GEOMETRIA
Diplomado de matemáticas

MAX NEUMANN COTO
Instituto de Matemáticas UNAM Cuernavaca

Clase 1

Introducción: Los inicios de la geometría

ORÍGENES

- La geometría tuvo su origen en Mesopotamia y Egipto, como una serie de conocimientos empíricos acerca de longitudes, ángulos, áreas y volúmenes que se usaron para la agrimesura, la construcción y la astronomía.
- Los egipcios podían calcular el área de terrenos rectangulares y triangulares y tenían una fórmula aproximada para el área de un campo circular (64/81 veces el área de un campo cuadrado que encierra al círculo). Sabían como calcular el volumen de graneros de rectangulares y aproximar el volumen de graneros cilíndricos. Hallaron maneras de calcular la inclinación de una pirámide y su volumen (a partir de la altura y el lado).

GRECIA

- Desde el siglo VII AC los griegos se dieron a la tarea de entender el mundo a partir de la razón. De ahí nacieron la filosofía, la física, la geometría y las matemáticas como ciencias. La palabra *geometría* viene del griego antiguo γεωμετρία; *geo* "tierra", *metria* "medición".

- En el siglo VII AC Tales de Mileto podía calcular la altura de las pirámides y la distancia de un barco a la costa.

- En el siglo V AC Pitágoras y sus discípulos dieron quizás la primera demostración del Teorema de ese nombre y descubrieron que existen cantidades *inconmensurables* (irracionales).

GRECIA

- Platón, el mas conocido filósofo griego, tenía escrito en la entrada de su escuela: “Que ningún ignorante de la geometría entre aquí”. Estableció a la geometría como una disciplina intelectual, separada de cualquier aplicación. Le gustaban las construcciones geométricas (usando solo una regla y un compás).

- En el siglo IV AC Eudoxo desarrolló el método de exhausión, que permitió el cálculo de áreas y volúmenes de algunas figuras curvilíneas.

EUCLIDES

- En el siglo III AC, Euclides de Alejandría y sus discípulos escribieron Los Elementos, una colección de 13 libros en los que se organizaban y expandían los conocimientos matemáticos de entonces alrededor de la geometría, dándoles una estructura lógica.
- Su idea era partir de muy pocas suposiciones intuitivas (axiomas) y usar la lógica para deducir todo lo demás (teoremas). No les bastaba que algo pareciera ser cierto, querían estar seguros y saber por que lo era. Esta es la base de todas las matemáticas modernas.
- Los Elementos son una colección de definiciones, postulados, teoremas, construcciones y demostraciones.

LOS ELEMENTOS

L1 Los fundamentos de la Geometría, teoría de los triángulos, paralelas y el área.

L2 Álgebra geométrica.

L3 Teoría de la circunferencia.

L4 Figuras inscritas y circunscritas.

L5 Teoría de las proporciones abstractas

L6 Figuras geométricas semejantes y proporcionales.

L7 Fundamentos de la teoría de los números

L8 Proporciones en los números, sucesiones geométricas.

L9 Infinidad de los números primos, suma de una serie geométrica.

L10 Cantidades inconmensurables (números irracionales).

L11 Geometría de los sólidos

L12 Medición de figuras. Volumen de pirámides, conos y cilindros.

L13 Los sólidos regulares.

DEFINICIONES:

Un ***punto*** es lo que no tiene partes.

Una ***línea*** es una longitud sin anchura.

Una ***línea recta*** es una línea que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.

Una ***superficie*** es lo que sólo tiene longitud y anchura.

Una ***superficie plana*** es una superficie que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.

DEFINICIONES:

Cuando una línea recta corta a otra de modo que los ángulos adyacentes son iguales, los ángulos se llaman ***rectos*** y las líneas se llaman ***perpendiculares***.

Una ***frontera*** es el extremo de algo.

Una ***figura*** es lo que está contenido por una o varias fronteras.

Rectas paralelas son aquellas que, estando en un mismo plano, no se cruzan por más que se prolonguen en ambas direcciones.

NOCIONES COMUNES:

- Dos cosas que son iguales a una tercera son iguales entre si.
- Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, los resultados son iguales.
- Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.
- El total es mayor que una parte.

POSTULADOS (AXIOMAS):

1. Por dos puntos distintos pasa una línea recta.

2. Las líneas rectas pueden extenderse indefinidamente.

3. Se puede dibujar un círculo con cualquier centro y de cualquier radio.

4. Todos los ángulos rectos son iguales.

5. Si una línea recta cruza a dos líneas rectas de modo que los ángulos internos de un mismo lado suman menos que dos ángulos rectos, entonces las dos líneas rectas, al extenderlas lo suficiente, se cruzarán de ese mismo lado.

Los axiomas dicen que cosas se asumen como válidas o ciertas.

De lo que se trata es de ver que otras cosas pueden hacerse y demostrarse a partir de ellos, usando únicamente argumentos lógicos.

TEOREMA

Del griego θεώρημα: una proposición que debe ser demostrada.

DEMOSTRACION

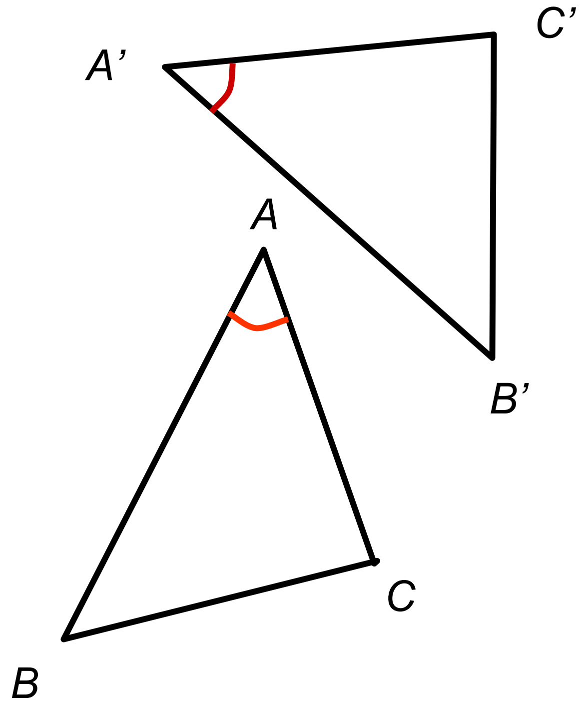
Argumento lógico basado en los axiomas que muestra de manera irrefutable que un teorema es cierto.

ALGUNOS TEOREMAS

DEL LIBRO 1 DE LOS ELEMENTOS

Proposición 1:4. *Si dos triángulos tienen dos lados correspondientes iguales y los ángulos entre ellos iguales entonces los otros lados y los otros ángulos también son iguales.*

Demostración. *Sean ABC y A'B'C' dos triángulos con AB=A'B', AC=A'C' y los ángulos BAC y B'A'C' iguales. Podemos desplazar al triángulo A'B'C' de modo que A' coincida con A y que el ángulo BAC coincida con el ángulo B'A'C', de modo que la línea AB coincida con la línea A'B' y la línea AC coincida con la línea A'C. Como AB=A'B' entonces B' coincidirá con B y como BC=B'C' entonces C' coincidirá con C. Como B coincide con B' y C coincide con C' entonces por el postulado 1 la línea BC debe coincidir con la línea B'C', así que los dos triángulos coinciden y por lo tanto sus lados y ángulos correspondientes son iguales.*

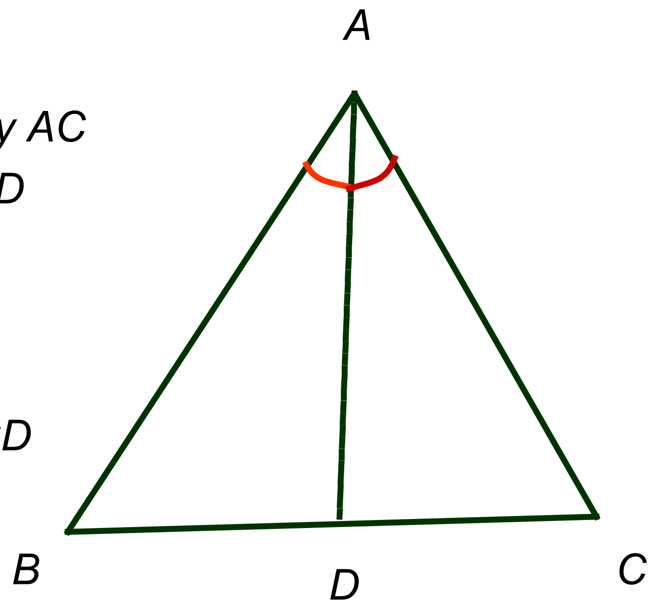


ALGUNOS TEOREMAS
DEL LIBRO 1 DE LOS ELEMENTOS

Proposición 1:5. (Pons asinorum) *Si en un triángulo dos lados son iguales, los ángulos opuestos a los lados también son iguales*

Demostración.

Supongamos que el triángulo ABC tiene lados AB y AC iguales. Dibujar la bisectriz del ángulo BAC, y sea D el punto donde la bisectriz corta al lado BC.
Entonces los triángulos ABD y ACD tienen 2 lados Iguales y los ángulos entre ellos iguales.
Así que por la proposición 4 los ángulos ABD y ACD son iguales.



ALGUNOS TEOREMAS

DEL LIBRO 1 DE LOS ELEMENTOS

Proposición 1:6. *Si en un triángulo dos ángulos son iguales, entonces los lados opuestos a esos ángulos también son iguales.*

Demostración. ***TAREA***

TAREA 1

1. *¿Cuál es el volumen de una pirámide con base cuadrada de 100m de lado por 100m de alto? (sin usar fórmulas ni integrales)*

2. *¿Sería cierta la proposición 4 si los ángulos que se saben iguales no son los que están entre los lados iguales?*

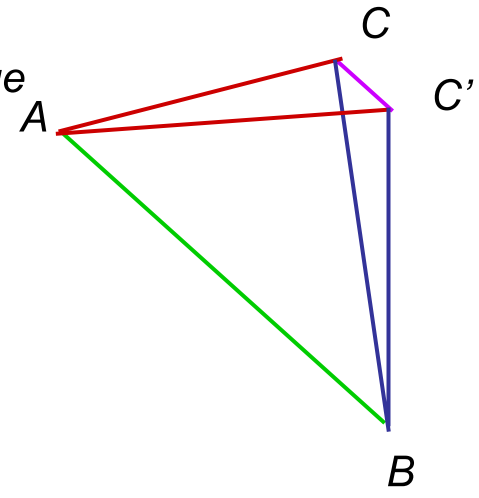
3. *Demostrar la proposición 6.*

Clase 2

Algunos teoremas y construcciones geométricas

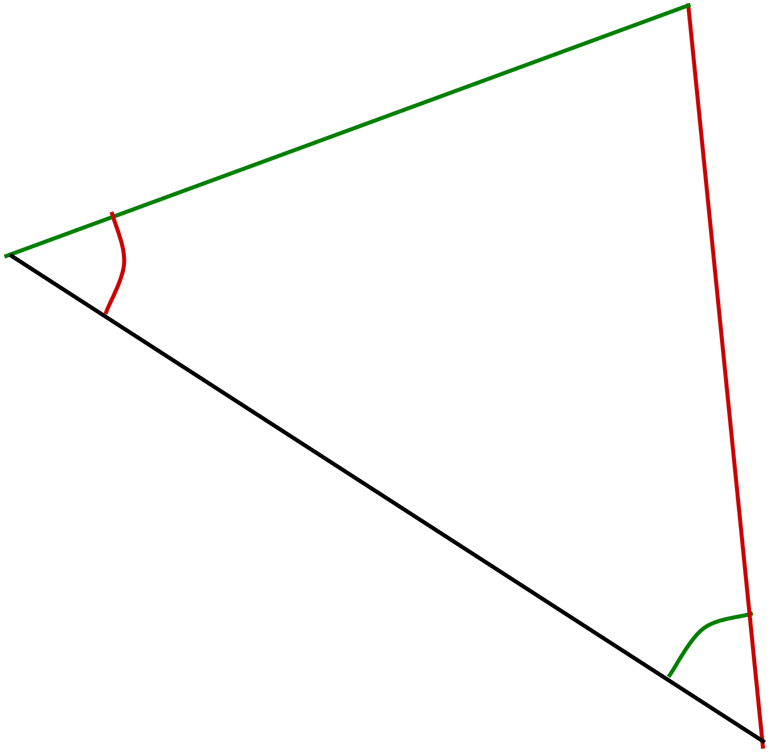
ALGUNOS TEOREMAS
DEL LIBRO 1 DE LOS ELEMENTOS

Proposición 1:8. *Si dos triángulos tienen los 3 lados respectivos iguales, también tendrán iguales los ángulos comprendidos por los segmentos iguales.*



Demostración. *Si ABC y A'B'C' son dos triángulos con lados respectivos iguales, podemos desplazarlos para que A' coincida con A, B' coincida con B y además C' y C queden del mismo lado del segmento AB.*
Supongamos que C' no coincide con C.
Como AC=A´C' entonces por (P5) **<***AC'C =* **<***ACC'*
así que ***<AC'C es mayor que <BCC'.***
Y como BC=BC' entonces por (P5) **<***BC'C =* **<***BCC'*
así que ***<BCC' es mayor que <AC'C****.*
Esto es imposible porque las dos desigualdades se contradicen.
Así que C' debe coincidir con C y los dos triángulos deben coincidir.

Proposición 1:18. *En cualquier triángulo, el ángulo más grande es opuesto al lado mas grande.*



Proposición 1:18. *En cualquier triángulo, el ángulo más grande es opuesto al lado mas grande.*

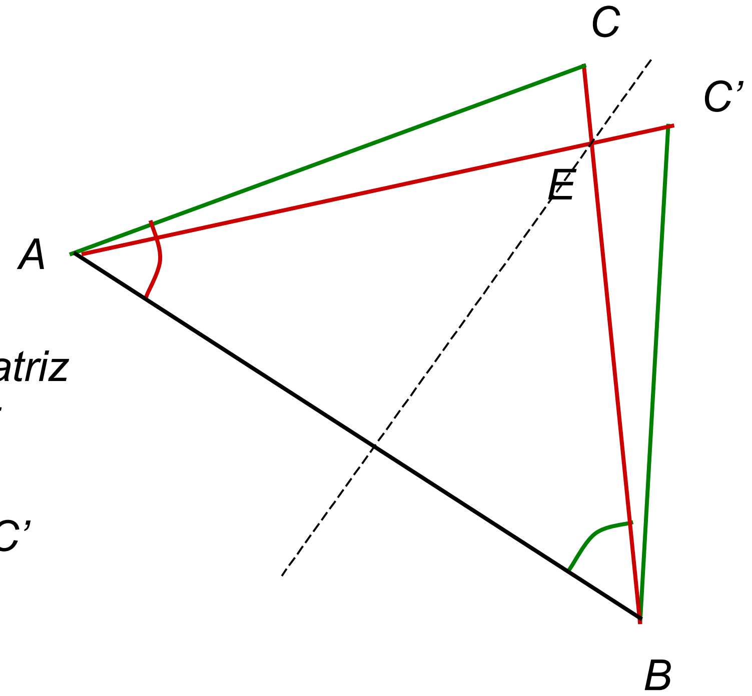
Demostración.

Supongamos que en el triángulo ABC, <ABC < <ACB.

Reflejemos el triángulo en la mediatriz de AB y sea D' la imagen de C y E la intersección de AC con BC'.

Entonces los triángulos AEC y BEC' son congruentes y por lo tanto

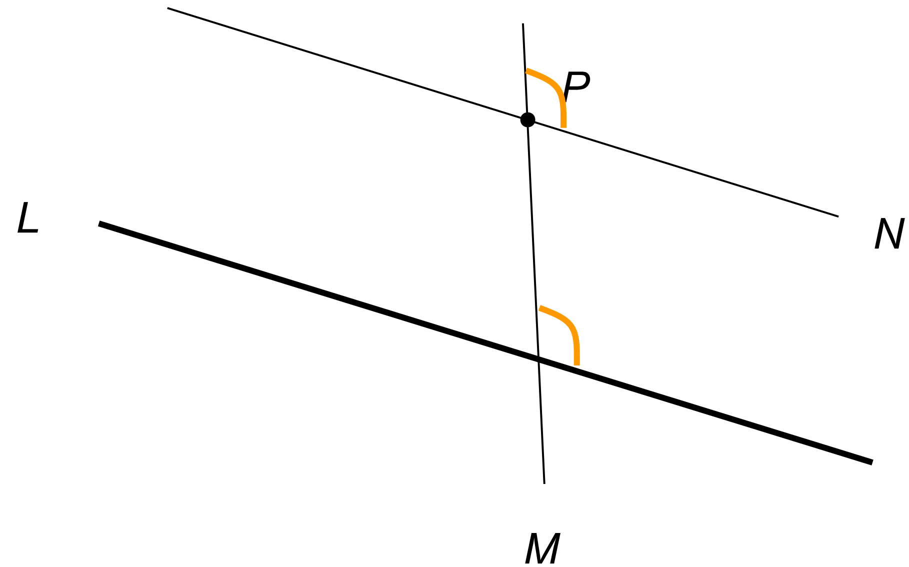
AC' = AE+ EC' = AE+EC > AC



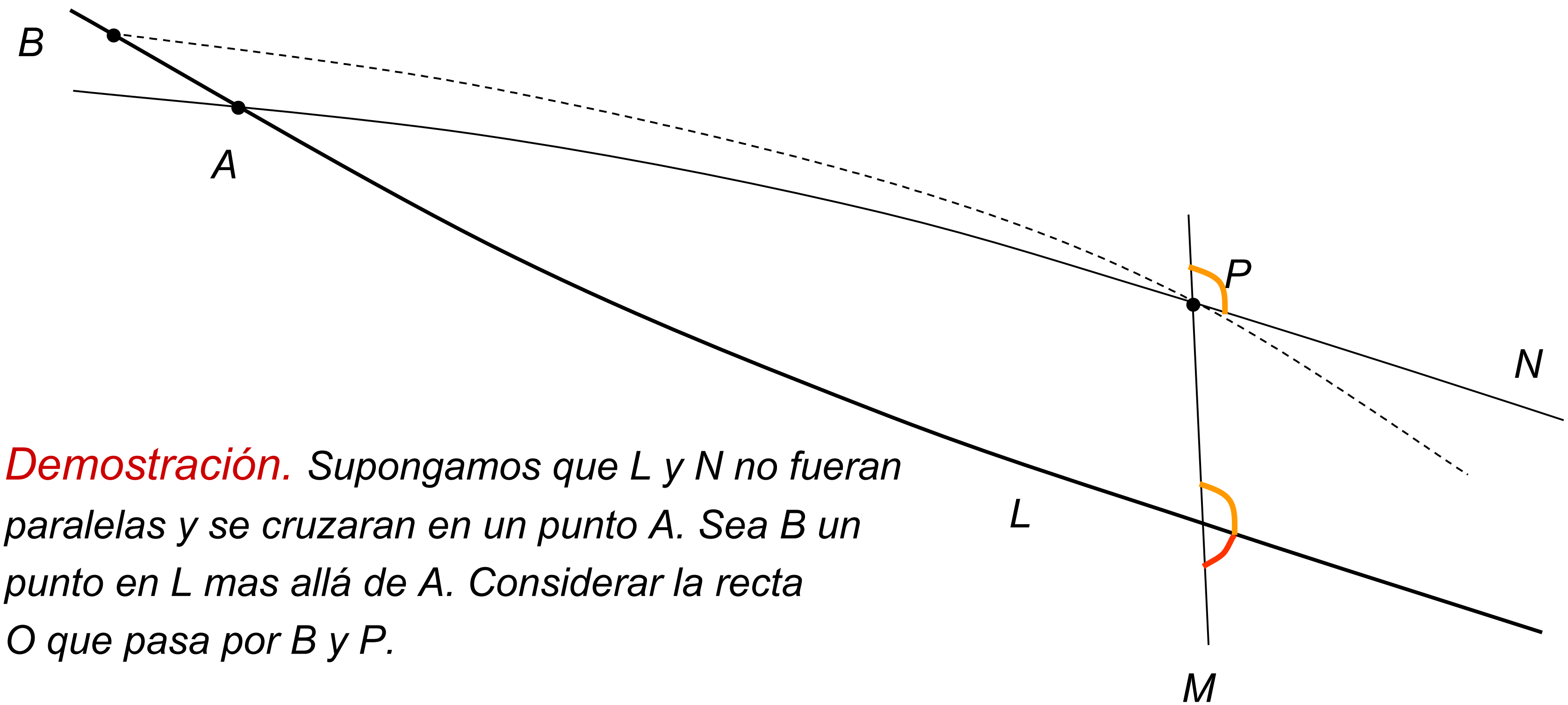
Proposición 1:31. *Construir una recta paralela a una recta dada por un punto dado.*

Construcción. Dada una recta L y un punto C, trazar una recta M que pase por P y cruce a L. Trazar por P una recta N que cruce a M formando un ángulo igual al que L forma con M.

Afirmación: *N es paralela a L*

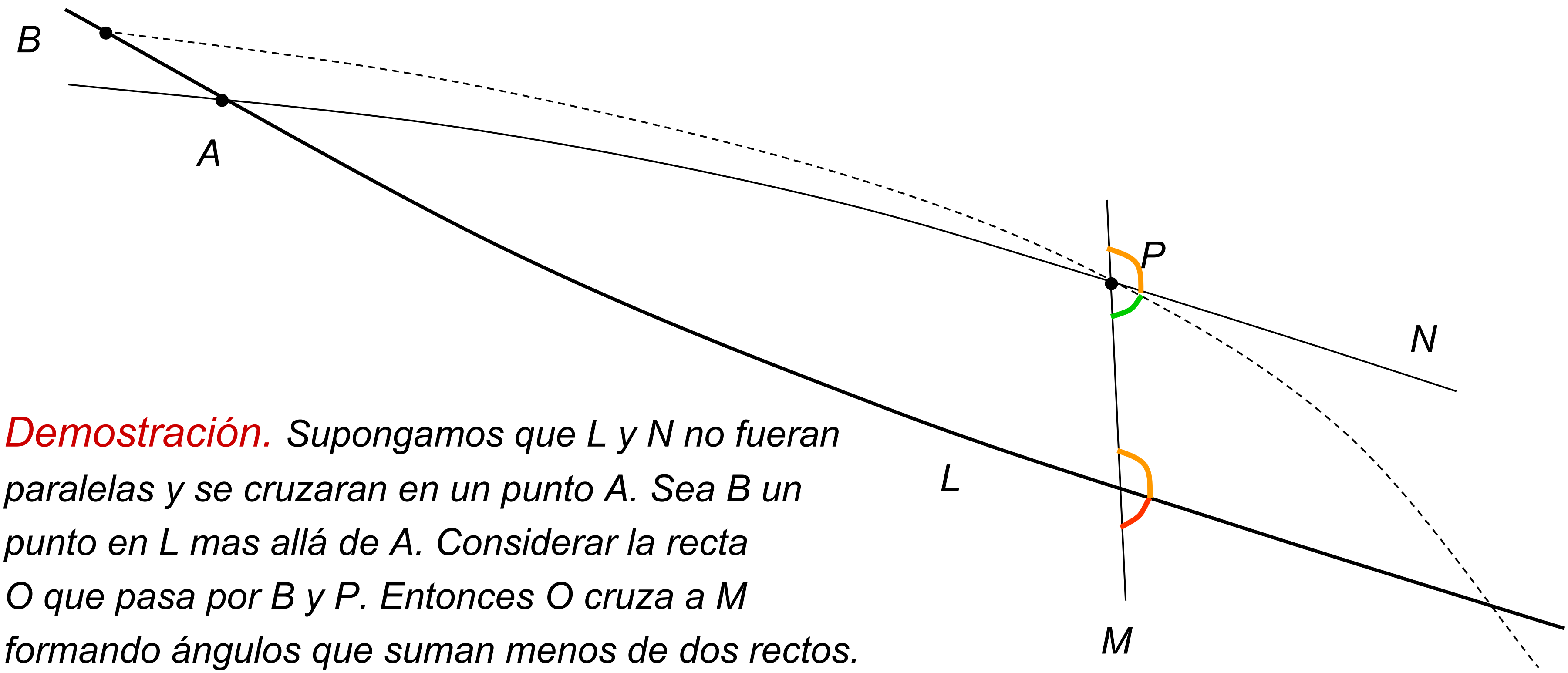


Proposición 1:31. *Construir una recta paralela a una recta dada por un punto dado.*



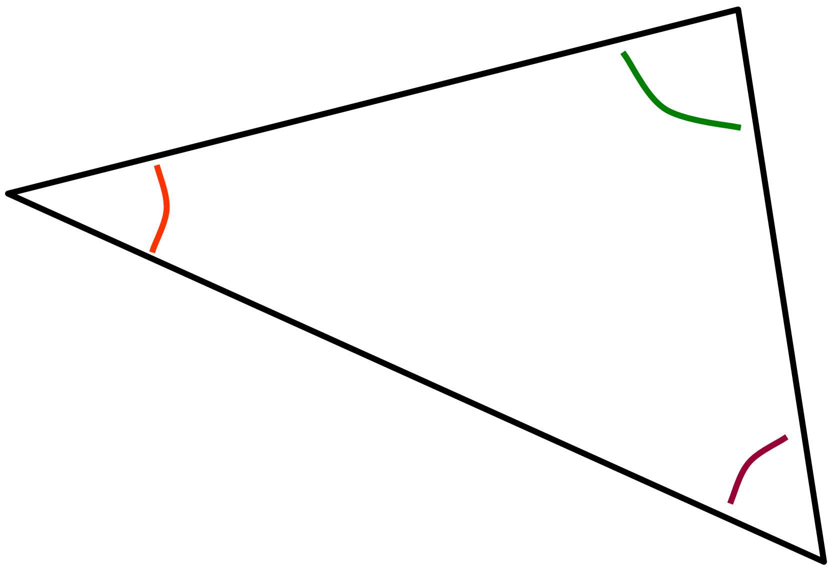
Demostración. Supongamos que L y N no fueran paralelas y se cruzaran en un punto A. Sea B un punto en L mas allá de A. Considerar la recta O que pasa por B y P.

