración.

$\Rightarrow$ La expansión decimal de la fracción m/n se obtiene por división repetida, y los residuos en cada paso son menores que n. Si algún residuo es 0, la división termina y m/n tiene expansión decimal finita. Si las divisiones no paran, entonces (como solo hay una cantidad finita de naturales menores que n) los residuos no pueden ser distintos a los anteriores indefinidamente, así que alguno se repite, y ese momento los resultados de las divisiones que habíamos hecho se repiten hasta llegar de nuevo al mismo residuo, etc.

$\Leftarrow$ Si el número a tiene una expansión decimal con una cola periódica con periodo k entonces el número $10^k a-a$ tiene expansión decimal finita (porque las colas de $10^k a$ y a se cancelan después de la primera repetición) así que $10^k a-a$ es una fracción m/n y por lo tanto $a=(m/n)/(10^k-1)$ también es una fracción. •

Corolario 8. Los números irracionales tienen expansiones decimales infinitas y no periódicas.

Demostración. Por el lema anterior cada numero a con expansión decimal finita o periódica es racional. •

Ejemplo. Ya vimos que √2 no es racional así que debe tener una expansión decimal infinita y no periódica Para hallarla hay que encontrar las fracciones con denominador 10^k que mejor aproximan √2 para cada k.

$1 < \sqrt{2} < 2$ ya que los cuadrados satisfacen $1 < 2 < 4$

$\frac{14}{10} < \sqrt{2} < \frac{15}{10}$ ya que los cuadrados satisfacen $\frac{196}{100} < 2 < \frac{225}{100}$

$\frac{141}{100} < \sqrt{2} < \frac{142}{100}$ ya que los cuadrados satisfacen $\frac{19881}{10000} < 2 < \frac{20164}{10000}$

Como √2 es irracional su expresión decimal no es periódica: aunque podemos hallar todos los dígitos que queramos no podemos darla completa.

Al escribir $\sqrt{2} = 1.42415...$ afirmamos que $\frac{141425}{100000} < \sqrt{2} < \frac{141426}{100000}$ y no decimos como sigue.

Si escribimos a los números reales como sucesiones de dígitos, debemos poder sumarlos y multiplicarlos sumando o multiplicando las sucesiones de dígitos. Esto es fácil cuando las sucesiones son finitas, pero no tanto cuando son infinitas porque no hay donde empezar!

Pero podemos definirlas como los limites de las sumas y productos de sucesiones finitas.

Ejemplos.

0.57438... + 0.46257... está entre 0.57438 + 0.46257 = 1.03695
y 0.57439 + 0.46258 = 1.03697

(si conocemos los números con 5 decimales, conocemos la suma con 4 decimales)

0.57438... x 0.46257... es 0.26569... está entre 0.57438 x 0.46257 = 0.2656909566
y 0.57439 x 0.46258 = 0.2657013262

(aunque conocemos estos números con 5 decimales, solo conocemos el producto con 3 decimales)

1234.57438... x 0.46257... está entre 1234.57438 x 0.46257 = 571.077070957
y 1234.57439 x 0.46258 = 571.089421326

(aunque conocemos estos números con 5 decimales, solo conocemos el producto con 1 decimal)

Sabemos que hay muchos números racionales y muchos irracionales ¿cuales serán mas?

Lema 9. **Q** es numerable (tiene la misma cardinalidad que **N**)

Demostración. Basta ver que podemos dar una biyección entre el conjunto de números naturales y el conjunto de fracciones m/n. Esto equivale a mostrar que podemos hacer una lista infinita que contenga a todas las fracciones. Hay muchas maneras de hacer esto, por ejemplo, podemos acomodar a las fracciones en renglones de acuerdo a su denominador e irllas recorriendo como en el dibujo:

. . . . -5/1 -4/1 -3/1 -2/1 -1/1 0/1 1/1 2/1 3/1 4/1 5/1 . . . . .
. . . . -5/2 -4/2 -3/2 -2/2 -1/2 0/2 1/2 2/2 3/2 4/2 5/2 . . . . .
. . . . -5/3 -4/3 -3/3 -2/3 -1/3 0/3 1/3 2/3 3/3 4/3 5/3 . . . . .
. . . . -5/4 -4/4 -3/4 -2/4 -1/4 0/4 1/4 2/4 3/4 4/4 5/4 . . . . .
. . . . -5/5 -4/5 -3/5 -2/5 -1/5 0/5 1/5 2/5 3/5 4/5 5/5 . . . . .
. . . . -5/6 -4/6 -3/6 -2/6 -1/6 0/6 1/6 2/6 3/6 4/6 5/6 . . . . .
. . . .