Proposición 1:31. *Construir una recta paralela a una recta dada por un punto dado.*



Demostración. Supongamos que L y N no fueran paralelas y se cruzaran en un punto A. Sea B un punto en L mas allá de A. Considerar la recta O que pasa por B y P. Entonces O cruza a M formando ángulos que suman menos de dos rectos. Entonces por (P5) .la recta O debe cruzar a la recta L del otro lado de M, así que L y O se cruzarían en dos puntos, lo que contradice a (P1)

Proposición 1:32. *En cualquier triángulo, la suma de los tres ángulos interiores es igual a dos ángulos rectos.*

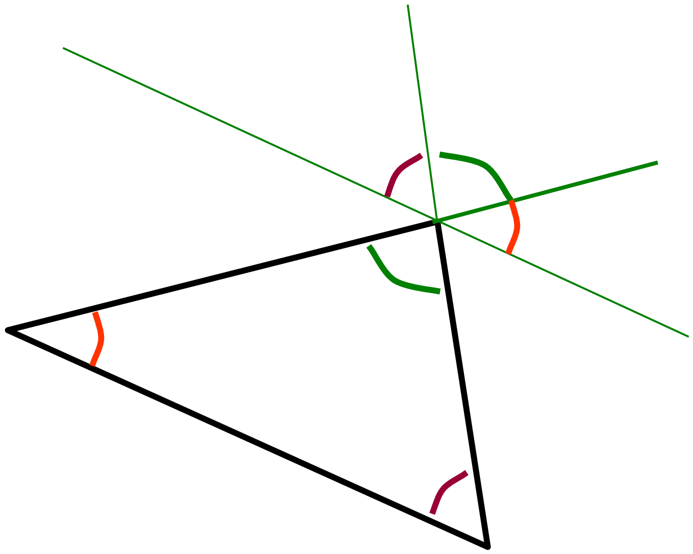


¿Será cierto esto en el espacio donde vivimos?

Proposición 1:32. *En cualquier triángulo, la suma de los tres ángulos interiores es igual a dos ángulos rectos.*

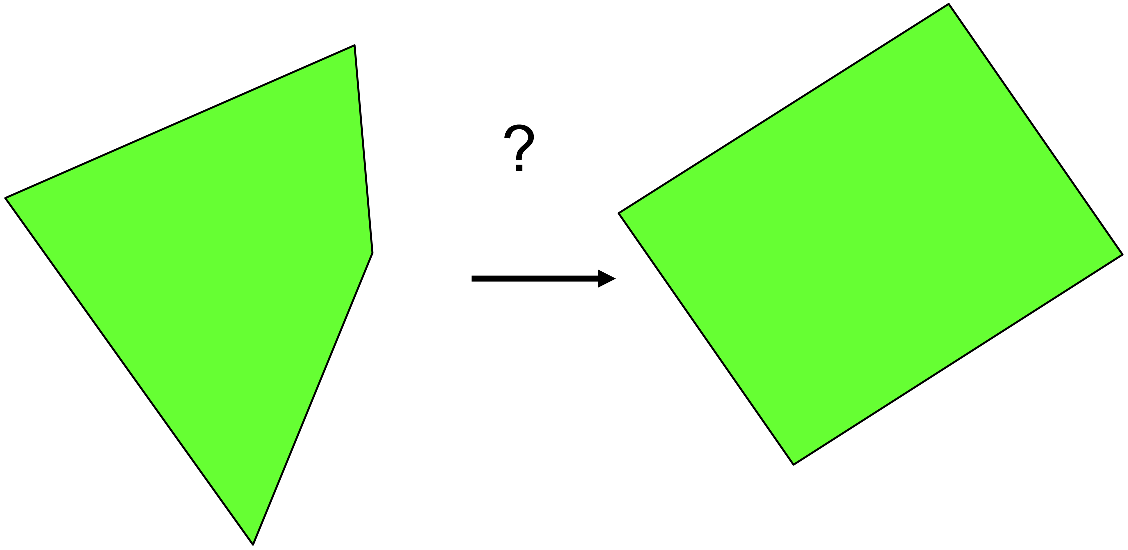
Demostración.

Dado el triángulo ABC, construir una paralela al lado BC que pase por el punto A. Como los ángulos que forma una recta con dos rectas paralelas son iguales y como los ángulos opuestos por el vértice son iguales, los ángulos Internos del triángulo suman lo mismo que los ángulos de un lado de una recta.



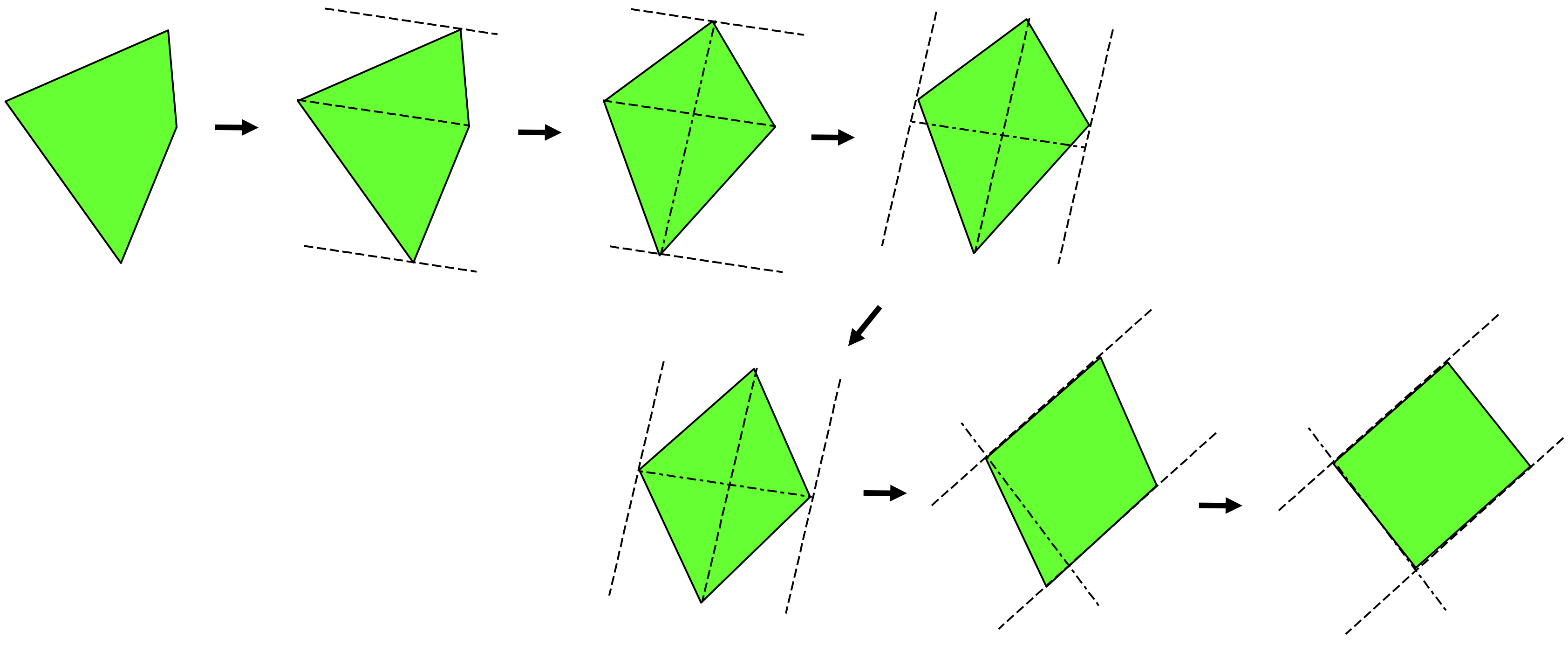
Tarea ¿Cuánto suman los ángulos internos de un polígono de n lados?

Proposición 1:45. *Construir un rectángulo de área igual a un cuadrilátero dado.*



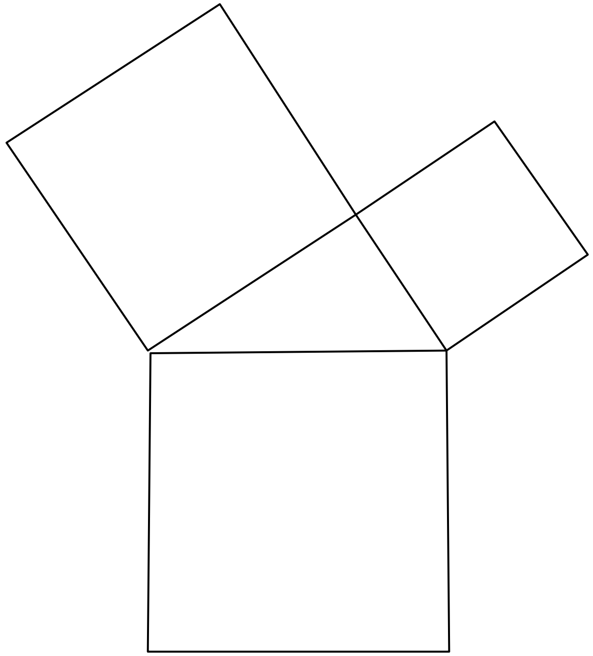
Proposición 1:45. *Construir un rectángulo de área igual a un cuadrilátero dado.*

Construcción:



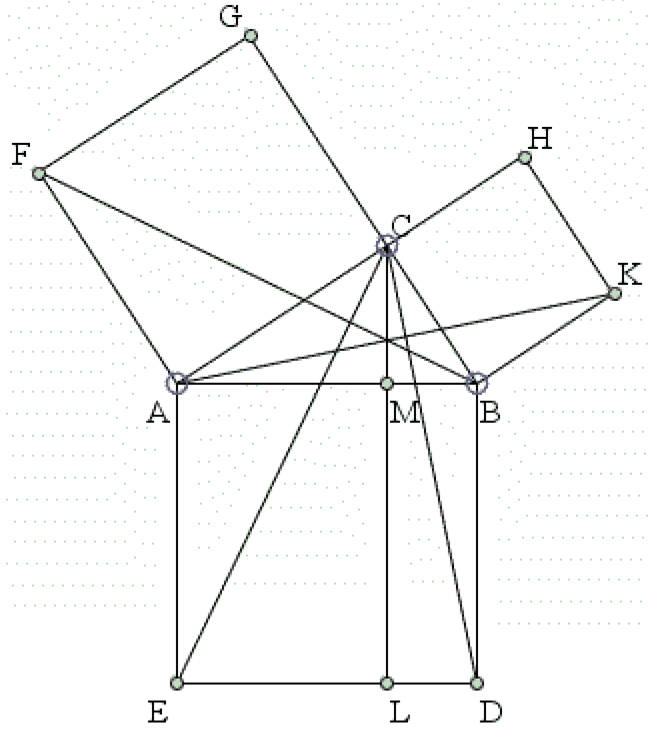
Tarea: ¿Puedes construir un cuadrado con la misma área?

Proposición 1:47 (Teorema de Pitágoras). *En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.*



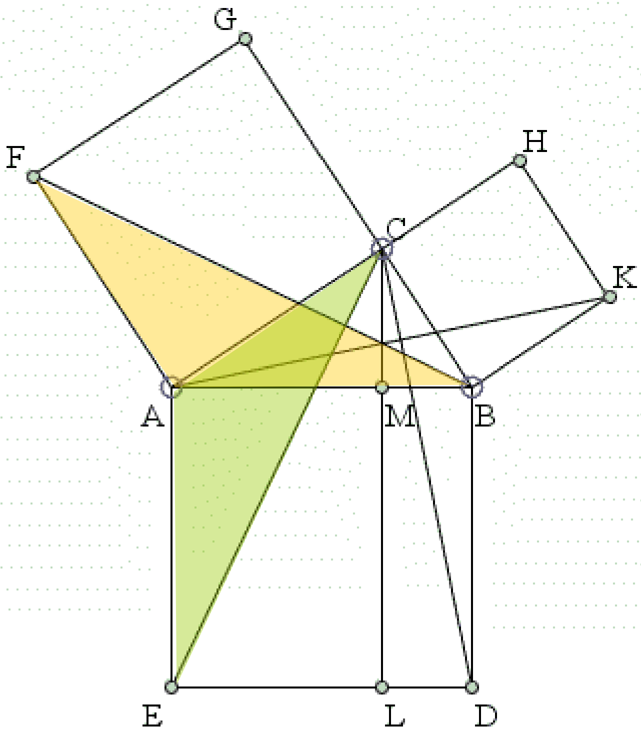
Proposición 1:47 (Teorema de Pitágoras). *En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.*

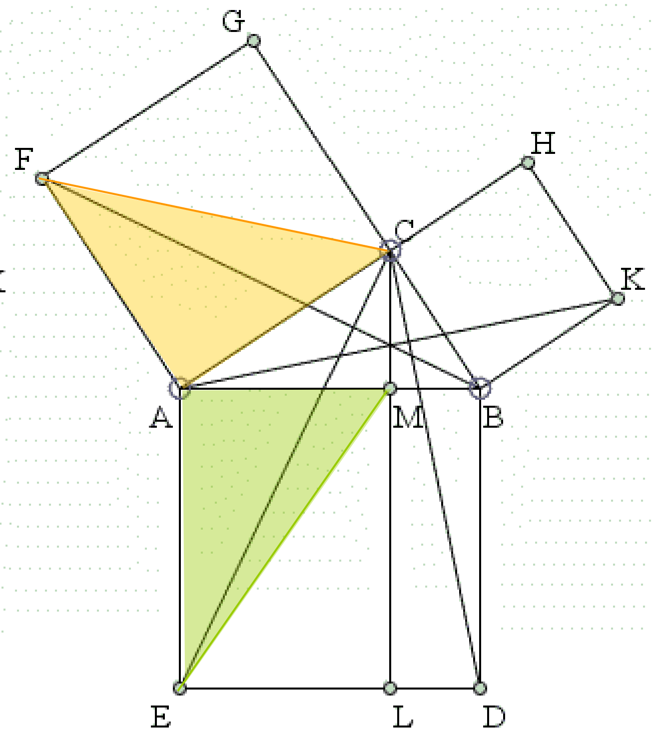
Demostración.



Proposición 1:47 (Teorema de Pitágoras). *En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.*

Demostración.

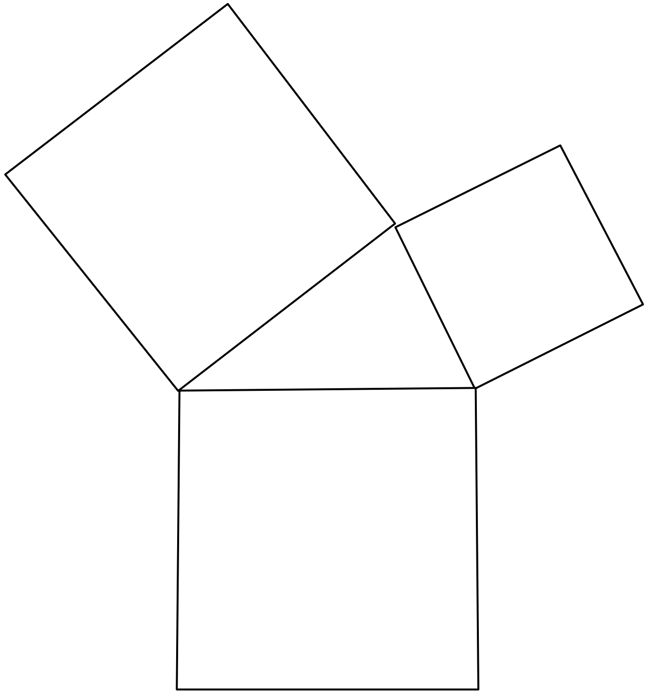




Proposición 1:47 (Teorema de Pitágoras). *En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.*

Pregunta:

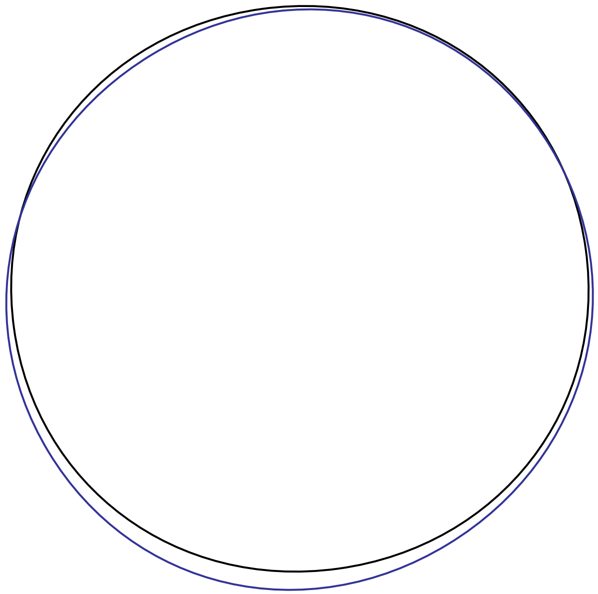
¿Y si los triángulos no son rectángulos?



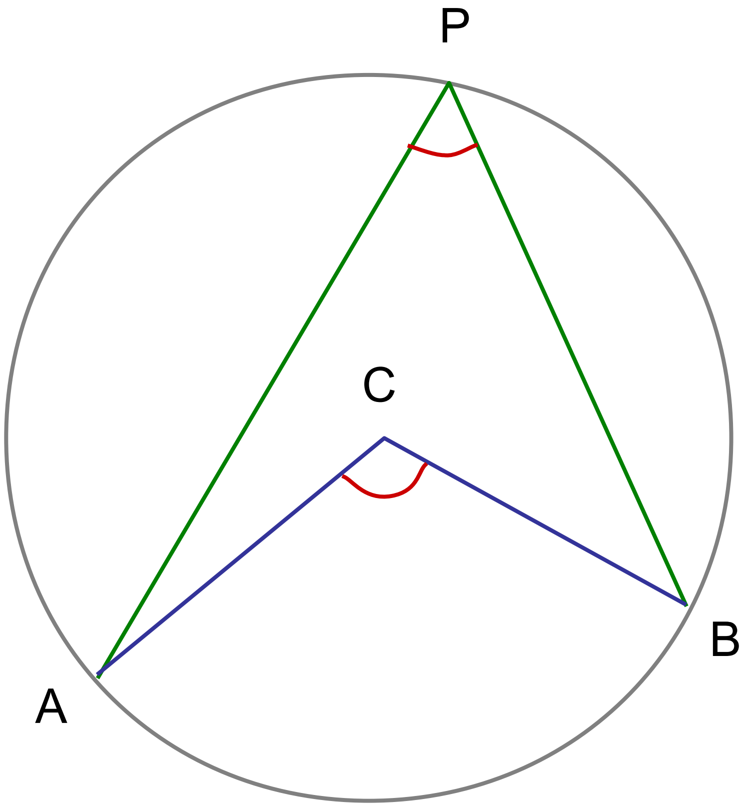
ALGUNOS TEOREMAS

DEL LIBRO 3 DE LOS ELEMENTOS

Proposición 3:10 *Un círculo no corta a otro círculo en más de dos puntos.*



Proposición 3:20 *En un círculo, el ángulo central es el doble del ángulo inscrito.*



Proposición 3:20 *En un círculo, el ángulo central es el doble del ángulo inscrito.*

Demostración.

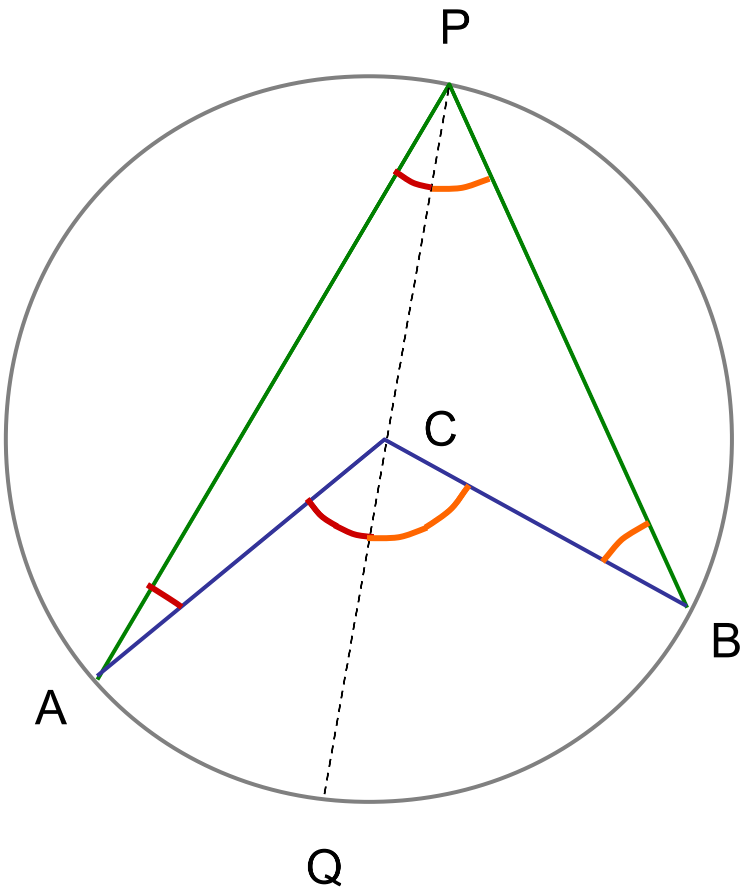
Como ACP es isósceles, <CAP = <APC

Como la suma de los ángulos internos es igual a 180°, <ACP = 180° - 2 <CAP

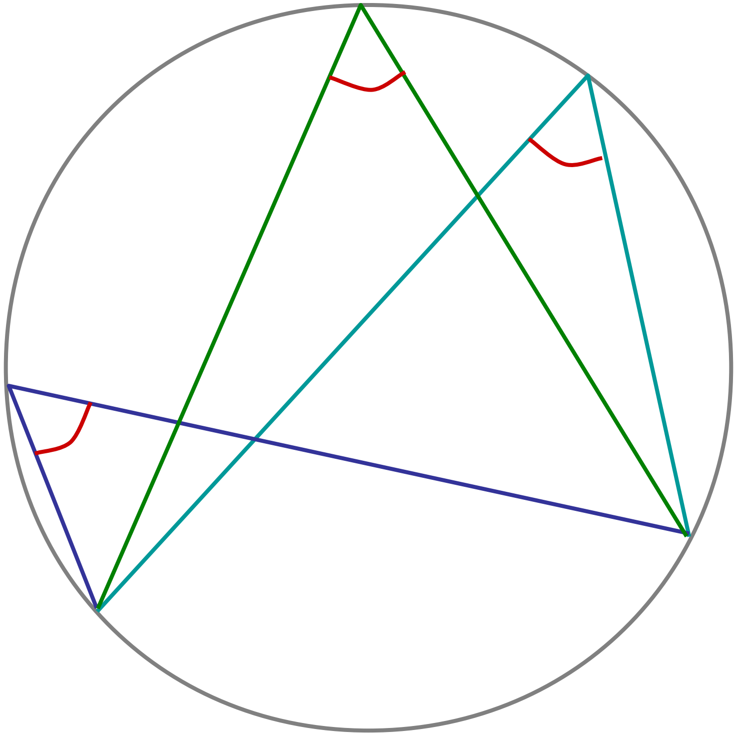
Como <ACP+ <ACQ = 180° entonces <ACQ = 2 <CAP.