Teorema 10. **R** *no* es numerable (tiene cardinalidad mayor que **N**).

Demostración. Basta mostrar que el conjunto de reales entre 0 y 1 no es numerable, y para esto basta ver que no existe ninguna biyección entre el conjunto de números naturales y el conjunto de sucesiones de dígitos entre 0 y 9 (que corresponden a las posibles expansiones decimales de los reales entre 0 y 1).

Si existiera una biyección, podríamos escribir una lista de todas esas sucesiones:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}a_{17}\ldots \\
a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}a_{27}\ldots \\
a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}a_{37}\ldots \\
\;.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad. \\
a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}a_{n5}a_{n6}a_{n7}\ldots \\
\;.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.
\end{array}
$$

Vamos a ver que existe una sucesión $b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7\ldots$ que no esta en la lista:

Elijamos b_1 distinto de a_{11} y de 9, elijamos b_2 distinto de a_{22} y de 9, elijamos b_3 distinto de a_{33} y de 9, y para cada i, elijamos b_i distinto de a_{ii} y de 9. Entonces la sucesión $b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7\ldots$ es distinta de todas las de la lista (ya que difiere de todas ellas en al menos un dígito) y no tiene cola de 9´s.

Esto muestra que nuestra lista, no importa como la hagamos, no están todos los reales entre 0 y 1, así que **R** no puede ser numerable. •

Corolario 11. **I=R-Q** *no* es numerable (asi que hay mas números irracionales que racionales).

Definir a los números reales como todas las posibles longitudes de segmentos de una recta tiene un serio problema: si no podemos decir exactamente que es una recta tampoco podemos decir exactamente que son los números reales. Y definir a los reales por medio de su representación decimal tampoco es muy bueno porque la construcción depende de la base.

Una manera distinta de definir a los números reales, que suena rara pero es mas rigurosa, es identificar a cada número real con un *conjunto* de números racionales.

Pensemos en los conjuntos de racionales que tienen estas 2 propiedades:

1. Si el conjunto contiene a un racional r, entonces contiene a todos los racionales menores que r
2. El conjunto no es todo **Q**.

Cada uno de estos conjuntos determina a un numero real: el número mas chico que es mayor o igual a todos los racionales en el conjunto. Esto parece trampa (estamos diciendo que el conjunto determina a un real que no sabemos que existe) pero no lo es si pensamos que los reales *son esos conjuntos* de racionales, y si decimos como sumarlos y multiplicarlos, lo que es muy fácil:

Dados dos conjuntos A y B con la propiedad (1) definimos A+B como el conjunto formado por las sumas de elementos en A y en B, y definimos A·B como el conjunto de productos de elementos en A y en B. Es fácil ver que A+B y A·B tienen las propiedades (1) y (2), así que la suma y el producto de números reales son otros números reales. Y es inmediato de las propiedades de la suma y el producto en **Q** que esta suma y producto son conmutativos y asociativos, y que el producto se distribuye con la suma.

Problemas.

7. Demuestra que las únicas fracciones que tienen representación decimal finita son las que en forma reducida tienen denominador que es producto de potencias de 2 y/o de 5.

8. Calcula las expansiones decimales completas de las siguientes fracciones :

a. 1/7 b. 1/13 c. 4/17 d. 23/19

9. ¿A que fracciones *reducidas* corresponden las siguientes expansiones decimales periódicas?

a. $0.12323\overline{23}$ b. $3.4567\overline{567}$ c. $9.0009000\overline{9000}$

10. Muestra que si un número real tiene 2 representaciones decimales distintas entonces una de ellas es finita.

11. ¿Que tan largo puede ser el periodo de la expansión decimal de m/n? Justifica tu respuesta.

12. ¿Que relación hay entre las expansiones decimales de 3/7, 4/7 y 5/7? ¿será casualidad?