De manera análoga <BCQ = 2 <CBP.

Sumando los ángulos se obtiene <ACB = 2 <APB



Proposición 3:21 *En un círculo, los ángulos inscritos que ven el mismo arco son iguales entre sí.*

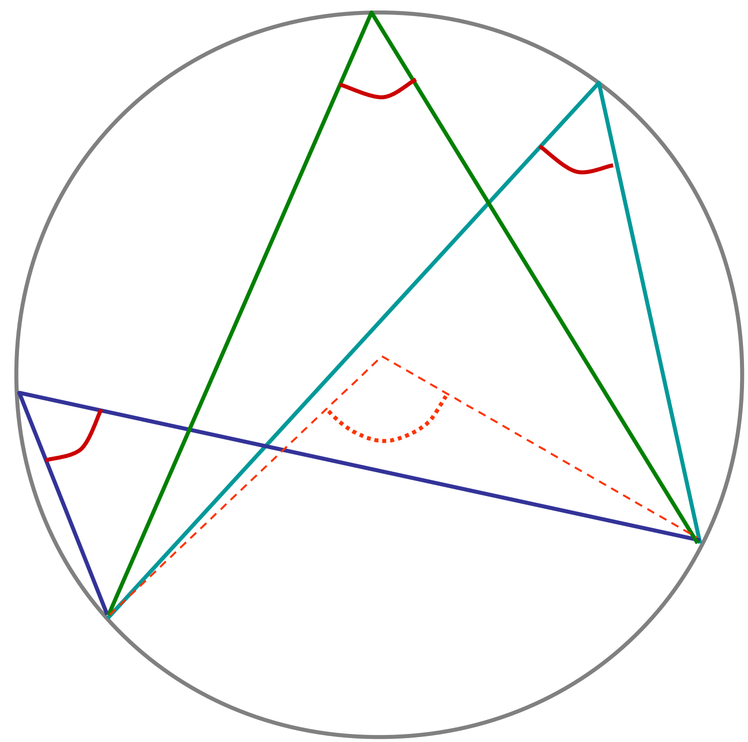


Proposición 3:21 *En un círculo, los ángulos inscritos que ven el mismo arco son iguales entre sí.*

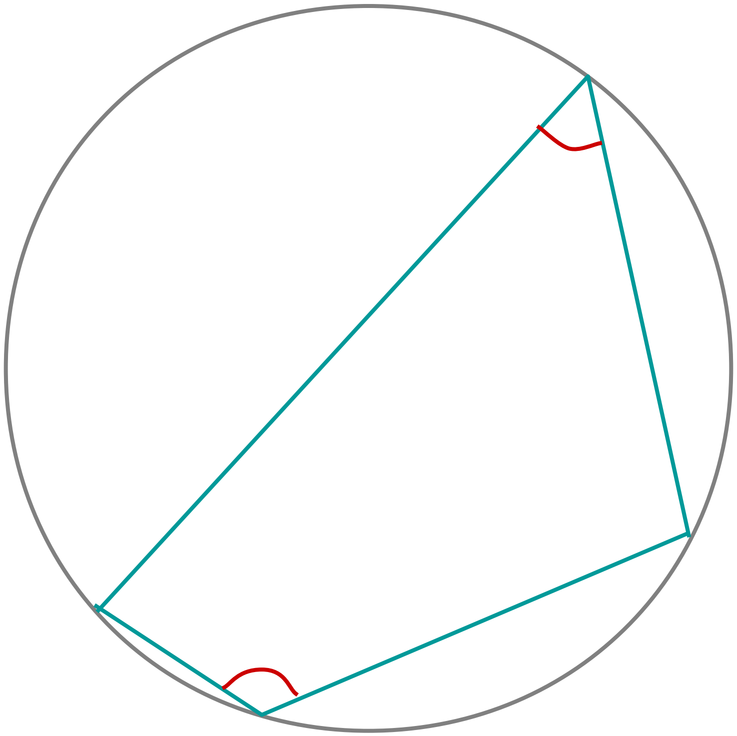
Demostración.

Por (P20) los ángulos inscritos son la mitad de los ángulos centrales correspondientes.

Como los ángulos centrales Correspondientes a todos estos ángulos son iguales.los ángulos inscritos deben ser iguales.



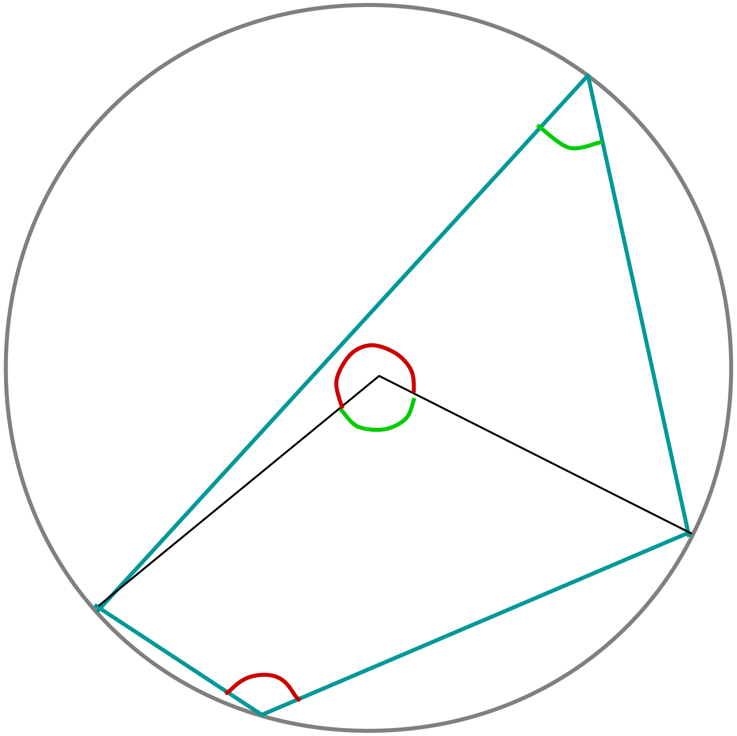
Proposición 3:22 *En un cuadrilátero inscrito en un círculo, los ángulos opuestos suman dos ángulos rectos.*



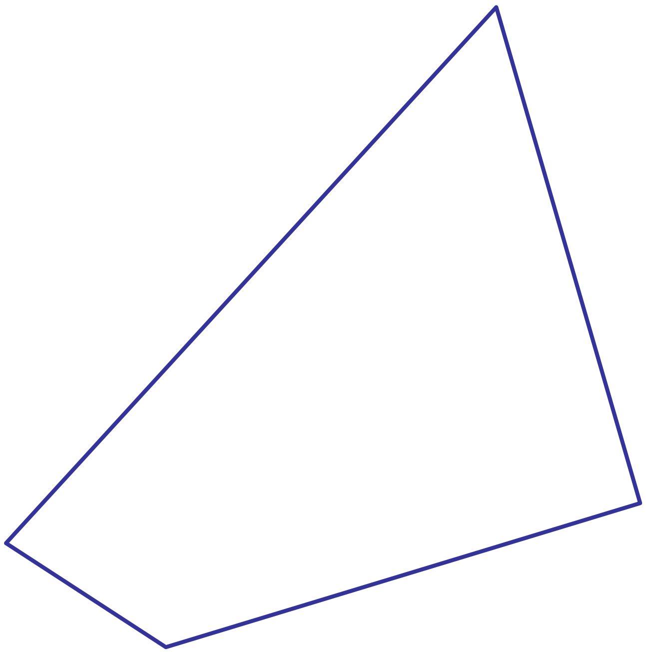
Proposición 3:22 *En un cuadrilátero inscrito en un círculo, los ángulos opuestos suman dos ángulos rectos.*

Demostración.

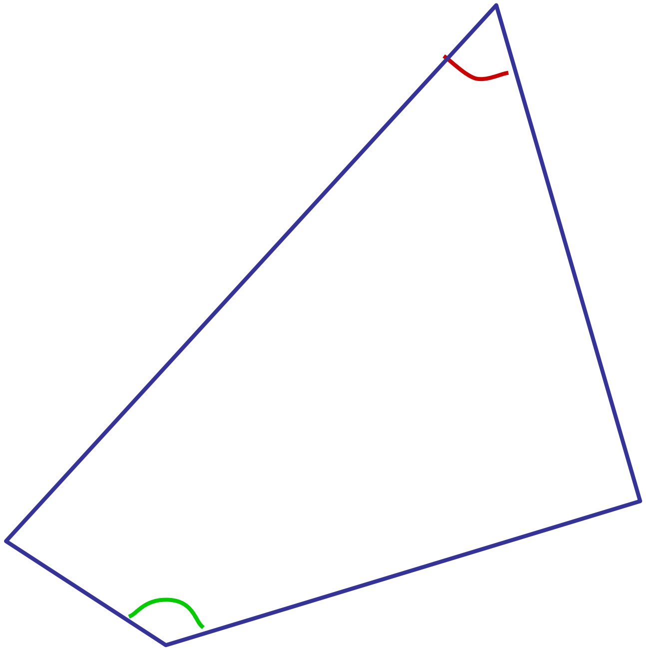
Por (P20) los ángulos inscritos son la mitad de los ángulos centrales correspondientes.
Como los ángulos centrales Correspondientes a todos estos ángulos son iguales.los ángulos inscritos deben ser iguales.



Pregunta: *¿Cómo podemos saber un cuadrilátero es cíclico (si puede ser inscrito en un círculo)?*

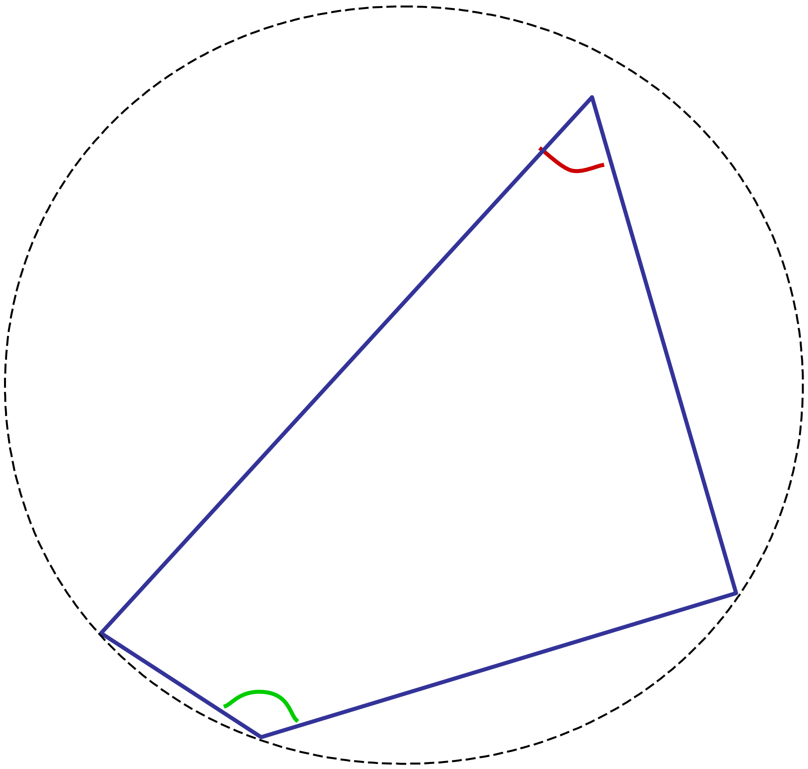


Pregunta: *¿Cómo podemos saber un cuadrilátero es cíclico (si puede ser inscrito en un círculo)?*



Sabemos que en un cuadrilátero cíclico los ángulos opuestos deben sumar 2 ángulos rectos.

Pregunta: *¿Cómo podemos saber un cuadrilátero es cíclico (si puede ser inscrito en un círculo)?*

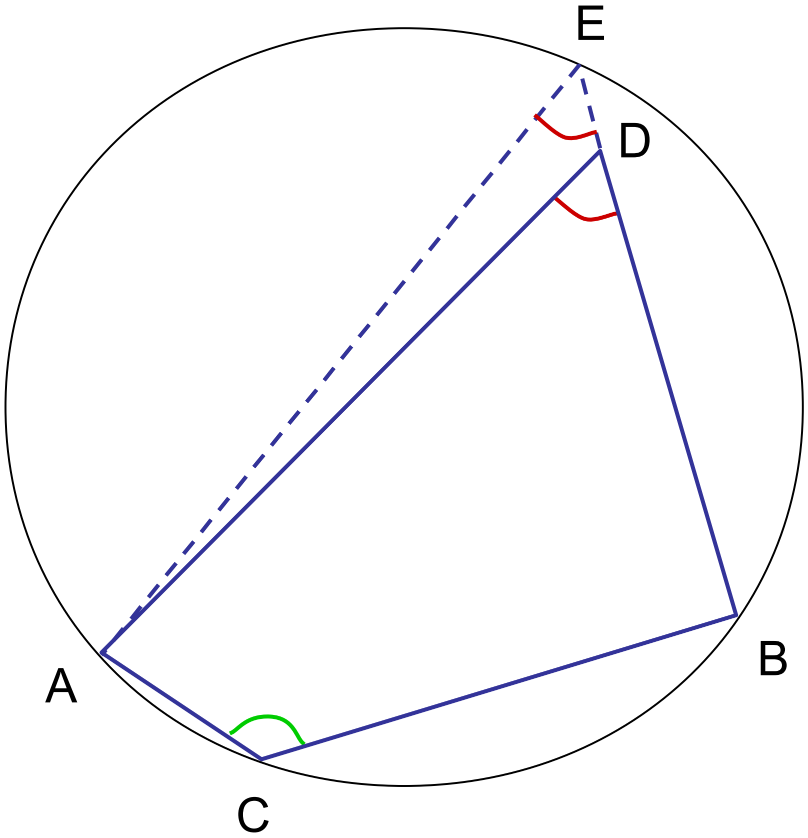


¿Será cierto que si los ángulos opuestos de un cuadrilátero suman 2 ángulos rectos entonces el cuadrilátero es cíclico?

Teorema *Un cuadrilátero es cíclico si y solamente si sus ángulos opuestos suman 2 ángulos rectos.*

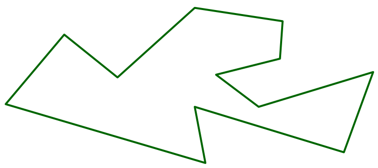
Demostración.

Supongamos que ABCD es un cuadrilátero con <ABC + <CDA= 2rectos
Supongamos que el círculo por A,B y C no pasa por D, digamos que D está en el interior . Prolonguemos el lado CD hasta que corte al círculo en el punto E.
Ahora el cuadrilátero ABCE es cíclico, por lo tanto <ABC + <CED = 2rectos.
Además <CDA es menor que <CEA.
Entonces <ABC + <CDA < 2rectos, contradiciendo la hipótesis original.



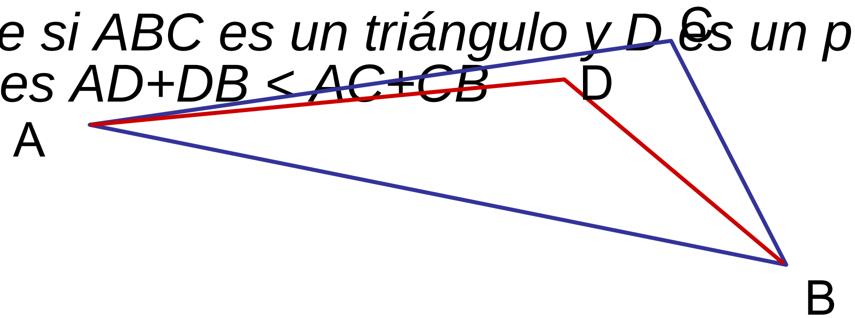
TAREA 2

1. *¿Cuánto suman los ángulos internos de un polígono de n lados? (demuéstralo)*



2. *Construye un cuadrado que tenga la misma área que un rectángulo dado.*

3. *Demuestra que si ABC es un triángulo y D es un punto en su interior entonces AD+DB < AC+CB*



4. *Muestra que si los lados un triángulo satisfacen* $A^2 + B^2 = C^2$ *entonces el triángulo es rectángulo.*

Clase 3

Proporciones y semejanza

Aritmética y geometría

PROPORCIONES Y SEMEJANZA

El libro 6 de los Elementos trata sobre proporciones y semejanza, y muestra cómo hacer operaciones aritméticas usando geometría.

Se dice que dos cantidades A y B guardan la misma proporción que dos cantidades C y D, si siempre que A sea igual (mayor o menor) que un múltiplo entero de B entonces C es igual (mayor o menor) que ese múltiplo entero de D.

En lenguaje moderno: A y B guardan la misma proporción que C y D si A/B = C/D. El problema es que en la aritmética de entonces sólo se podían hacer cocientes de fracciones, pero los griegos ya habían descubierto que no todas las magnitudes se pueden expresar como fracciones.

Magnitudes conmensurables e inconmensurables

Se dice que dos cantidades A y B son conmensurables si existe otra cantidad C tal que A y B son múltiplos enteros de C. De otro modo A y B se dicen inconmensurables.

Todas las fracciones de una misma cantidad son conmensurables., sin embargo los griegos pudieron demostrar que existen cantidades inconmensurables.

Afirmación. *La diagonal de un cuadrado es inconmensurable con el lado del cuadrado.*

Demostración. *Supongamos que el lado y la diagonal de un cuadrado son conmensurables, es decir, que existe una longitud L tal que la longitud del lado es mL y la longitud de la diagonal es nL, para algunos números enteros m y n. Podemos suponer que los números m y n no son ambos pares (de otro modo, ambos lados serían múltiplos de 2L y podríamos tomar esta longitud en lugar de L).*

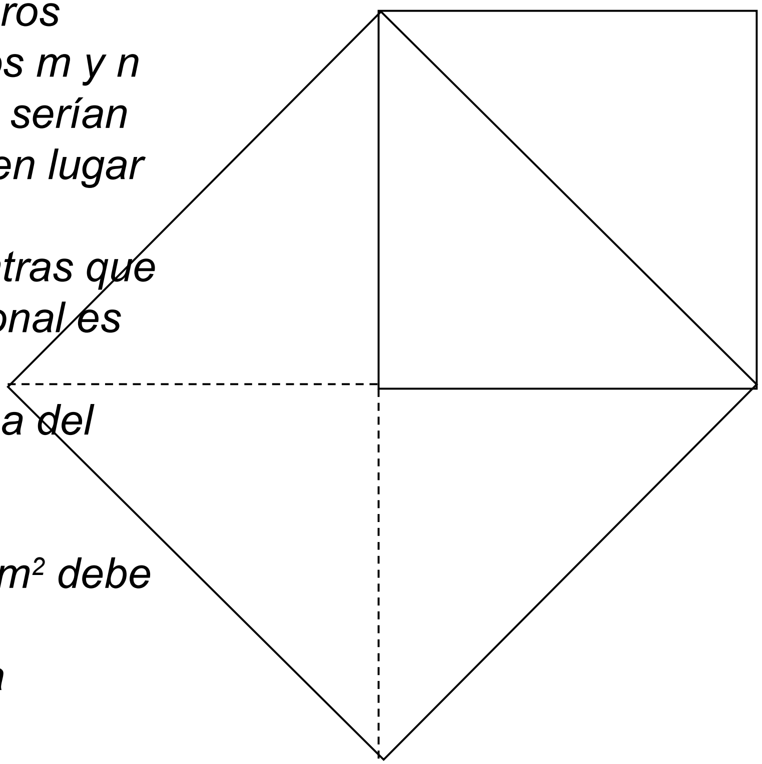
Ahora las área del cuadrado es igual a m^2L^2 mientras que el área del cuadrado que tiene por lado a la diagonal es n^2L^2 .

Como el segundo cuadrado tiene el doble del área del primero, tenemos que $2m^2 = n^2$.

Así que n^2 es par y por lo tanto n debe ser par.

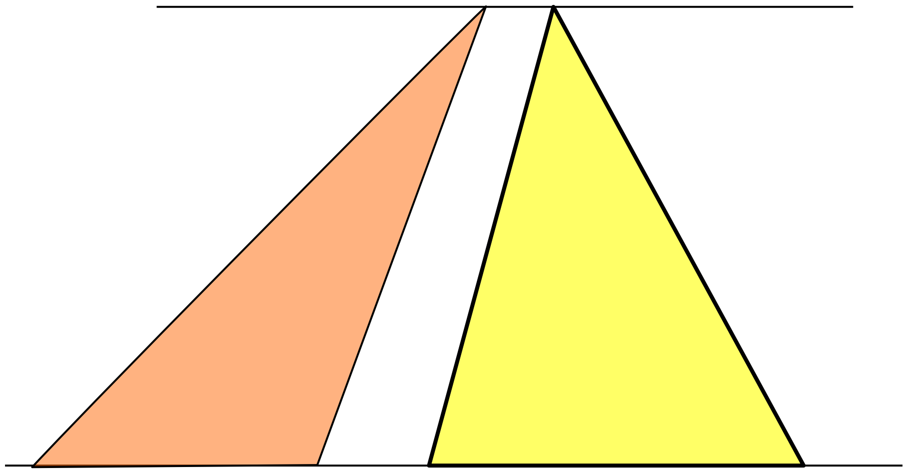
De modo que n^2 es múltiplo de 4. Pero entonces m^2 debe ser par y por lo tanto m debe ser par.

Pero entonces m y n son pares, contradiciendo la elección hecha anteriormente.

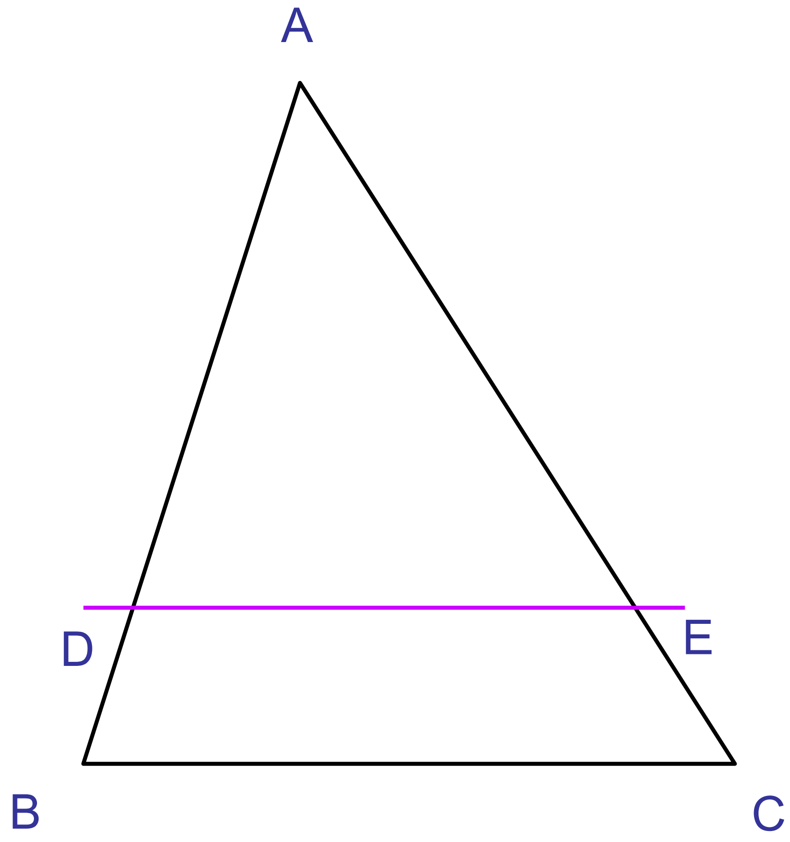


Proposición 6:1 Si dos triángulos tienen la misma altura, sus áreas guardan la misma proporción que sus bases.