13. Calcula exactamente

a. $0.637\overline{637} + 0.5858\overline{58}$ b. $0.33\overline{3} \times 0.45\overline{45}$

14. Si $a= 0.a_1a_2a_3a_4 \dots$ y $b= 0.b_1b_2b_3b_4 \dots$

¿que tanto afectan las colas de a y b al producto $a \times b$?
¿cuales decimales del producto axb dependen del decimal a_n?

15. Si identificamos a un numero real a con un conjunto A de racionales con la propiedad (1).

a. ¿Con que conjunto de racionales se identifica $-a$?

b. ¿con que conjunto de racionales se identifica a^{-1}?

Los conjuntos tienen que estar descritos en términos de A y deben tener la propiedad (1).

Los números algebráicos

Sabemos que muchos números reales no son racionales, pero podemos preguntarnos si todos los números reales podrán obtenerse combinando racionales con las operaciones $+, -, \times, \div, \sqrt[n]{\ }$ por ejemplo

$$\sqrt[3]{2} \qquad 5+4\sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt[2]{5} - 4\sqrt[3]{6}}{\sqrt[4]{7} + \sqrt[5]{8}} \qquad \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}} \qquad \sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{5}}}$$

Pero no todos los reales son así, ya que que estos números forman un conjunto numerable:

Cada uno de estos números se obtiene a partir de una colección finita de racionales, haciendo una operación a la vez. Podemos demostrar que el conjunto de números que se obtienen haciendo n operaciones es numerable por inducción sobre el número de operaciones. Asi que el conjunto de estos números es la unión numerable de conjuntos numerables.

Ya sabemos que **Q** y **R** son campos. Cualquier campo contenido en **R** debe contener al 1, por lo tanto contiene a los enteros y a sus inversos, así que debe contener a **Q.**

¿Existirán campos "intermedios" que contengan a **Q** y estén contenidos en **R**?

Ejemplo. Los números de la forma $r+s\sqrt{2}$ con r,s en **Q** forman un campo:

1. La suma y el producto de números de esa forma es de esa forma:

   $r+s\sqrt{2} + u+v\sqrt{2} = (r+u) + (s+v)\sqrt{2}$

   $(r+s\sqrt{2})\,(u+v\sqrt{2}) = (ru+2sv) + (rv+su)\sqrt{2}$

2. Los inversos aditivos y multiplicativos de números de esa forma también son de esa forma:

   $(r+s\sqrt{2}) + (-u-v\sqrt{2})=0+0\sqrt{2} = 0$

   $(r+s\sqrt{2})\,\left(\frac{r}{r^2-2s^2} - \frac{s}{r^2-2s^2}\sqrt{2}\right) = 1$

Los campos que contienen a **Q** son llamados **extensiones** de **Q**. La intersección de dos campos contenidos en **R** es un campo (tarea), por lo que dado un conjunto de números reales $r_1, r_2, \ldots, r_k$, la intersección de todos los campos que los contienen es un campo y es el mas pequeño que los contiene.
Este es el **campo generado** por $r_1,r_2,\ldots,r_k$ y es denotado por $\mathbf{Q}(r_1,r_2,\ldots,r_k)$.

Ejemplo. El campo $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ esta formado por los números de la forma $r+s\sqrt{2}$ con r,s en **Q**.

Ejemplo. ¿Como es el campo generado por $\sqrt[3]{5}$?

Este campo debe contener a 1 y por lo tanto a todo **Q**. También debe contener al cuadrado de $\sqrt[3]{5}$, por lo tanto debe contener a todos los números de la forma $r + s\sqrt[3]{5} + t\sqrt[3]{5}^2$ con r,s,t en **Q** .

Estos números forman un anillo **A**, ya que la suma y el producto de números de esa forma es de esa forma.

Para ver que **A** es un campo hay que ver que los inversos aditivos y multiplicativos de los números de esa forma también son de esa forma. Lo primero es inmediato, para lo segundo usaremos álgebra lineal.

El anillo **A** es un espacio vectorial sobre **Q** ya que la suma de elementos de **A** es un elemento de **A**, y el producto de un elemento de **Q** por un elemento de **A** esta en **A**.

Como **A** esta generado por los vectores $1,\ \sqrt[3]{5}\ \text{y}\ \sqrt[3]{5}^2$ entonces **A** tiene dimensión ≤ 3 sobre **Q**. Así que si a es cualquier elemento de **A** distinto de 0, los vectores $1, a, a^2$ y a^3 deben ser linealmente dependientes sobre **Q**, por lo tanto existe una combinación lineal $r1+sa+ta^2+ua^3=0$ con $r,s,t,u \in \mathbf{Q}$ no todos 0.

Si $r\neq 0$, $1 = -s/r\ a - t/r\ a^2 - u/r\ a^3 = a\,(-s/r - t/r\ a - u/r\ a^2)$ así que $-s/r - t/r\ a - u/r\ a^2$ es el inverso de a.

Si $r=0$, entonces $a\,(s + ta + ua^2) = 0$, y como $a\neq 0$, entonces $s + ta + ua^2 = 0.$

Si $s\neq 0$, entonces $1 = - t/s\ a - u/s\ a^2 = a\,(- t/s - u/s\ a)$ por lo tanto $c = - t/s - u/s\ a$ es el inverso de a.

Si $s=0$, entonces $ta + ua^2 = 0$ por lo tanto $a\,(t + ua) = 0$ y como $a\neq 0$, entonces $t + ua = 0$ pero asi que a es racional, y entonces tiene inverso racional.

Como todos los elementos de **A** distintos de 0 tienen inversos, **A** es un campo.

Ejemplo. ¿como será el campo mas pequeño que contiene a los números $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$?
Un campo debe contener a 1 y si contiene a $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ debe contener también a $\sqrt{6}$, así que debe contener a todos los números de la forma $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$ con $a,b,c \in \mathbf{Q}$. Estos números forman un anillo **A**. para ver si forman un campo hay que ver si hay inversos multiplicativos. Para esto usamos álgebra lineal.

El anillo **A** es un espacio vectorial sobre **Q** ya que la suma de números de la forma $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$ es de esa misma forma y el producto de un racional por un número de esta forma es otro número de esta forma. Y como **A** está generado por los vectores $1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}$ su dimensión es a lo mas 4.

Si v es cualquier vector en **A** entonces $1,v,v^2,v^3,v^4$ deben ser linealmente dependientes, así que existe una combinación lineal $r_0 1+r_1v+r_2v^2+r_3v^3+r_4v^4=0$ donde no todos los r_j son 0.

Si $r_0\neq 0$ entonces $1=-r_1/r_0v-r_2/r_0v^2-r_3/r_0v^3-r_4/r_0v^4 = v(-r_1/r_0-r_2/r_0v-r_3/r_0v^2-r_4/r_0v^3)$

y esto dice que $-r_1/r_0-r_2/r_0v-r_3/r_0v^2-r_4/r_0v^3$ es el inverso de v.

Si $r_0=0$, tomamos al primer $r_j\neq 0$, y podemos despejar a r_jv^j como suma de potencias mayores de v, y de ahi podemos despejar a 1 como producto de v por una suma de poyencias de v, y esto dice que esta suma de potencias de v es el inverso de v.

Problema.

16. ¿Como es el campo generado por $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$? (da sus generadores como espacio vectorial sobre **Q** y di como son los números del campo, justificandolo brevemente sin demostrarlo)

Los **números algebráicos** son todos los números que son raíces de polinomios con coeficientes enteros.

Ejemplos.

- $3/5$ es algebráico porque es raíz del polinomio $5x - 3 = 0$
- $\sqrt{2}$ es algebráico porque es raíz del polinomio $x^2 - 2 = 0$

2

Ejemplo. Para ver que la razón áurea $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ es aun número algebráico, observemos que

$a^2 = \dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ así que $a^2 - a = 1$ y por lo tanto a es raíz del polinomio $x^2 - x - 1 = 0$.

Lema 12. Un número real a es algebraico si y solamente si sus potencias $1, a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ son linealmente dependientes sobre **Q**.

Demostración.

$\Rightarrow$ Si a es raíz del polinomio $r_nx^n+\ldots+r_3x^3+r_2x^2+r_1x+r_0=0$ con coeficientes en **Z**, entonces

$r_na^n+\ldots+r_3a^3+r_2a^2+r_1a+r_0 1=0$ lo que da una combinación lineal no trivial (con coeficientes en **Z**) de

$1, a, a^2, a^3,.., a^n$ que da 0, y esto dice que las potencias de a son linealmente dependientes sobre **Q**.