AREA / AREA = Base / Base

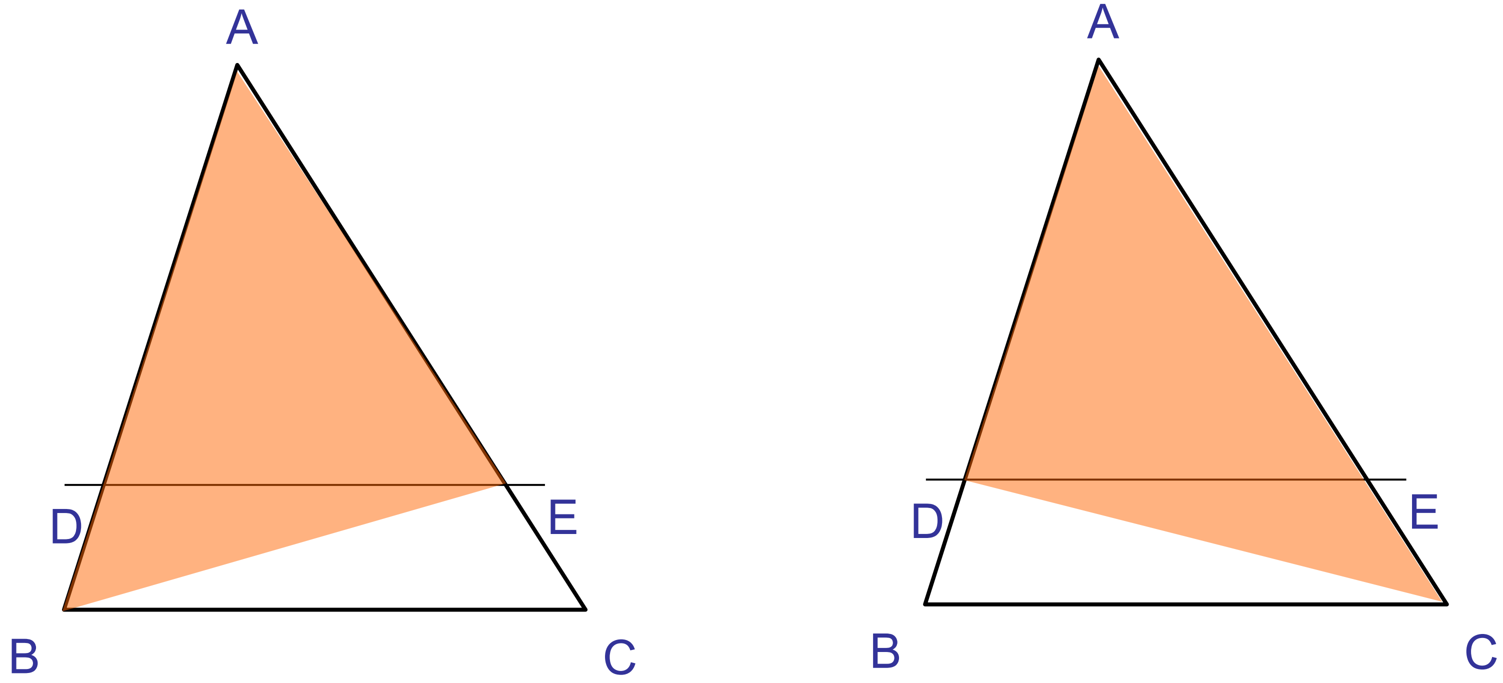


Proposición 6:2 *Si se dibuja una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente a los lados del triángulo.*

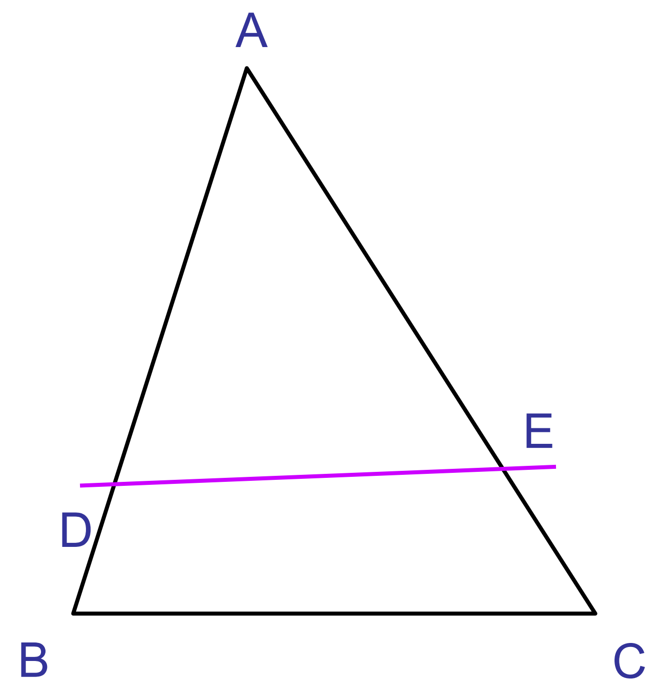


Proposición 6:2 *Si se dibuja una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente a los lados del triángulo.*

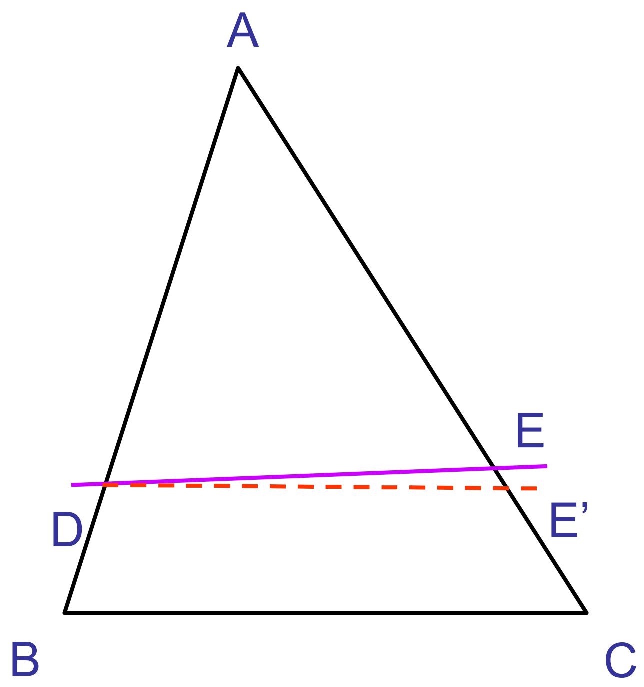
Demostración.



Proposición 6:2 *Si se dibuja una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente a los lados del triángulo. Y si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo, la recta que une los puntos de intersección será paralela al otro lado.*

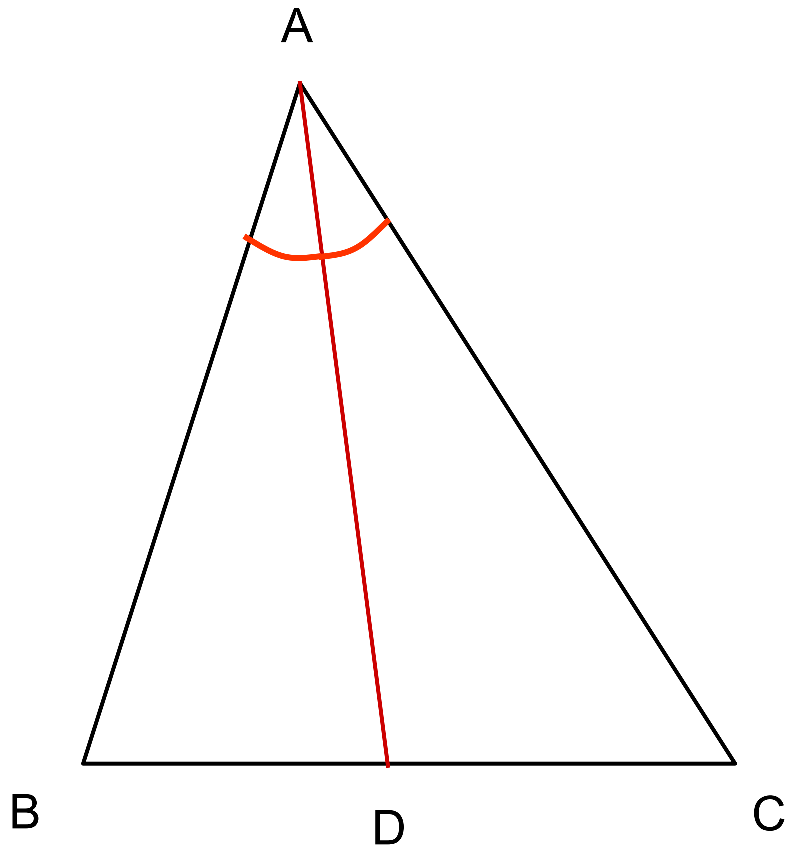


Proposición 6:2 *Si se dibuja una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente a los lados del triángulo. Y si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo, la recta que une los puntos de intersección será paralela al otro lado.*



Demostración.

Proposición 6:3 *Si se divide en dos partes iguales el ángulo de un triángulo, y la recta que corta el ángulo corta a la base, los segmentos de la base guardarán la misma razón que los lados del triángulo y viceversa*.

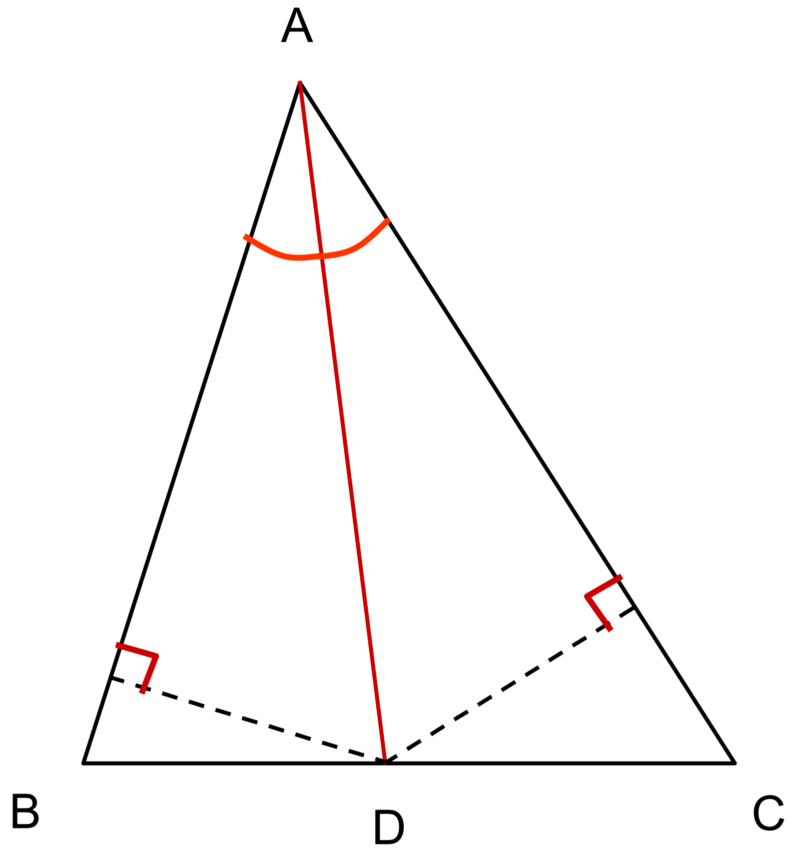


Proposición 6:3 *Si se divide en dos partes iguales el ángulo de un triángulo, y la recta que corta el ángulo corta a la base, los segmentos de la base guardarán la misma razón que los lados del triángulo y viceversa*.

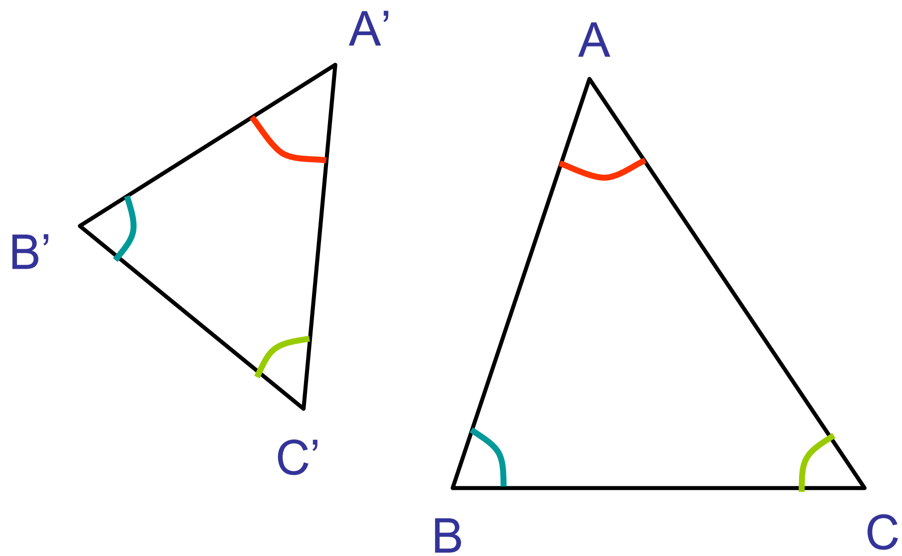
Demostración.

Por (P1),

$BD / DC = ABD / ADC = AB / AC$



Proposición 6:4 *Si dos triángulos tienen ángulos iguales, sus lados son proporcionales.*

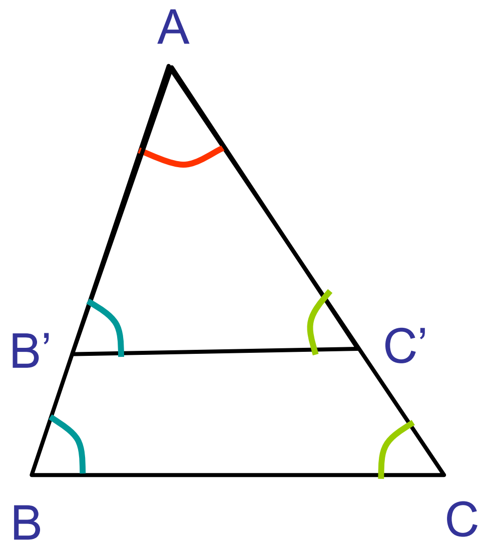


Proposición 6:4 *Si dos triángulos tienen ángulos iguales, sus lados son proporcionales.*

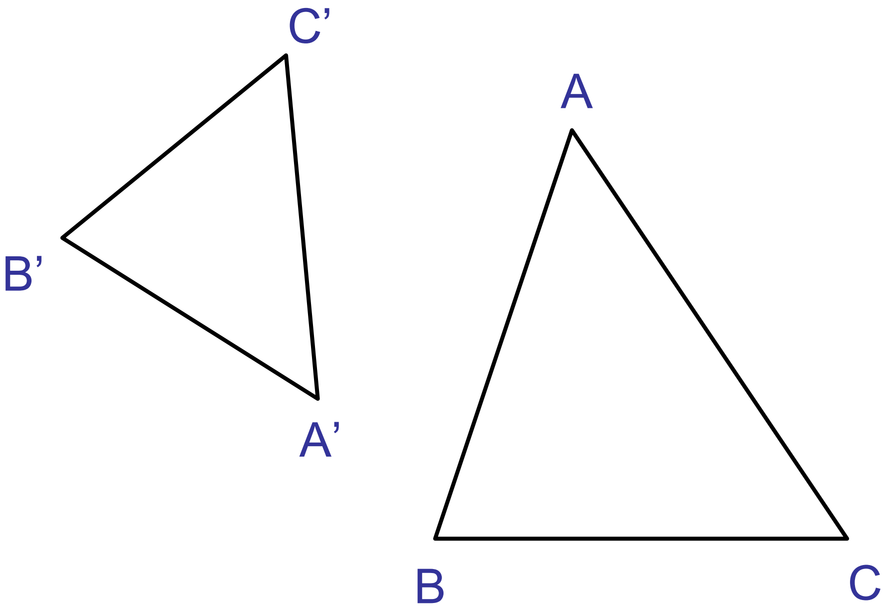
Demostración:

BC es paralela a B'C'

Por la proposición 3, AB / AB' = AC / AC'

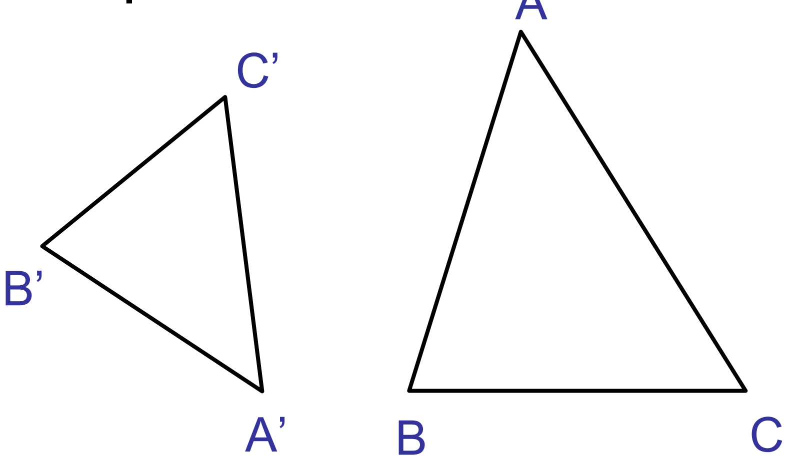


Proposición 6:5 *Si dos triángulos tienen lados proporcionales, sus ángulos serán iguales.*

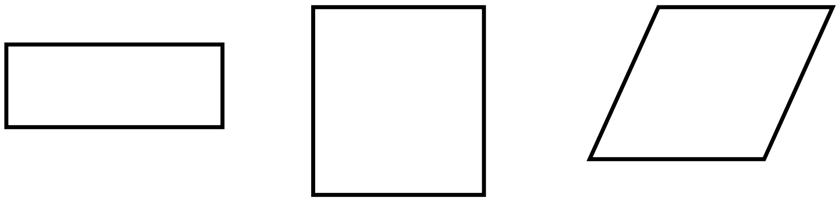


Dos figuras son semejantes si tienen ángulos iguales y lados proporcionales.

Las proposiciones 4 y 5 dicen que para los triángulos cada una de las condiciones implica la otra.

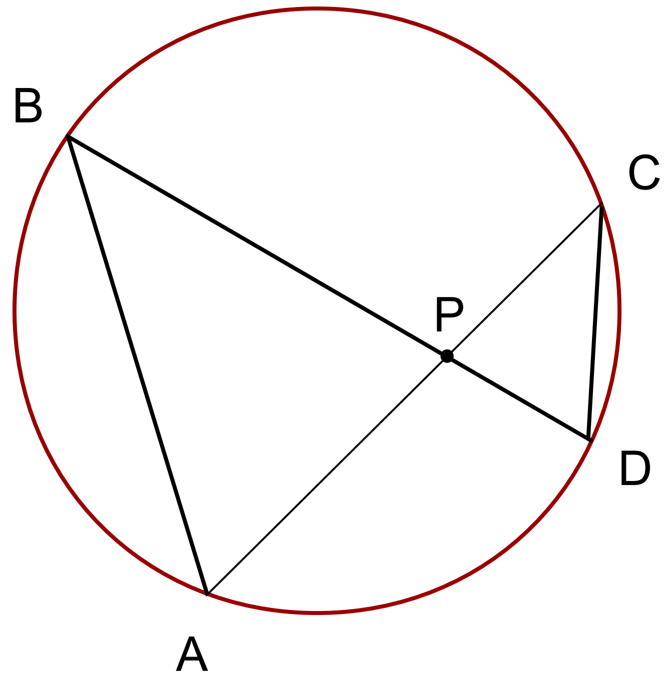


Esto es falso para otras figuras:



Corolario. Si ABCD es un cuadrilátero cíclico y P es la intersección de AC y BD entonces ABP y DCP son semejantes.

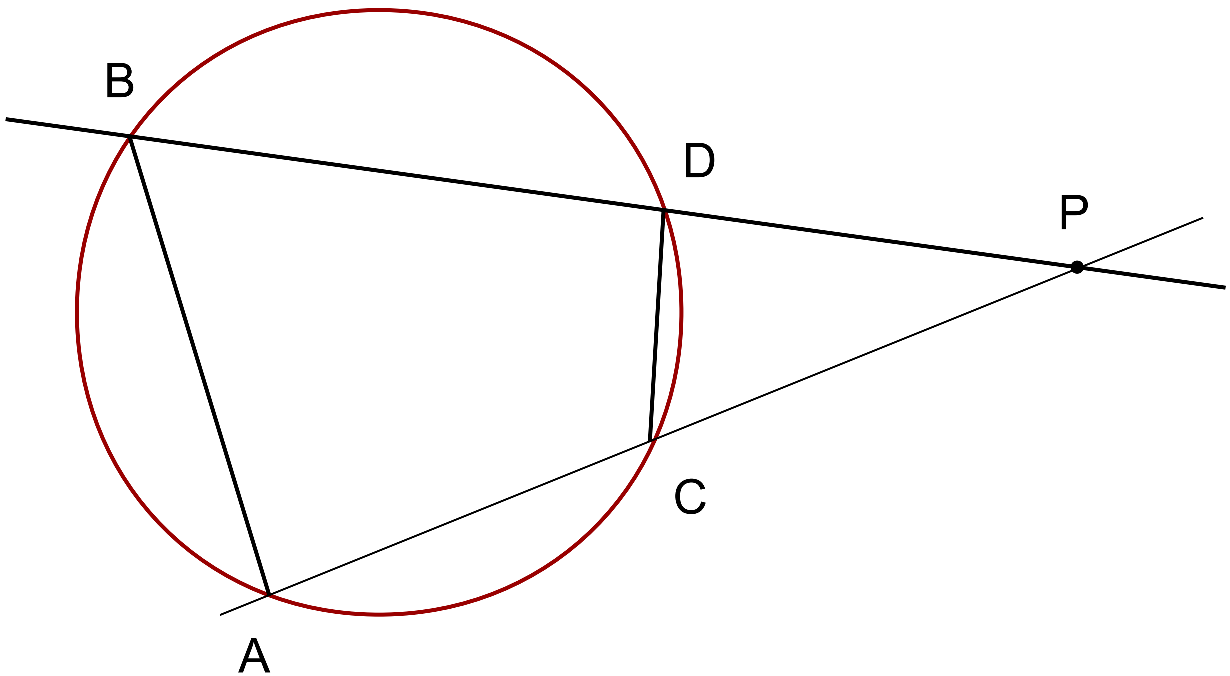
Por lo tanto $AP \cdot PC = BP \cdot PD$



Para todas las rectas que pasan por un punto y cruzan a un círculo, el producto de las distancias del punto a los dos puntos de intersección es igual.

Corolario. Si ABCD es un cuadrilátero cíclico y P es la intersección de AC y BD entonces ABP y DCP son semejantes.

Por lo tanto $AP \cdot PC = BP \cdot PD$



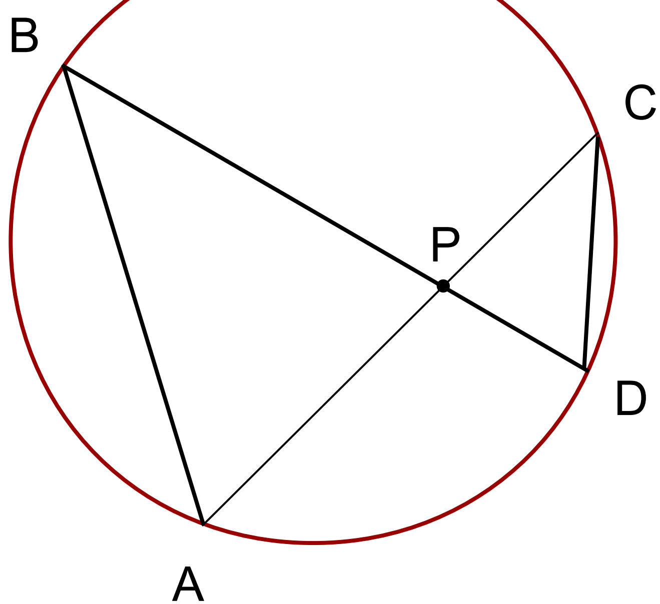
Para todas las rectas que pasan por un punto y cruzan a un círculo, el producto de las distancias del punto a los dos puntos de intersección es igual.

Corolario. Si ABCD es un cuadrilátero cíclico y P es la intersección de AC y BD entonces ABP y DCP son semejantes.

Por lo tanto AP · PC = BP · PD

Demostración:

<ABP = <PCD y <BAP = <CDP ya que esos ángulos ven los mismos arcos del círculo
Así que los triángulos ACP y DBP tienen ángulos correspondientes iguales
Y por (P4) son semejantes.
Como AP / PB = DP / PC
entonces
AP·PC = BP·PD



Corolario. Si ABCD es un cuadrilátero cíclico y P es la intersección de AC y BD entonces ABP y DCP son semejantes.

Por lo tanto AP · PC = BP · PD

Demostración:

<ABD + <ACD = 2 rectos ya que ABCD es cíclico.