$\Leftarrow$ Si las potencias de a son linealmente dependientes sobre **Q** entonces existen números racionales $r_0,r_1,r,r_3,\ldots r_n$ no todos 0, tales que $r_na^n+\ldots+r_3a^3+r_2a^2+r_1a+r_0 1=0$.

Así que a es raíz del polinomio $r_nx^n+\ldots+r_3x^3+r_2x^2+r_1x+r_0=0$ con coeficientes racionales, multiplicandolo por el producto de los denominadores lo convertimos en uno con coeficientes enteros y las mismas raices. •

Ejemplo. Para ver si $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es algebraico, calculemos sus primeras potencias y busquemos alguna relación entre ellas.

$a = \sqrt{2}+\sqrt{3}$

$a^2= (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+3 = 5+2\sqrt{6}$

$a^3= (\sqrt{2}+\sqrt{3})^3 = 2\sqrt{2}+3\cdot 2\sqrt{3}+3\cdot 3\sqrt{2}+3\sqrt{3} = 11\sqrt{2}+9\sqrt{3}$

$a^4= (5+2\sqrt{6})^2 = 25+20\sqrt{6}+24 = 49+20\sqrt{6}$

así que $a^4-10a^2 = -1$ y por lo tanto $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es raíz del polinomio $x^4-10x^2 +1 = 0$.

Lema 13. Si el número a es raíz de un polinomio de grado n, entonces todas las potencias a^m son combinaciones lineales de $1, a, a^2 ,a^3 ,..., a^{n-1}$.

Demostración. Por inducción sobre el exponente de a^m.

Si $r_na^n + r_{n-1}a^{n-1} + r_{n-2}a^{n-2} + \ldots + r_2a^2 + r_1a + r_0 = 0$, entonces

$a^n = r_{n-1}/r_na^{n-1} + r_{n-2}/r_na^{n-2} + \ldots + r_2/r_na^2 + r_1/r_na + r_0/r_n$ así que a^n es combinación lineal de $1,a,a^2,..., a^{n-1}$.

Si multiplicamos la igualdad anterior por a queda

$a^{n+1} = r_{n-1}/r_na^n + r_{n-2}/r_na^{n--1} + \ldots + r_2/r_na^3 + r_1/r_na^2 + r_0/r_na$ y como a^n es combinación lineal de $1,a,a^2.. a^{n-1}$ entonces a^{n+1} es combinación lineal de $1,a,a^2,..., a^{n-1}$.

Si volvemos a multiplicar por a queda

$a^{n+2} = r_{n-1}/r_na^{n+1} + r_{n-2}/r_na^n + \ldots + r_2/r_na^4 + r_1/r_na^3 + r_0/r_na^2$ y como a^n y a^{n+1} son combinaciones lineales de $1,a,a^2.. a^{n-1}$ entonces a^{n+2} es combinación lineal de $1,a,a^2,..., a^{n-1}$. Etc.

Ejemplo. Si a es raíz del polinomio $2x^3 -3x^2 +4x +5 = 0$ entonces todas las potencias de a son combinaciones lineales de 1, a y a^2 con coeficientes en **Q**. Como $2a^3 -3a^2 + 4a +5 = 0$ entonces

$a^3 = {}^3/_2\, a^2 -2a -{}^5/_2$

$a^4 = {}^3/_2\, a^3 -2a^2 -{}^5/_2a = {}^3/_2({}^3/_2\, a^2 -2a -{}^5/_2) -2a -{}^5/_2 = {}^9/_4a^2 -5a -{}^{25}/_4$

$a^5 = {}^3/_2\, a^4 -2a^3 -{}^5/_2a^2 = {}^3/_2({}^9/_4\, a^2 -5a -{}^{25}/_4) -2({}^3/_2\, a^2 -2a -{}^5/_2) -{}^5/_2a^2 = -{}^{23}/_8\, a^2 -{}^7/_2a - {}^{35}/_8$

etc.