Como también <ACD + <DCP = 2rectos, entonces <ACD = <DBP

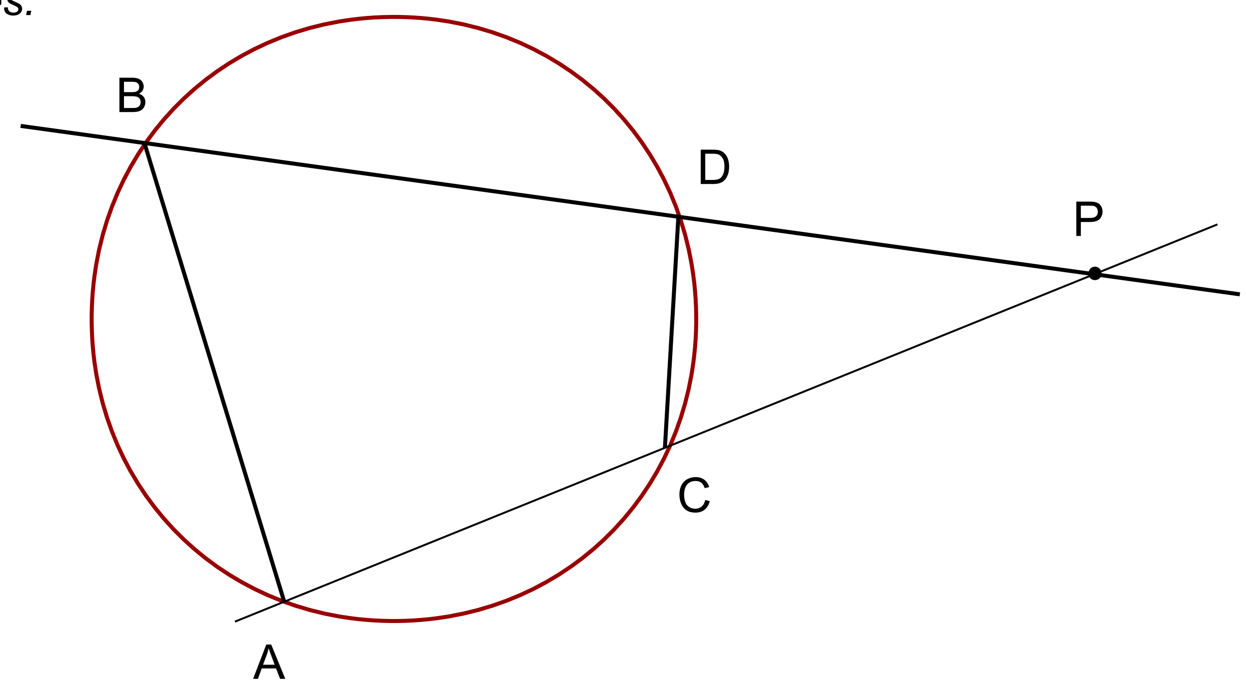
Así que los triángulos ACP y DBP tienen ángulos correspondientes iguales

Y por (P4) son semejantes.

Como AP / DP = CP / BP

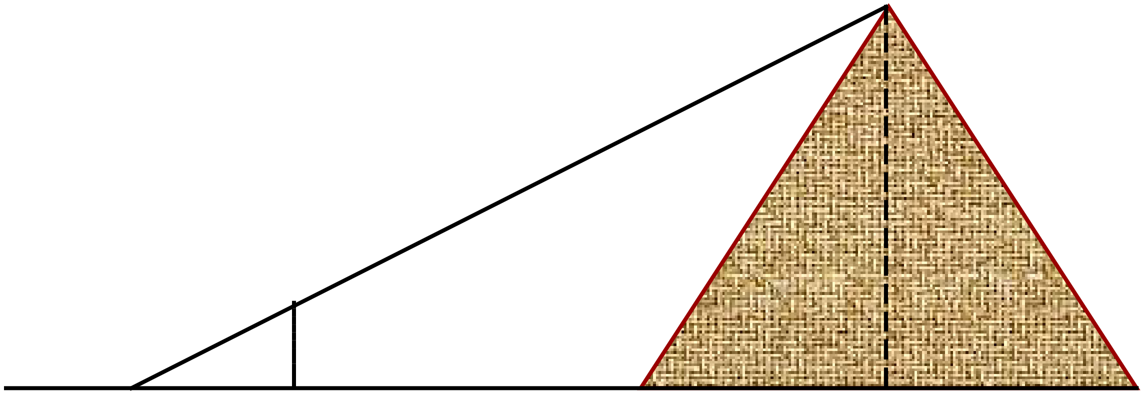
entonces

AP·BP = CP·DP



Aplicaciones

Altura de las pirámides (midiendo sombras)



Aplicaciones

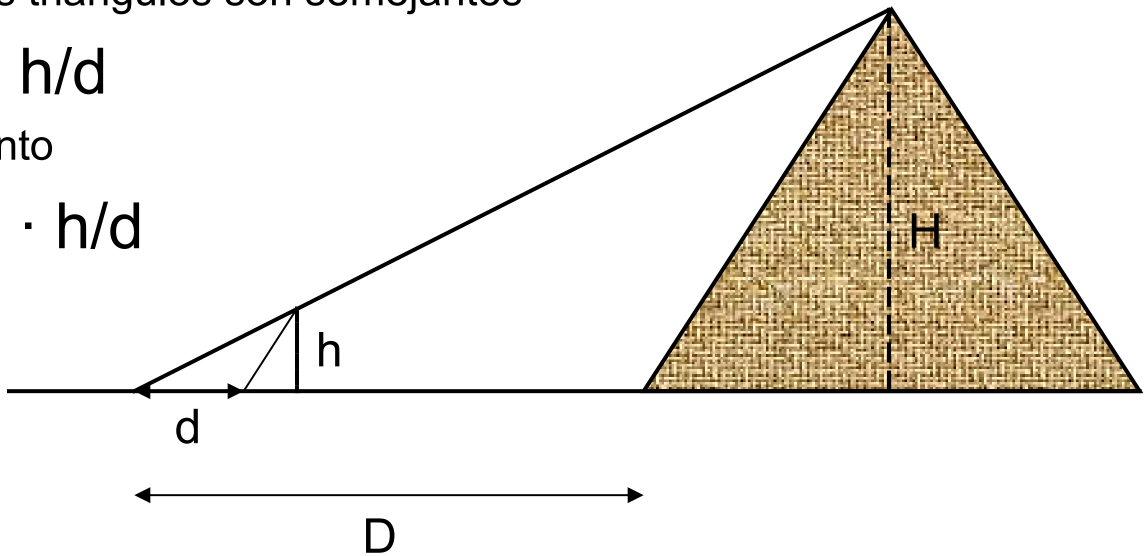
Altura de las pirámides (midiendo sombras)

Como los triángulos son semejantes

$$H/D = h/d$$

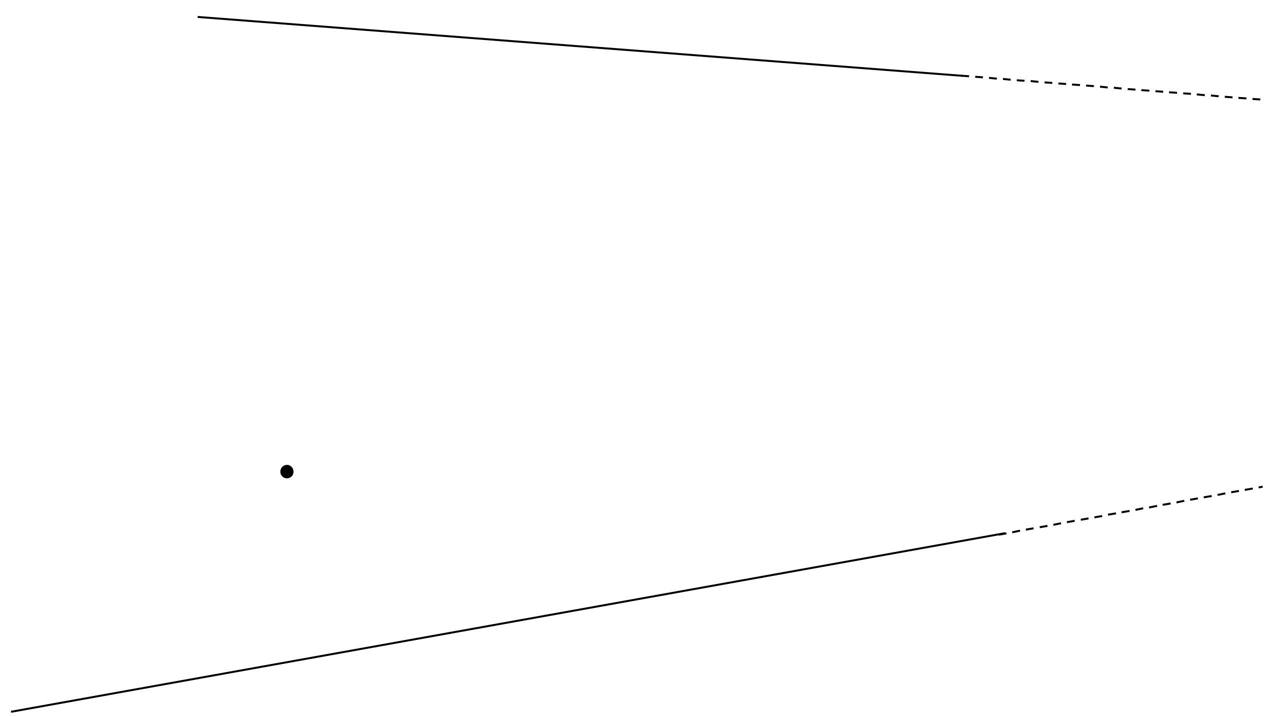
Por lo tanto

$$H = D \cdot h/d$$



Aplicaciones

Problema. Dibujar la recta que pasa por un punto y el punto de intersección de dos rectas que es inaccesible.

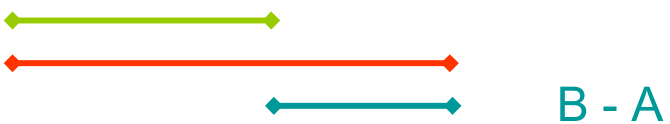


ARITMETICA

Las magnitudes pueden expresarse como longitudes:

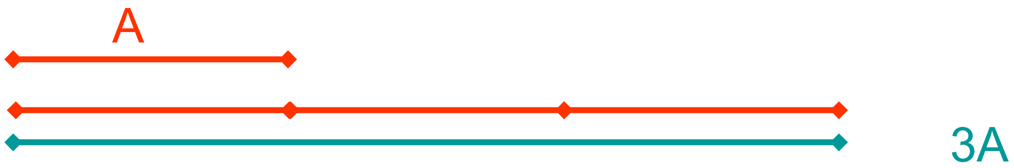
¿Como podemos sumar magnitudes?

¿Y restarlas?

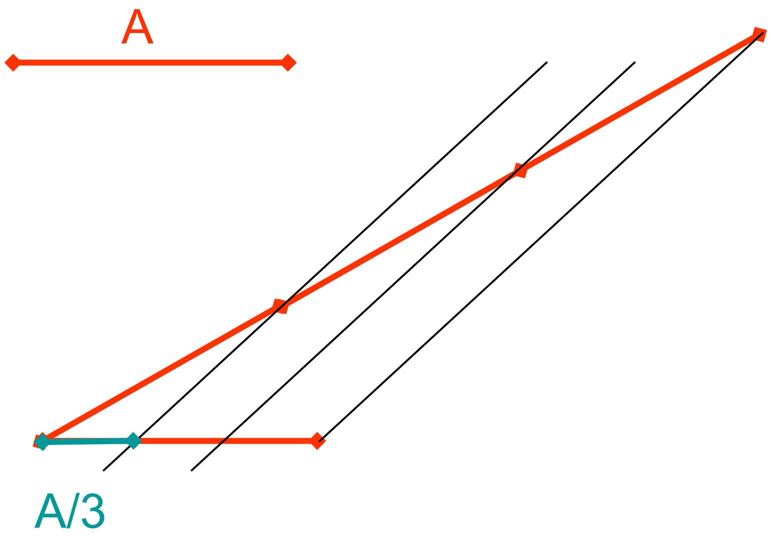


ARITMETICA

¿Cómo podemos multiplicar una magnitud por un número?



¿Y dividirla en n partes iguales?

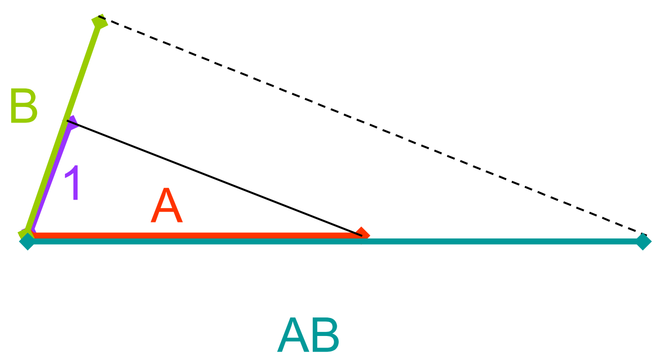


ARITMETICA

¿Cómo podemos multiplicar dos magnitudes?

Necesitamos una unidad: 

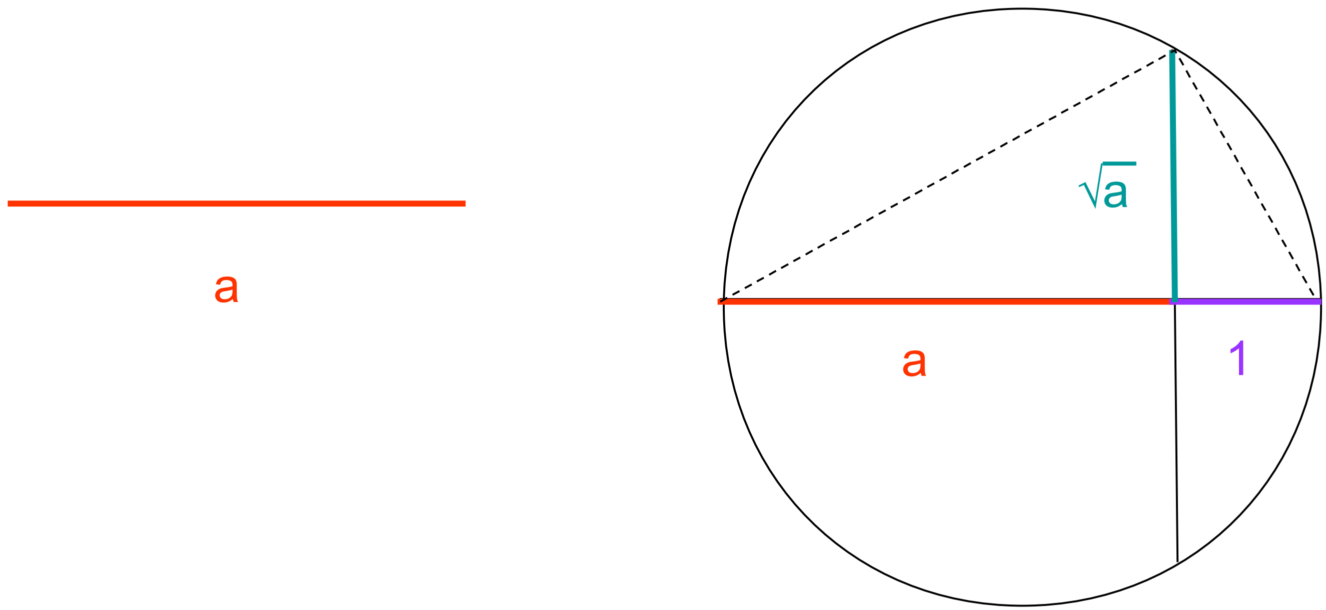
AB es una magnitud que guarda con B la misma proporción que la magnitud A guarda con 1



Tarea: ¿Cómo dividirías dos magnitudes?

ARITMETICA

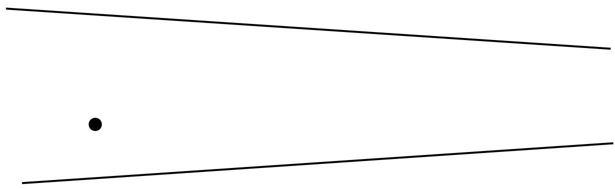
Como obtener la raíz cuadrada de una magnitud.



TAREA 3

1. *Muestra como dibujar un segmento igual a uno dado y basado en un punto trazando únicamente rectas y círculos.*

2. *Dibuja la recta que pasa por un punto y el punto de intersección de dos rectas sin usar el punto de intersección.*



3. *Muestra cómo se pueden dividir geométricamente dos magnitudes representadas por segmentos.*

Clase 4

Construcciones con regla y compás

Construcción con regla y compás

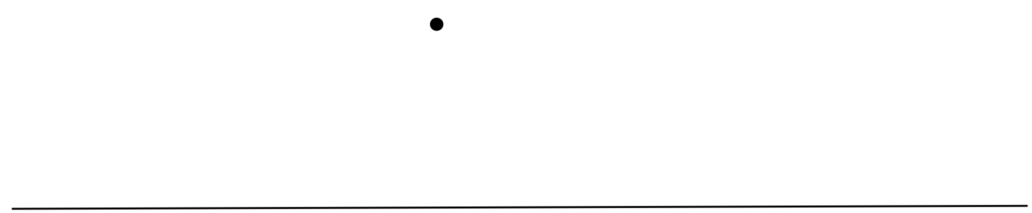
Procedimiento para crear un objeto geométrico basándose en los postulados; así que lo que se vale es:

1. *Dibujar una recta por 2 puntos dados.*
2. *Dibujar un círculo con un centro y por un punto dados.*
3. *Usar como puntos las intersecciones entre líneas rectas y círculos dibujados previamente.*

Para que una construcción sea válida, debe demostrarse que se obtiene lo que se pidió.

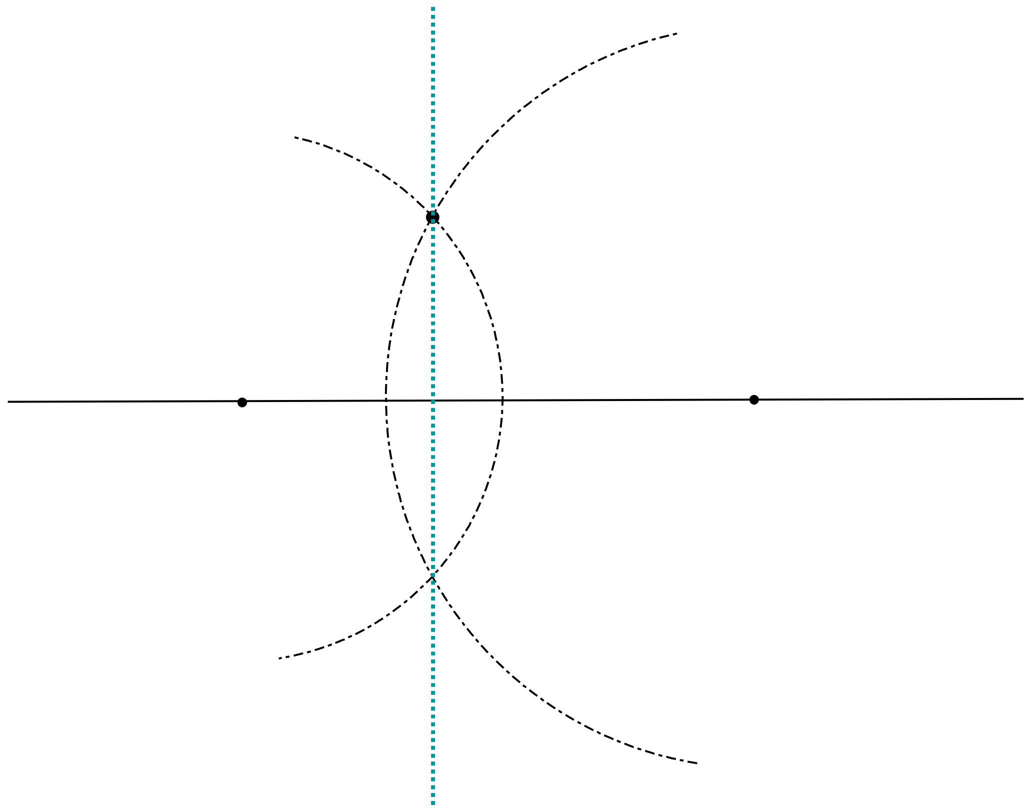
Construcciones

Construir por un punto dado una recta perpendicular a una recta dada.



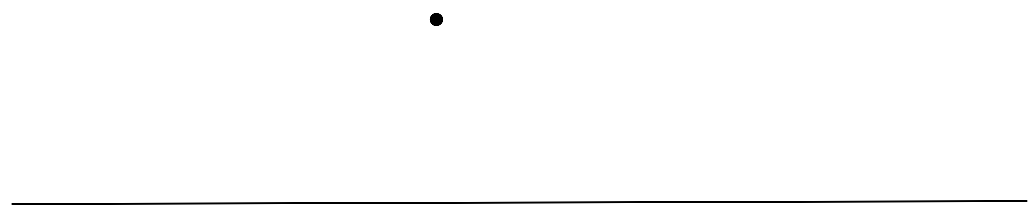
Construcciones

Construir por un punto dado una recta perpendicular a una recta dada.



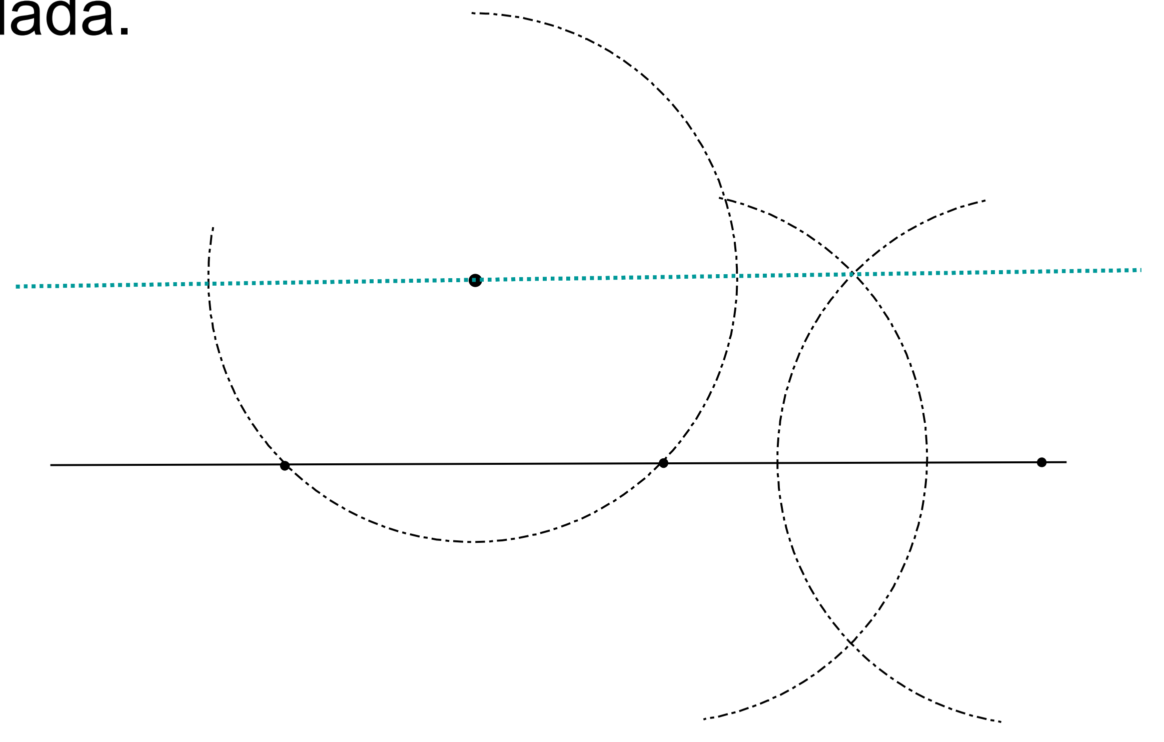
Construcciones

Construir por un punto dado una recta paralela a una recta dada.



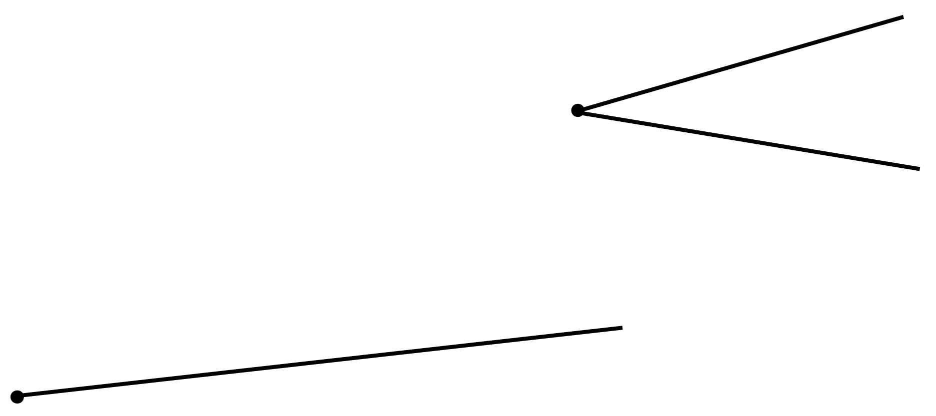
Construcciones

Construir por un punto dado una recta paralela a una recta dada.