Corolario 14. Si el número a es raíz de un polinomio de grado n, entonces los números $r_0+r_1a+r_2a^2+...+r_{n-1}a^{n-1}$ con $r_0, r_1, r_2, r_3, ...,r_{n-1}$ en **Q** forman un campo.

Demostración. Sea **A** $= \{r_0+r_1a+r_2a^2+...+r_{n-1}a^{n-1} \,/\, r_0, r_1, r_2, r_3, ...,r_{n-1}$ en **Q**$\}$ La suma de elementos de **A** esta claramente en **A**. Veamos que el producto de elementos de **A** esta en **A**.

Como a es raíz de un polinomio de grado n entonces por el lema 13 todas las potencias de a son combinaciones de las potencias de a menores que n. Por lo tanto los productos de elementos de **A**, que son sumas de potencias de a, se pueden expresar como combinaciones de potencias de a menores que n, y por lo tanto están en **A**. Es claro que los inversos aditivos de elementos de **A** están en **A**.

Para ver que los inversos multiplicativos de elementos de **A** también están en **A**. Si $b= r_0+r_1a+r_2a^2+...+r_{n-1}a^{n-1}$ entonces $1, b, b^2, b^3,.., b^n$ son linealmente dependientes sobre **Q**, ya que son $n+1$ vectores en un espacio vectorial de dimensión n. Y si $s_0+s_1b+s_2b^2+...+s_nb^n=0$ con $s_0\neq 0$ entonces

$1= -s_1/s_0b-s_2/s_0b^{2-}...-s_n/s_0b^n = b\,(-s_1/s_0-s_2/s_0b -...-s_n/s_0b^{n-1})$ así que el inverso de b está en **A**. •

Ejemplo. El campo mas pequeño que contiene a $\sqrt[5]{2}$ esta formado por los números de la forma

$$a + b\sqrt[5]{2} + c\sqrt[5]{2^2} + d\sqrt[5]{2^3} + e\sqrt[5]{2^4} \quad \text{con } a,b,c,d,e \in \mathbf{Q}.$$

Teorema 15. Los números algebráicos forman un campo.

Demostración. Hay que ver que la suma y el producto de números algebráicos son números algebráicos, y que los inversos de números algebráicos distintos de 0 son números algebráicos.

1. Si a es algebráico entonces $-a$ es algebráico.

Si a es raíz del polinomio $r_nx^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \ldots + r_2x^2 + r_1x + r_0 = 0$,

entonces $-a$ es raíz del polinomio $(-1)^nr_na^n + (-1)^nr_{n-1}a^{n-1} + (-1)^nr_{n-2}a^{n-2} + \ldots + (-1)^2r_2a^2 + (-1)^1r_1a + r_0 = 0$

2. Si a es algebráico entonces $\frac{1}{a}$ es algebráico.

Si a es raíz del polinomio $r_nx^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \ldots + r_2x^2 + r_1x + r_0 = 0$,

entonces $r_na^n + r_{n-1}a^{n-1} + r_{n-2}a^{n-2} + \ldots + r_2a^2 + r_1a + r_0 = 0$

Si $a\neq 0$, podemos dividir entre a^n para obtener

$$r_n + r_{n-1}\frac{1}{a} + r_{n-2}\frac{1}{a^2} + \ldots + a_2\frac{1}{a^{n-2}} + a_1\frac{1}{a^{n-1}} + a_0\frac{1}{a^n} = 0$$

así que el numero $\frac{1}{a}$ es raíz del polinomio $r_0x^n + r_1x^{n-1} + r_2x^{n-2} + \ldots + r_{n-2}x^2 + r_{n-1}x + r_n = 0$,

que se obtiene invirtiendo el orden de los coeficientes del polinomio para a.

2. si a y b son algebráicos entonces $a+b$ y axb también son algebráicos.

Obtener polinomios con raícea $a+b$ y axb directamente a partir de polinomios con raíces a y b no es tan fácil. En lugar de hacer eso usaremos los resultados anteriores.

Supongamos que a y b son raíces de polinomios de grado m y n con coeficientes en $\mathbf{Q}$.