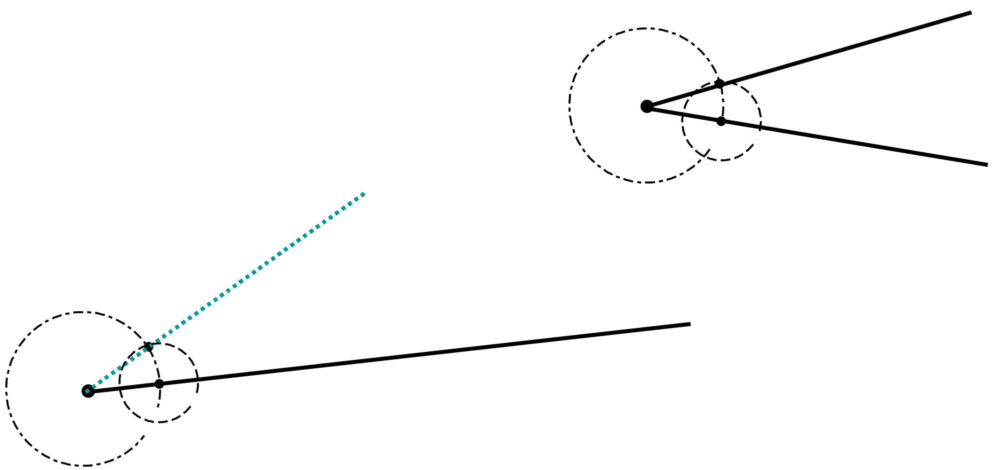
Construcciones

Copiar sobre un punto de una recta un ángulo dado.



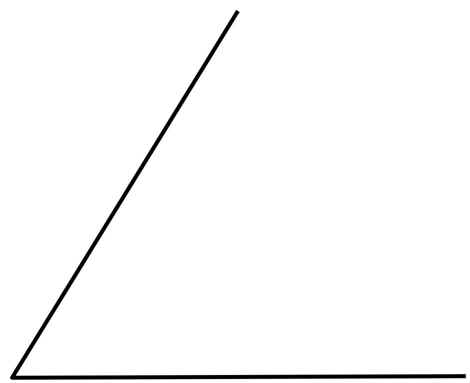
Construcciones

Copiar sobre un punto de una recta un ángulo dado.



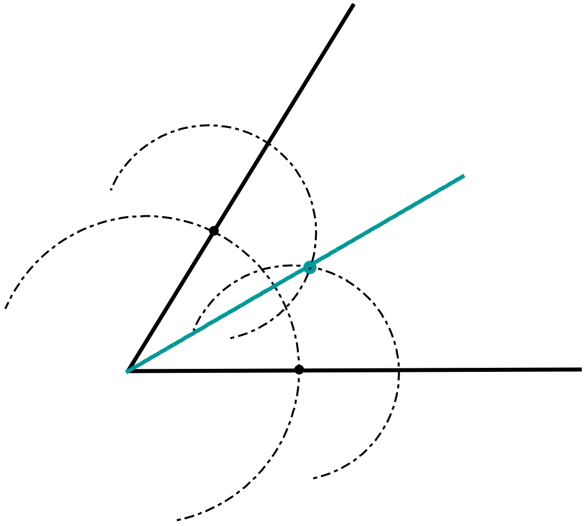
Construcciones

Dividir un ángulo en 2 ángulos iguales.



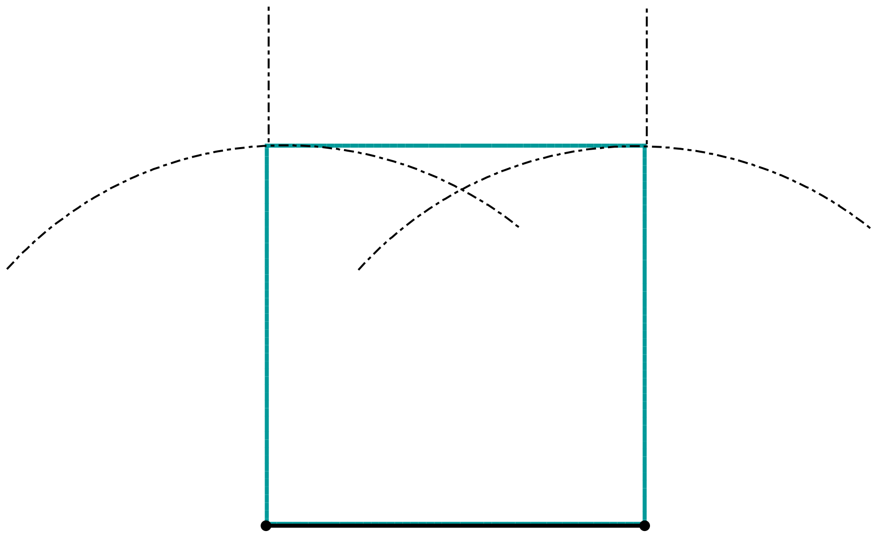
Construcciones

Dividir un ángulo dado en 2 ángulos iguales.



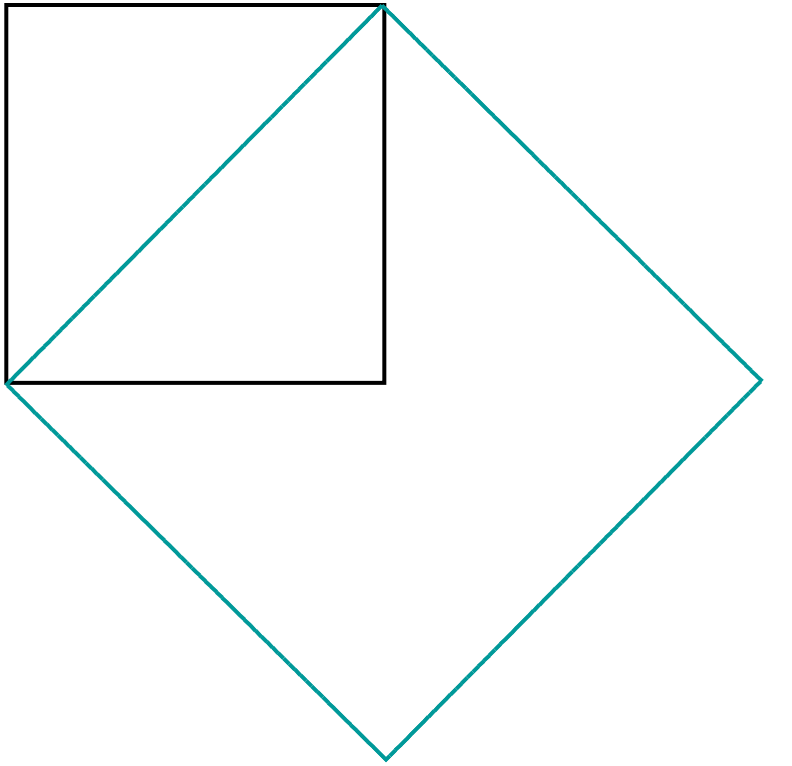
Construcciones

Construir un cuadrado cuyo lado es dado.



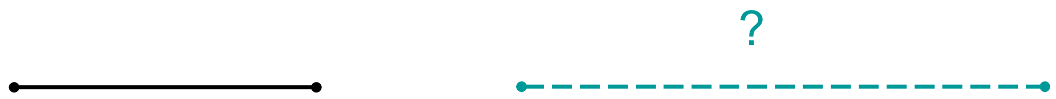
Construcciones

Construir un cuadrado del doble de área que un cuadrado dado.



Construcciones

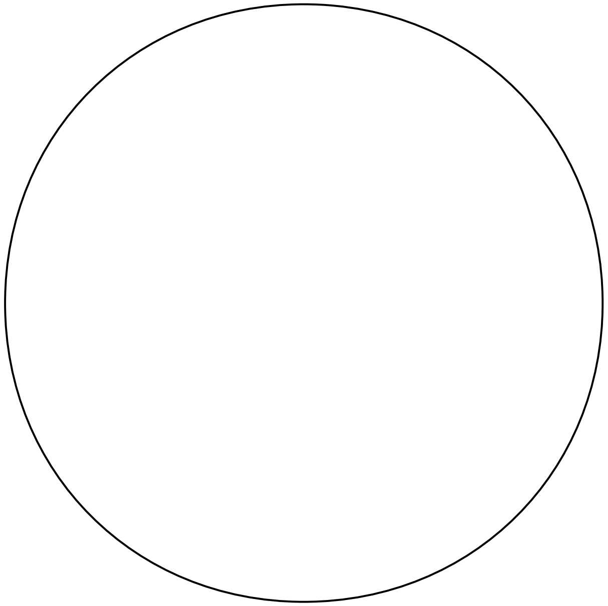
Construir un cuadrado del triple de área que un cuadrado dado.



(*necesitamos construir la raíz de 3*)

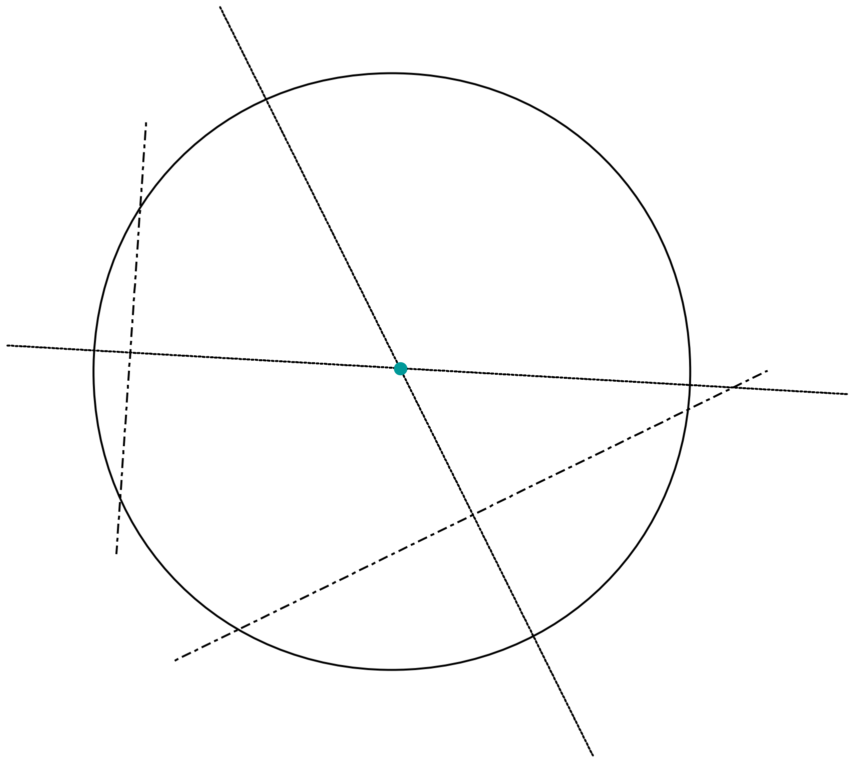
Construcciones

Hallar el centro de un círculo.



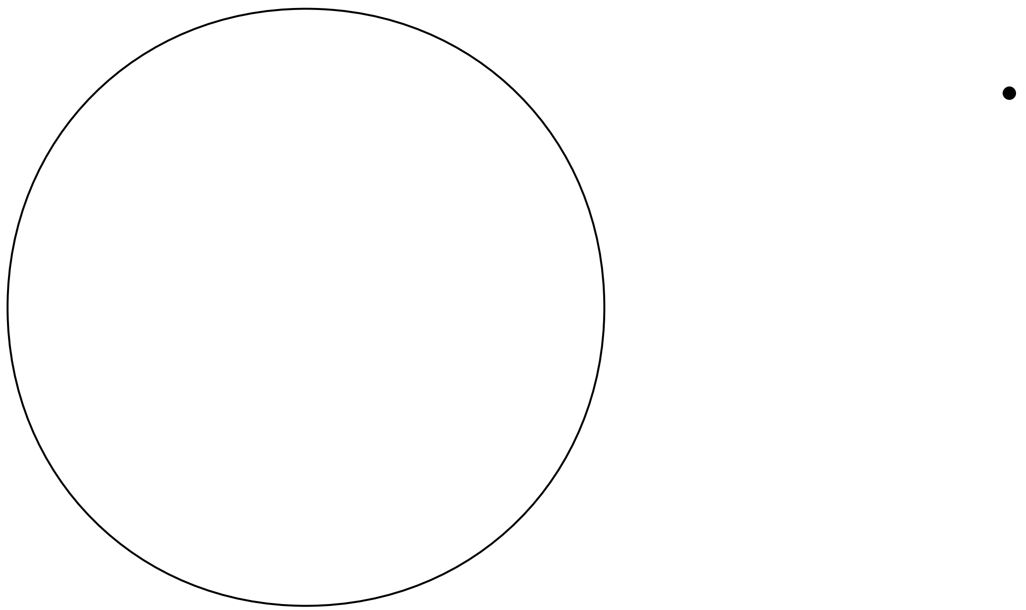
Construcciones

Hallar el centro de un círculo.



Construcciones

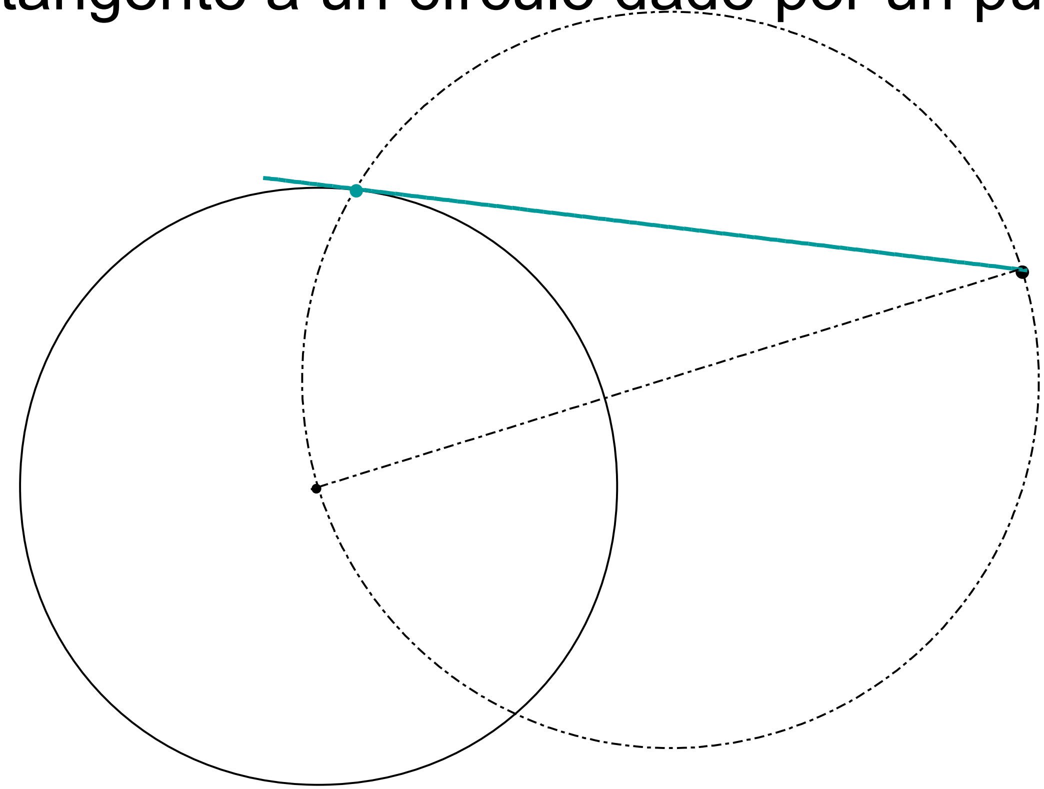
Dibujar una tangente a un círculo dado por un punto dado.



(*Necesitamos hallar el punto de tangencia*)

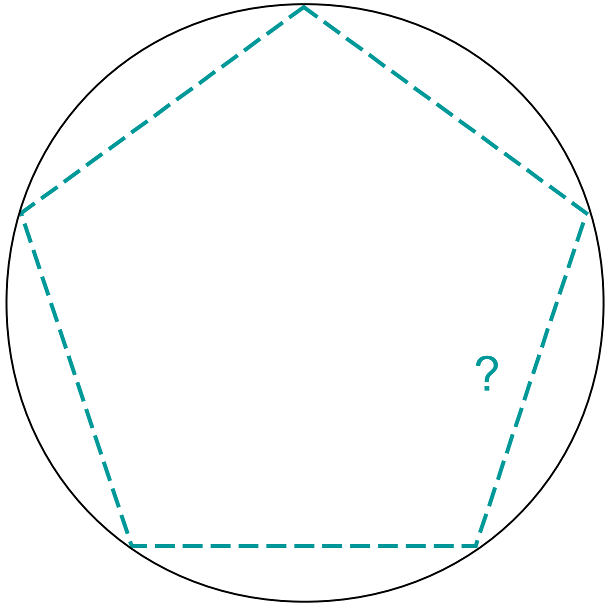
Construcciones

Dibujar una tangente a un círculo dado por un punto dado.



Construcciones

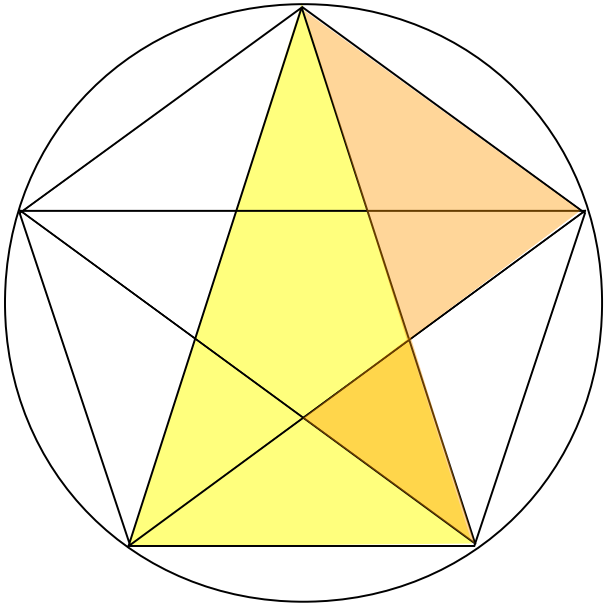
Construir un pentágono regular



(*Necesitamos construir un ángulo o una cuerda*)

Construcciones

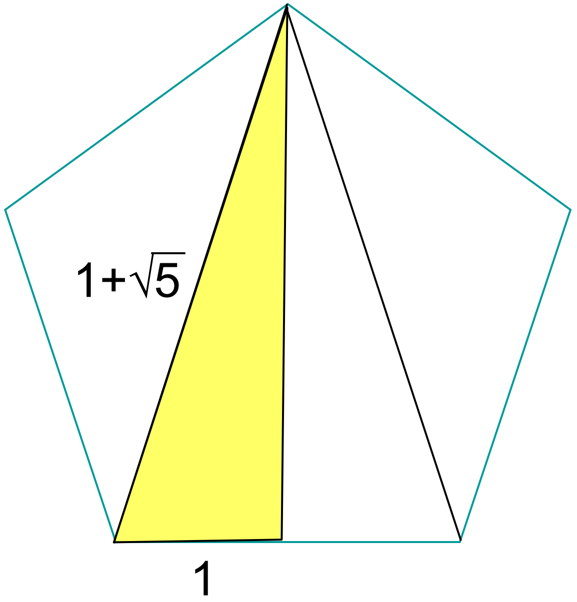
Construir un pentágono regular



Observar que los tres triángulos son semejantes

Construcciones

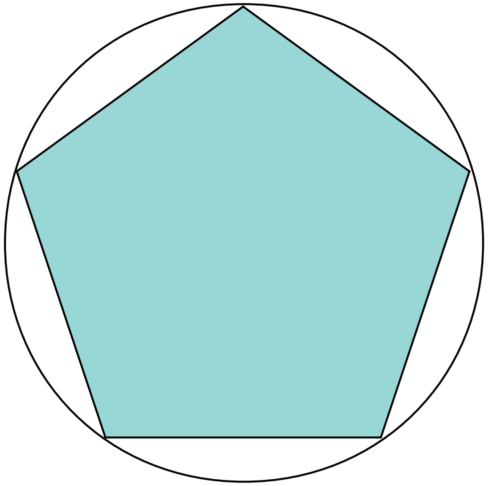
Construir un pentágono regular



Hay que construir un triángulo rectángulo de lado 1 *e hipotenusa* $1+\sqrt{5}$.

Construcciones

Se pueden construir polígonos regulares de 3,4,5,6,8,10,12,15,… lados

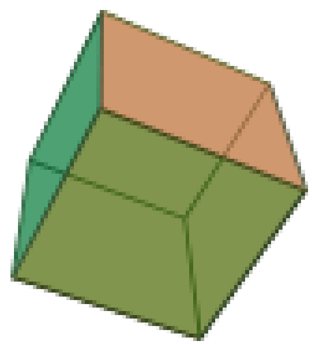


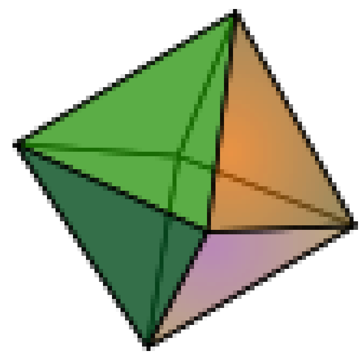
Algo que los griegos no pudieron hacer:

Construir un polígono regular de 7 lados

Poliedros regulares

Los Elementos de Euclides culminan en el libro 13 con la construcción de los poliedros regulares:

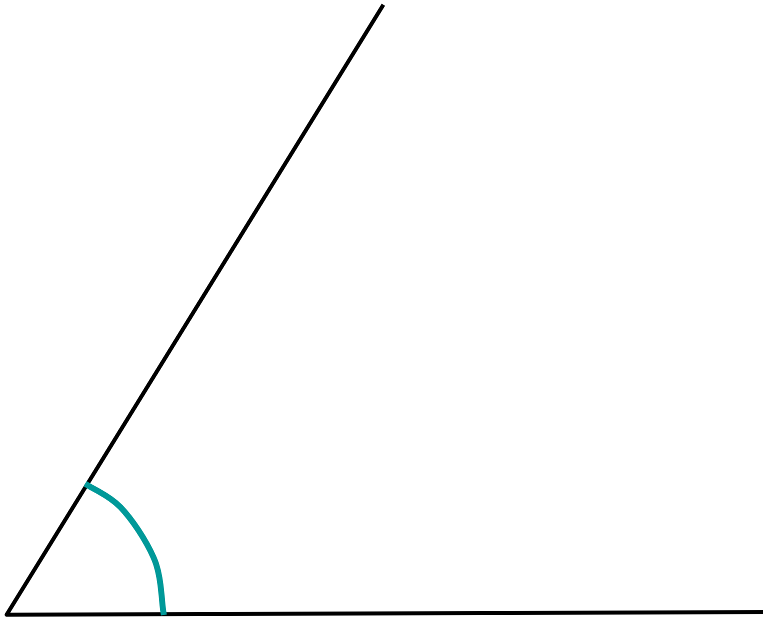




Un poliedro es regular si sus caras son polígonos regulares y todos los ángulos en las aristas y en los vértices son iguales.

3 Problemas Famosos

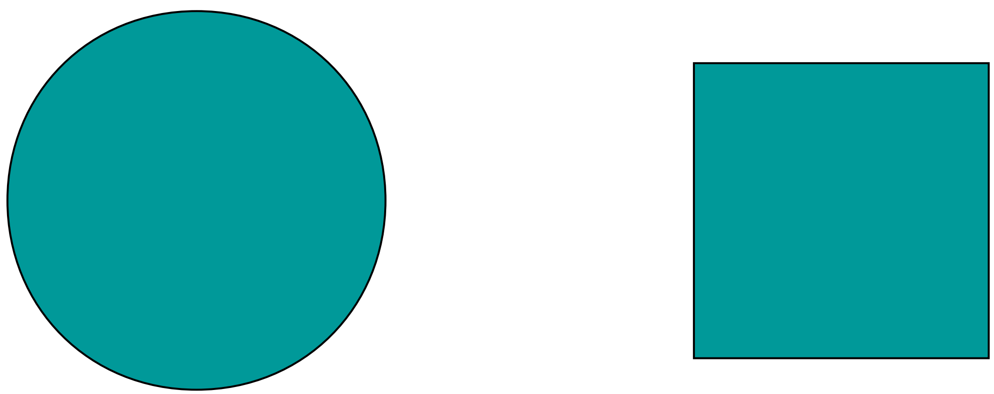
Trisectar un ángulo



Dividir un ángulo dado en 3 ángulos iguales.

3 Problemas Famosos

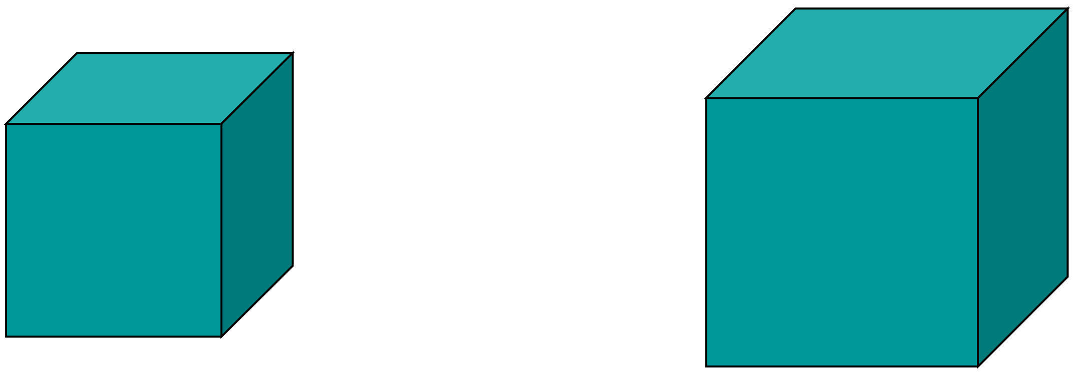
La cuadratura del círculo



Construir un cuadrado de la misma área que un círculo.

3 Problemas Famosos

Duplicar el cubo



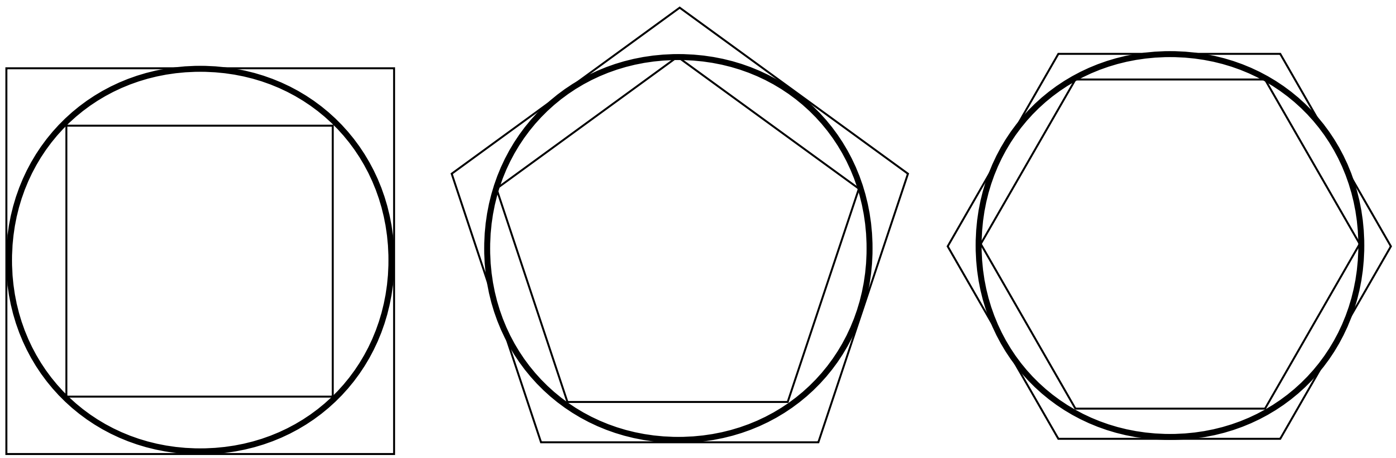
Construir un cubo del doble de volumen que otro cubo.

(*necesitamos construir la raíz cúbica de 2*)

Arquímedes

de Siracusa (287 a 212 AC)

La longitud y el área de un círculo.

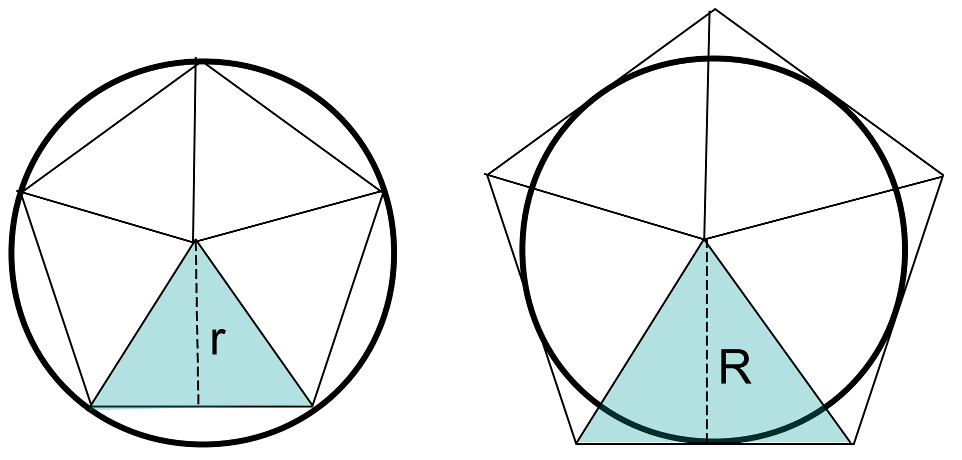


área p.inscrito < área círculo < área p.circunscrito

perímetro p.inscrito < perímetro círculo < perímetro p.circunscrito ?

Arquímedes
de Siracusa (287 a 212 AC)

La longitud y el área de un círculo.

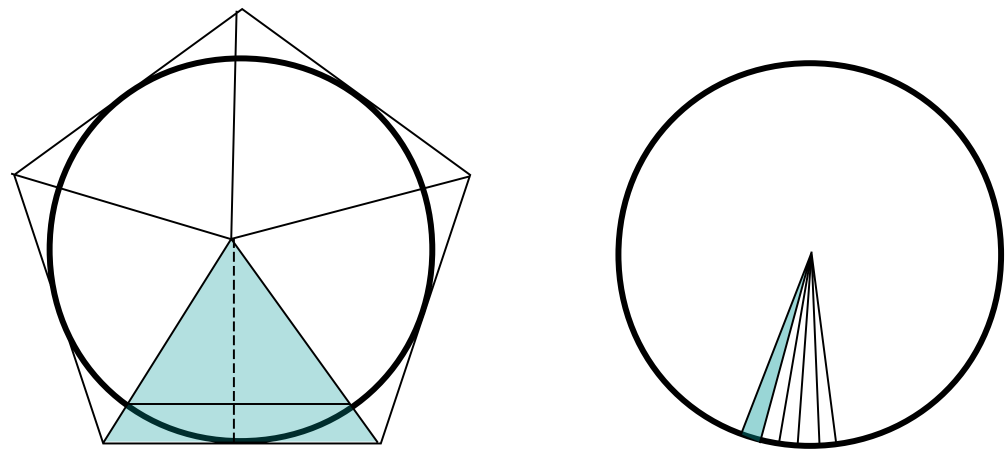


Área p.inscrito = ½ r x perímetro p.inscrito

Área p.circunscrito = ½ R x perímetro p.circunscrito

Arquímedes
de Siracusa (287 a 212 AC)

La longitud y el área de un círculo.

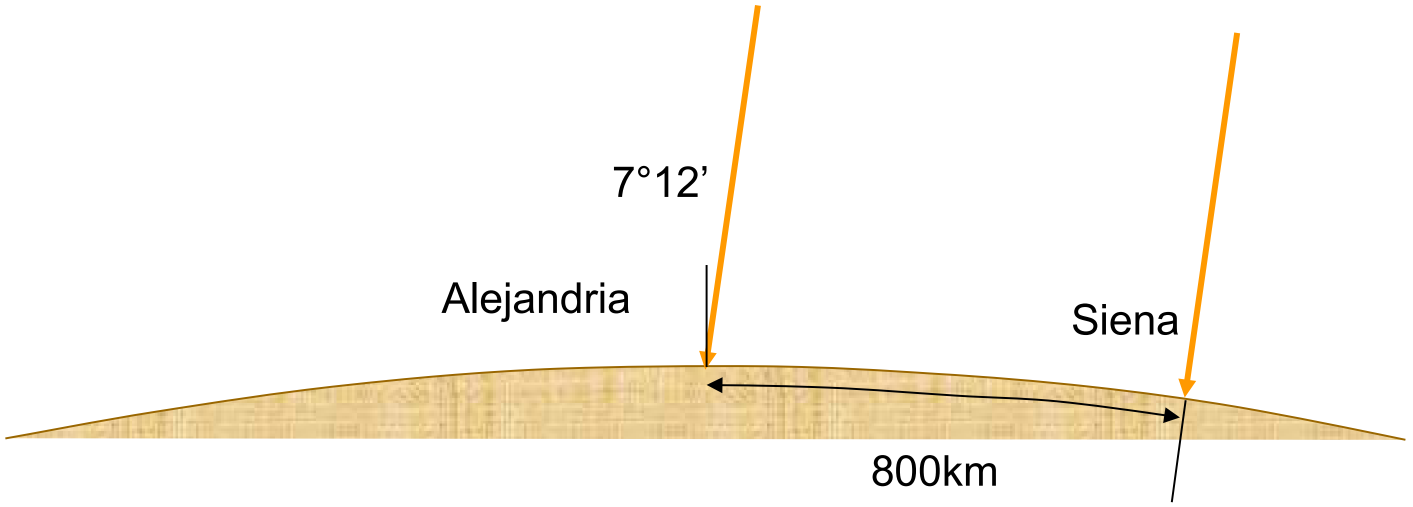


Perímetro del círculo = límite de los perímetros de los polígonos

Área Círculo = ½ Radio x Perímetro Círculo

Eratóstenes
(276 a 194 AC)

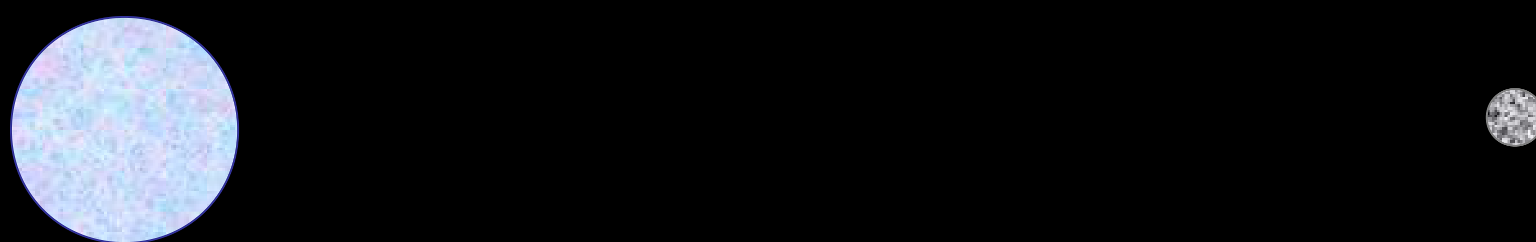
Calculó el diámetro de la Tierra



Hipárco

de Nicéa (190 a 120 AC

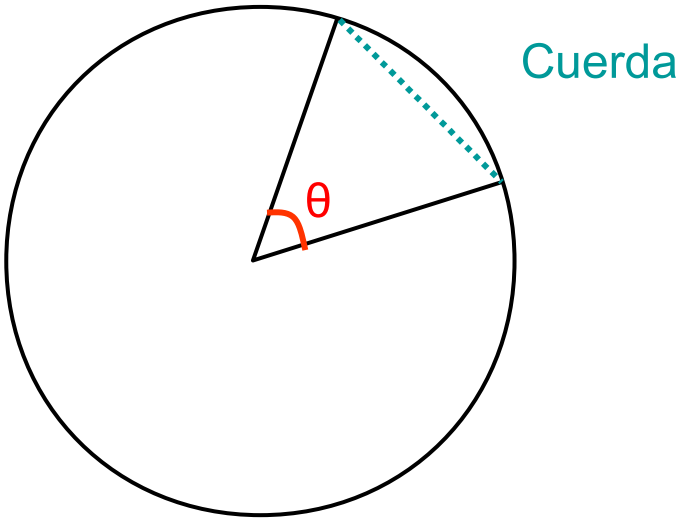
Inventor de la trigonometría (medida de ángulos). Calculó la distancia de la Tierra a la luna usando los eclipses.



Ptolomeo

de Alejandría, (90 a 168 DC)

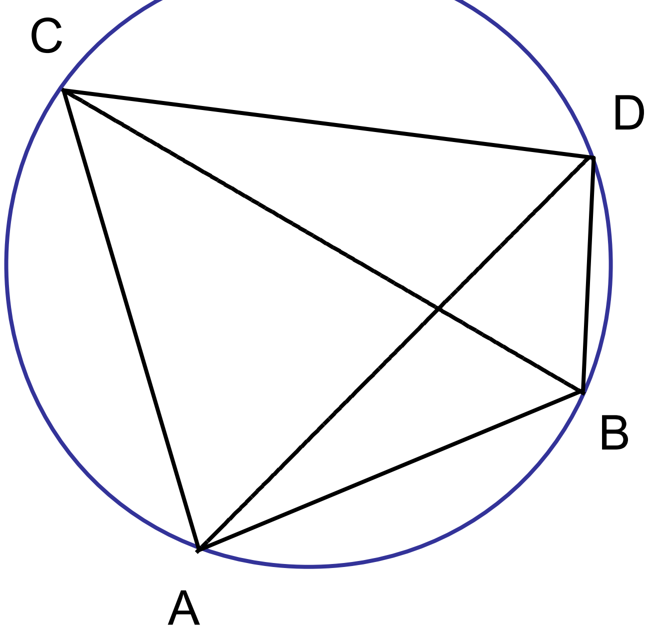
Calculó una *tabla de cuerdas*, usada para astronomía:



Ptolomeo

de Alejandría, (90 a 168 DC)

Teorema de Ptolomeo: *En un cuadrilátero cíclico, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.*



AB·CD + AC·BD = AD·BC

TAREA 4

1. *Construye con regla y compás una tangente a un círculo dado por un punto dado.*

2. *Calcula es el diámetro de la Tierra usando los datos que tenía Eratóstenes.*

3. *¿Cómo calcularías la distancia de la Tierra a la Luna usando los eclipses?*

4. *¿Puedes demostrar el Teorema de Ptolomeo?*

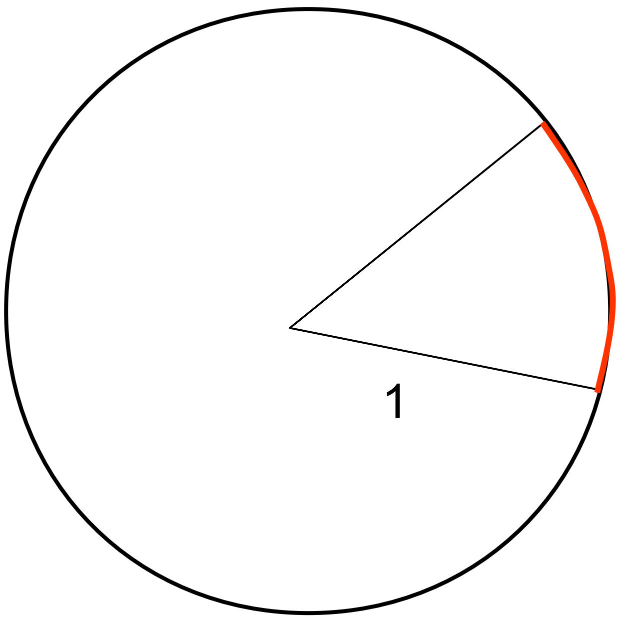
Clase 5

Trigonometría

Concurrencia

Medición de ángulos

Los ángulos pueden medirse viendo que parte de una circunferencia ocupan. Los babilonios creían que la tierra tardaba 360 días en dar una vuelta al sol, así que dividieron al círculo en 360 *grados*.



Una manera mas natural de medir ángulos es tomar un círculo de radio 1 y medir la longitud del arco determinado por el ángulo. Esta es la medida del ángulo en *radianes*.

Ejemplos:

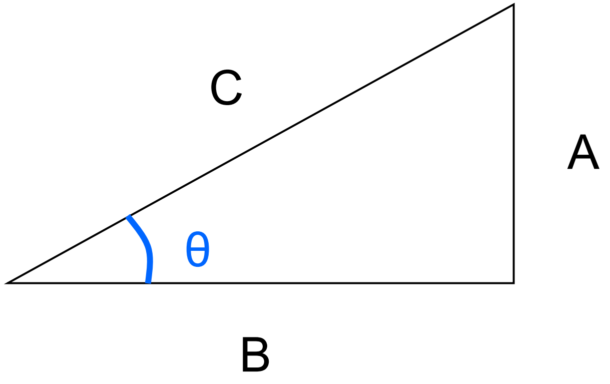
180° = media circunferencia = π radianes

45° = 180°/ 4 = π / 4 radianes

π / 6 radianes = 180°/ 6 = 30°

Senos y cosenos

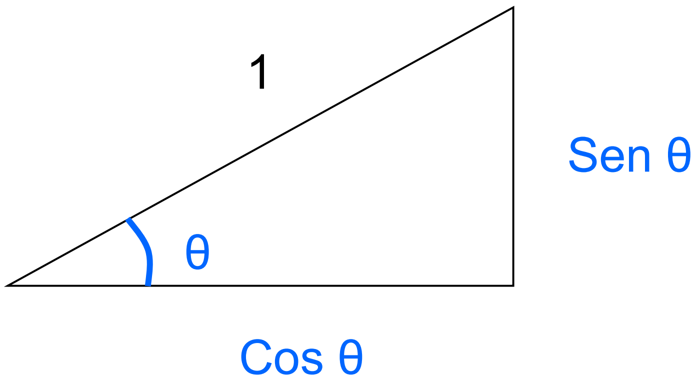
La forma de un triángulo rectángulo está determinada por un solo ángulo, por lo tanto las proporciones entre . sus lados son funciones del ángulo:



Sen θ = A/C   Cos θ = B/C   Tan θ = A/B

Senos y cosenos

En un triángulo rectángulo de hipotenusa 1:



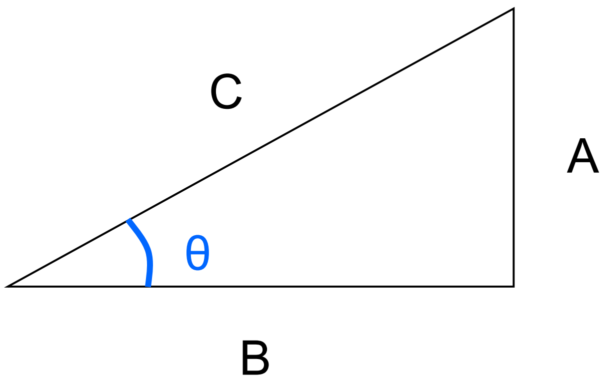
Senos y cosenos

Observar que para cualquier ángulo $0 \leq \theta \leq \pi/2$

$0 \leq \text{sen}\ \theta \leq 1$

$0 \leq \cos \theta \leq 1$

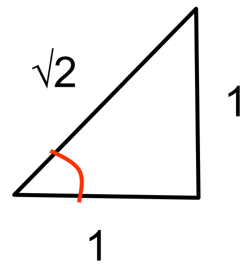
$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$



Como el ángulo θ queda determinado por el valor de cualquiera de estas funciones, estas dan otra manera de medir ángulos.

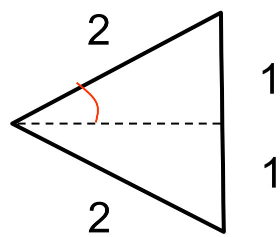
Ejemplos

¿Cuánto vale cos π/4?



así que cos π/4 = 1/√2

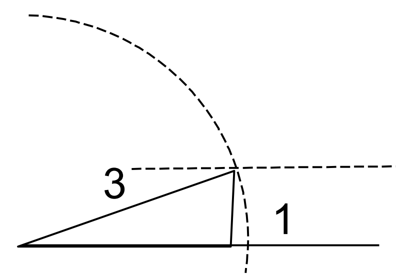
¿sen π/6?



así que sen π/6 = 1/2

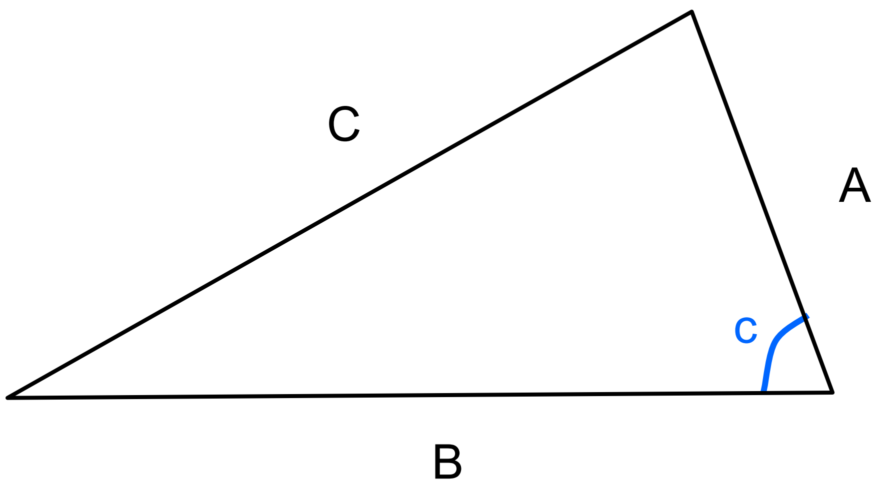
¿sen π/12? ¿Hay alguna relación entre el sen θ y sen θ/2 ?

Construye un ángulo θ tal que sen θ = 1/3



Ley de los cosenos

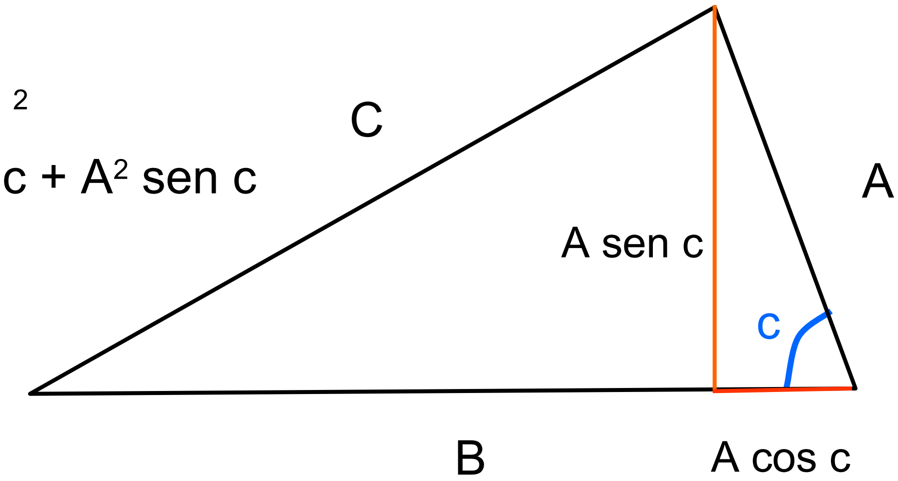
¿Qué dice el Teorema de Pitágoras para triángulos no rectángulos?



Ley de los cosenos

¿Qué dice el Teorema de Pitágoras para triángulos no rectángulos?

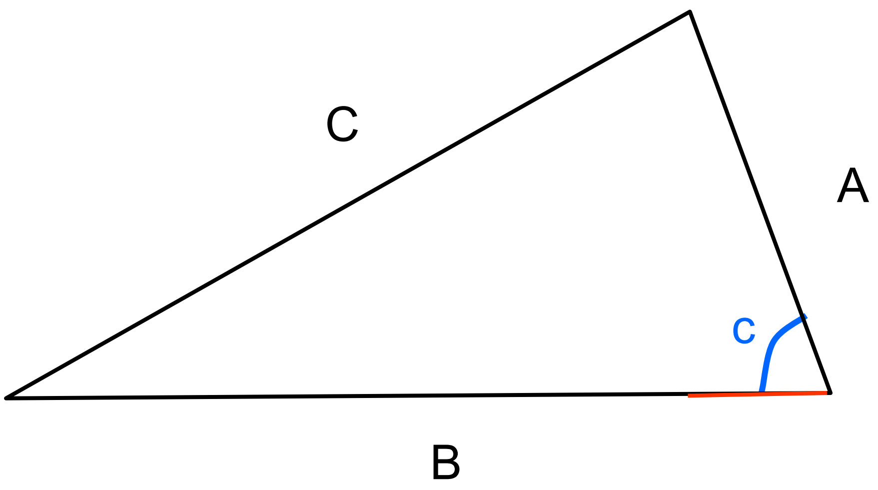
$$C^2 = (B - A \cos c)^2 + (A \text{ sen } c)^{\,2}$$
$$= B^2 - 2AB \cos c + A \cos^2 c + A^2 \text{ sen } c$$
$$= A^2 + B^2 - 2AB \cos c$$



Ley de los cosenos: $C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos c$

Ley de los cosenos

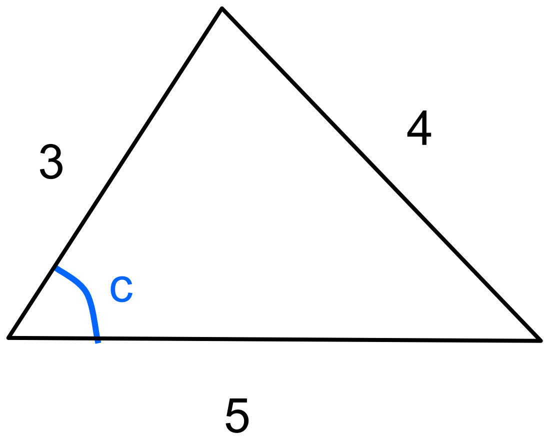
$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos c$$



Observar que en la fórmula da $C^2 = A^2 + B^2$ si y sólo si $\cos c = 0$, y esto ocurre si y sólo si $c = 90°$ (así que el Teorema de Pitágoras es válido sólo para triángulos rectángulos.