Por el lema 13 todas las potencias de a son combinaciones lineales de de $1, a, a^2, \ldots, a^{m-1}$, y las potencias de b son combinaciones lineales de de $1, b, b^2, b^3, \ldots, b^{n-1}$. Por lo tanto todos los productos de potencias de a y b son combinaciones lineales de los productos a^rb^s con $0\leq r<m$ y $0\leq s<n$. Esto dice que el campo generado por a y b (que contiene a $a+b$ y axb) tiene dimensión a lo mas mxn sobre $\mathbf{Q}$.

Así que $1, (a+b), (a+b)^2, (a+b)^3, \ldots, (a+b)^{mxn}$ son linealmente dependientes, lo que dice que $a+b$ es raíz de un polinomio en $\mathbf{Z}$ de grado a lo mas mxn. Y también $1, (axb), (axb)^2, (axb)^3, \ldots, (axb)^{mxn}$ son linealmente dependientes, lo que dice que axb es raíz de un polinomio en $\mathbf{Z}$ de grado a lo mas mxn. □

Ejemplos.

- $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$ es raíz del polinomio $x^2-3x-4=0$, su inverso $\frac{2}{3+\sqrt{7}}$ es raíz de $-4x^2-3x+1=0$.
- Como $1+\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{2}$ son números algebráicos, entonces $1+\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$ y $(1+\sqrt{3})\sqrt[3]{2}$ son algebráicos.

  Mas precisamente, como $1+\sqrt{3}$ es raíz de un polinomio de grado 2 y $\sqrt[3]{2}$ es raíz de un polinomio de grado 3, su suma y producto son raíces de polinomios de grado menor o igual a 6.

Si un número a es algebráico entonces sus raíces n-esimas también son números algebráicos (tarea). Esto con lo anterior implica que todos los números que pueden obtenerse a partir de los racionales con las operaciones $+, -, x, \div, \sqrt[n]{\ }$ son números algebráicos.

Pero no todos los números algebráicos son de esta forma, por ejemplo la raíz de x^5-x-2 no es así!

Lema 16. El campo de los números algebraicos es numerable.

Demostración. Los números algebráicos son las raíces de polinomios con coeficientes enteros. El conjunto de polinomios con coeficientes enteros es numerable y cada polinomio tiene una cantidad finita de raíces, así que el conjunto de los números algebráicos es la unión de una cantidad numerable de conjuntos finitos. •

Como el campo de los números reales no es numerable, el lema anterior dice que la mayoría de los números reales no son algebráicos.

Problemas.

17. Encuentra polinomios con coeficientes en **Z** que tengan estas raíces:

a. $2+\sqrt[3]{5}$ b. $\sqrt{2}\,\sqrt[3]{5}$ c. $\sqrt{1+\sqrt{2}}$

hint: ¿que operaciones (+,-,x,÷ y potencias) necesitas hacerles para volverlos racionales?

18. Encuentra un polinomio con coeficientes enteros que tenga a $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ a como raiz.

19. Si a es raíz del polinomio $x^3-2x+5=0$, ¿como se escriben a^3, a^4 y a^5 como combinaciones lineales (con coeficientes en **Q**) de 1, a y a^2 ?

20. Demuestra que si a es un número algebráico positivo entonces $\sqrt[n]{a}$ es algebráico para cada n.

21. Los siguientes números son raíces de polinomios en **Z**. ¿De que grado serán los mas chicos?
Hint: No intenten hallarlos, usen la demostración del teorema 15.

a. $\sqrt[3]{4}+\sqrt[2]{5}$

b. $\sqrt[3]{4}\,(\sqrt{5}-\sqrt{7})$

c. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}}$

22. Demostrar que todos los números reales que pueden obtenerse a partir de números racionales sumando, multiplicando, dividiendo y sacando raíces n-esimas son números algebráicos.
Hint: ver la demostración del teorema 15

Problemas de repaso

23. Si r y s son dos números reales tales que r+s es racional y r-s es irracional ¿que puede decirse sobre r y s?

24. Si r y s son números reales cuyas expansiones decimales terminan en colas periódicas, las expansiones de r·s y r/s terminan en colas periódicas.
¿se puede saber la cola de r·s conociendo solamente las colas de r y s? ¿y la cola r/s ?

25. Demuestra que si a es un número algebráico positivo entonces $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{1+\sqrt[2]{a}}$ es algebráico.

26. ¿Cuantos números reales son raíces de polinomios con coeficientes algebráicos?