Ley de los cosenos

Ejemplo. Los lados de un triángulo miden 5, 6 y 7 ¿cuánto vale el coseno del ángulo opuesto al lado mediano?



Ejemplo En un triángulo de lados 5,6 y 7

¿Cuánto mide la altura sobre el lado 7 ?¿Cual es el área del triángulo?

Ley de los cosenos

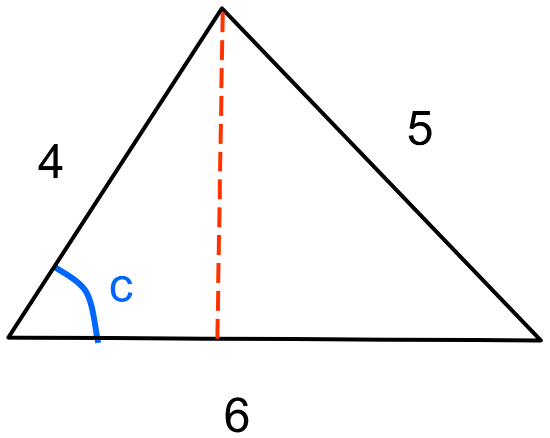
Ejemplo. Los lados de un triángulo miden 4, 5 y 6 ¿cuánto vale el coseno del ángulo opuesto al lado mediano?

Por la ley de los cosenos:

$5^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos c$

$25 = 52 - 48 \cos c$

$\cos c = 27/48 = 9/16$



Ejemplo En un triángulo de lados 4,5 y 6

¿Cuánto mide la altura sobre el lado 6?¿Cual es el área del triángulo?

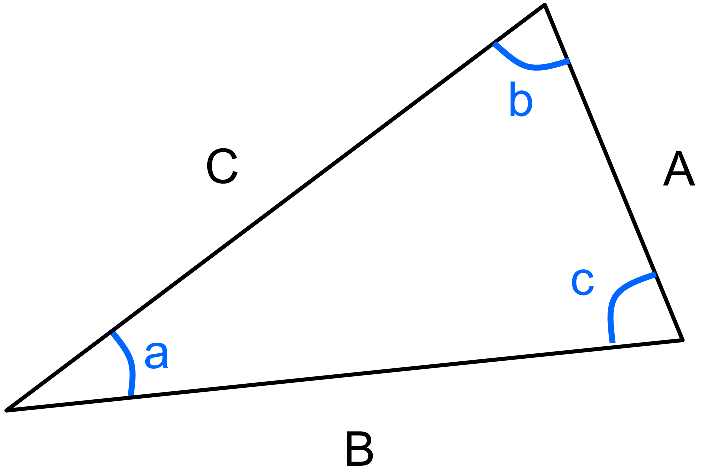
Altura = $4 \text{ sen } c = 4\,(1-\cos^2 c)^{1/2} = 4(1-(9/16)^2)^{1/2} = \sqrt{175}/4$

Area = $(6 \times \sqrt{175}/4)\,/2$

Ley de los senos

Teorema. Para cualquier triángulo

$$A / \text{sen } a = B / \text{sen } b = C / \text{sen } c$$

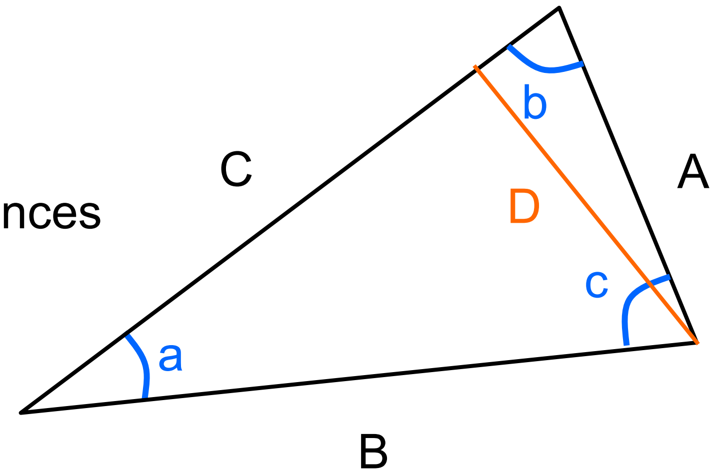


Ley de los senos

Teorema. Para cualquier triángulo

$$A / \text{sen } a = B / \text{sen } b = C / \text{sen } c$$

Demostración.



Si la altura sobre el lado C es D entonces

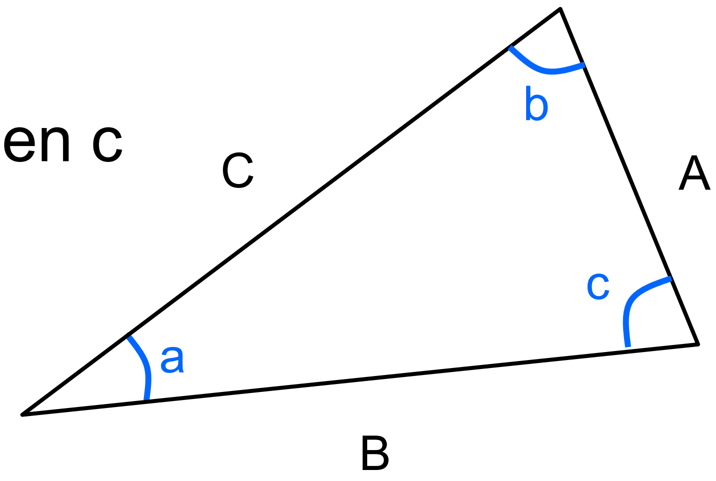
$A / \text{sen } a = A / (D/B) = AB / D$
$B / \text{sen } b = B / (D/A) = BA / D$

Esto prueba la primera igualdad,
las otras se obtienen cambiando de altura.

Ley de los senos

Ley de los senos:

$$A / \text{sen } a = B / \text{sen } b = C / \text{sen } c$$



Corolario.

$A / B = \text{sen } a / \text{sen } b$

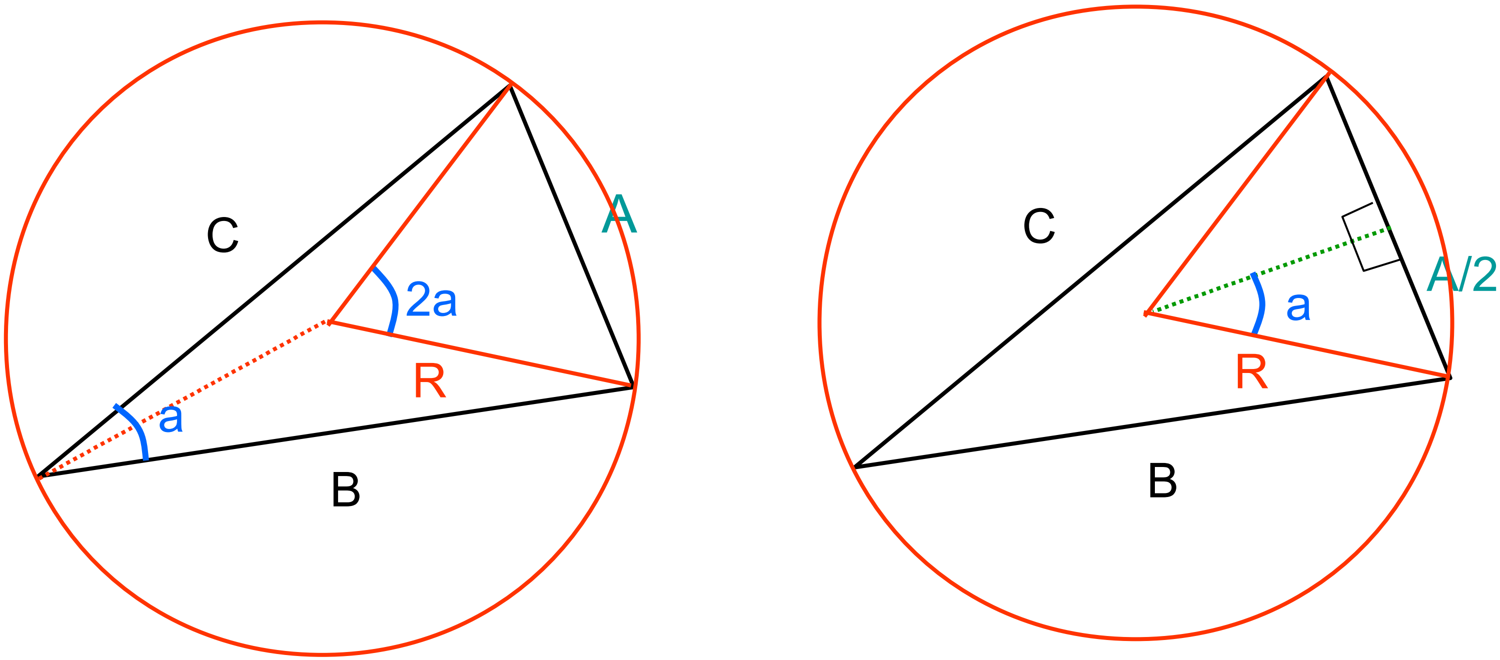
(los senos de los ángulos determinan las razones de los lados)

Corolario.

En cualquier triángulo a un lado mayor le corresponde un ángulo opuesto mayor.

Ley de los senos

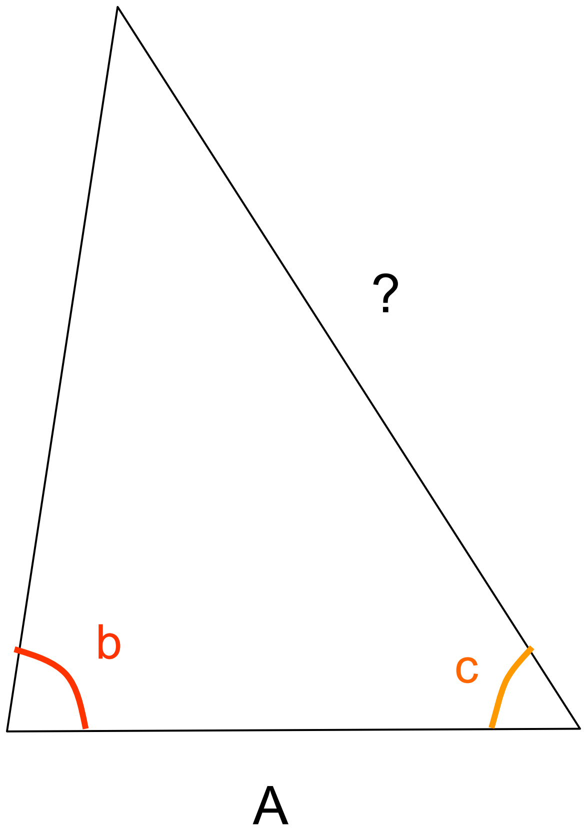
¿Que significado geométrico tiene A / sen a ?

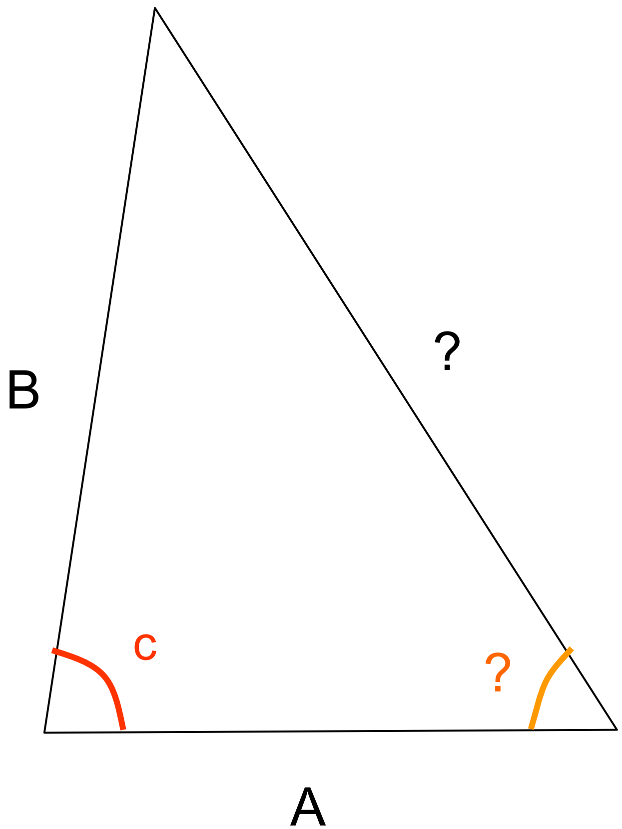


Si R es el radio del círculo circunscrito al triángulo, entonces

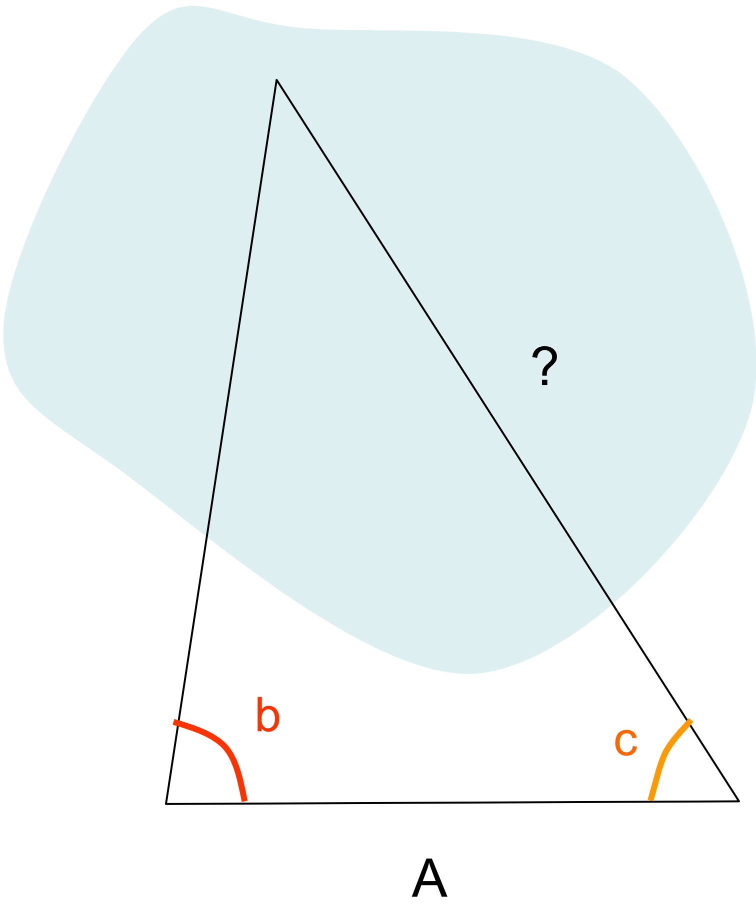
A/2 / R = sen a   así que A / sen a = 2R = diámetro del círculo.

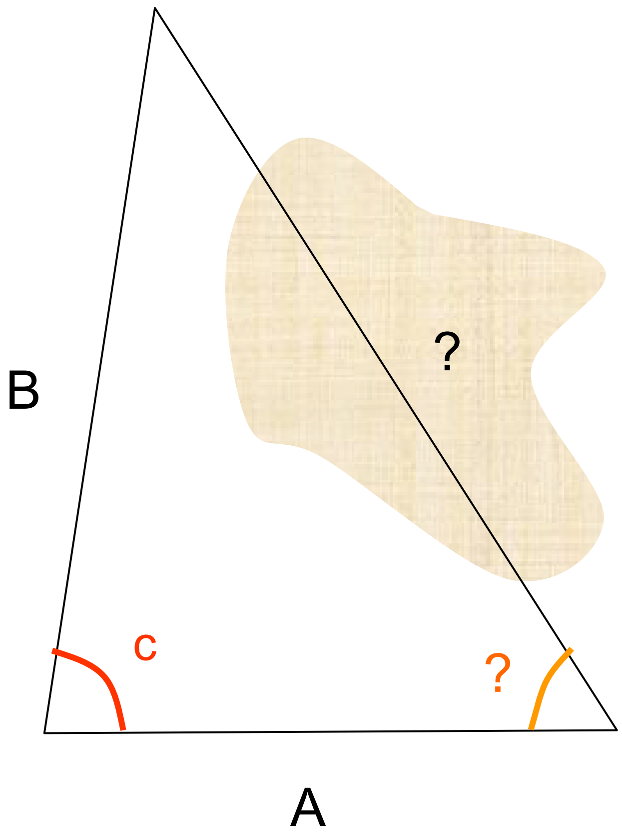
Resolución de triángulos





Resolución de triángulos

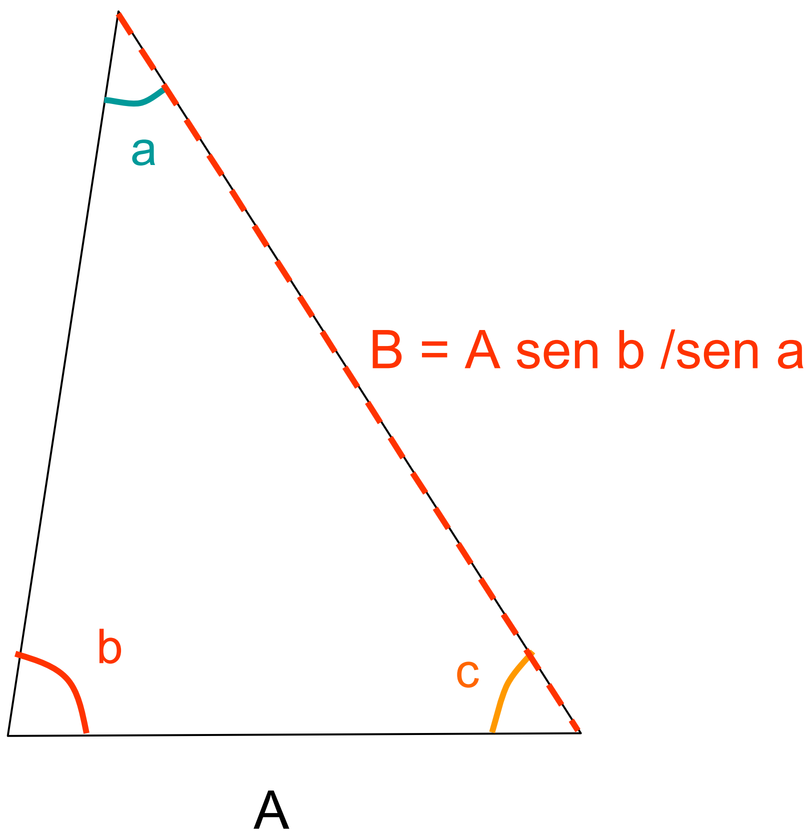




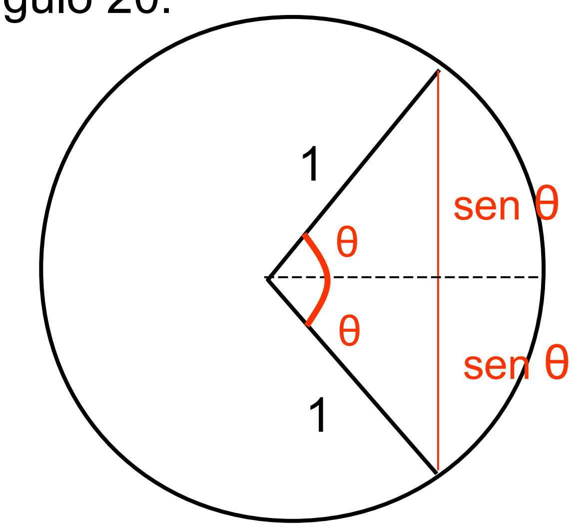
Aplicación: hallar la distancia a un punto inaccesible (geodesia, astronomía)

Aplicación: hallar la distancia entre puntos que no pueden verse directamente entre ellos, hallar la dirección entre los puntos.

Para muchas aplicaciones es necesario saber los valores de senos y cosenos de los ángulos con mucha precisión.



Calcular el seno de un ángulo θ equivale a calcular la longitud de la cuerda corresponde al ángulo 2θ:

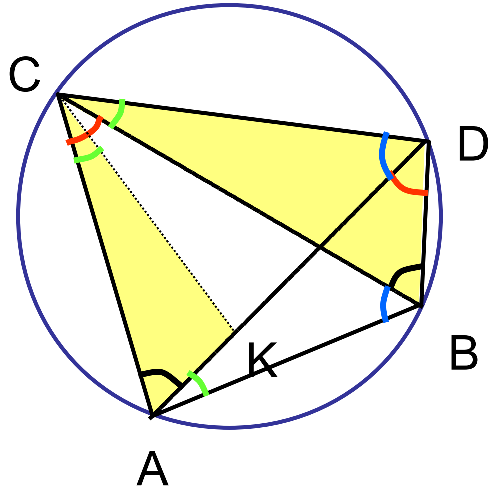


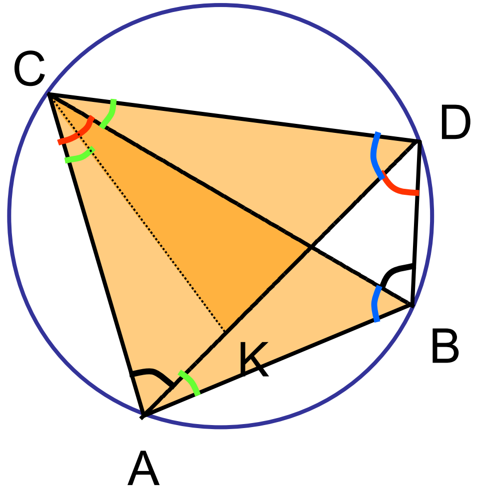
Las primeras tablas de cuerdas fueron calculadas por Ptolomeo hace 2000 años usando el teorema que lleva su nombre:

Teorema de Ptolomeo: *En un cuadrilátero cíclico, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.*

Demostración Sea K un punto en AD tal que <ACK = <BCD entonces

ACK es semejante a BCD: y ACB es semejante a KCD:





AC/AK = BC/BD

AC·BD = AK·BC

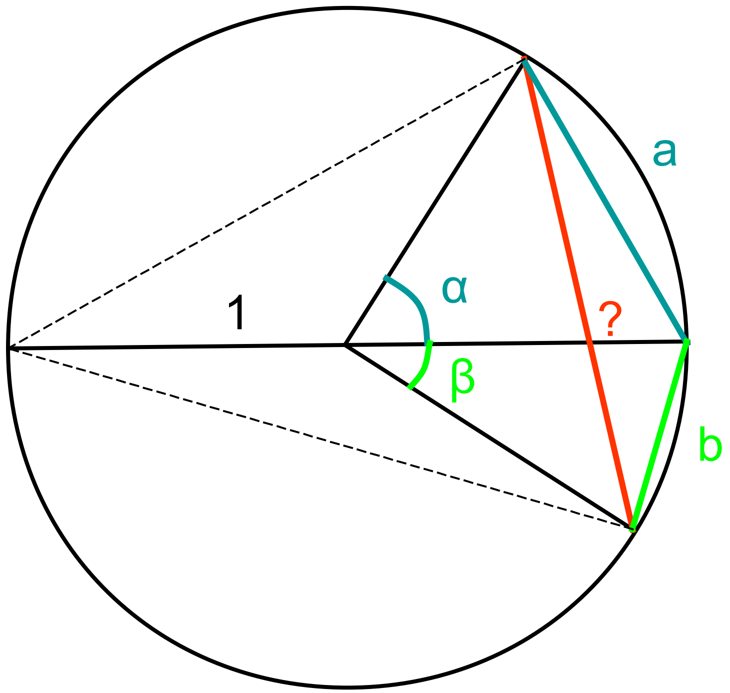
KD/CD = AB/BC

KD·BC=AB·CD

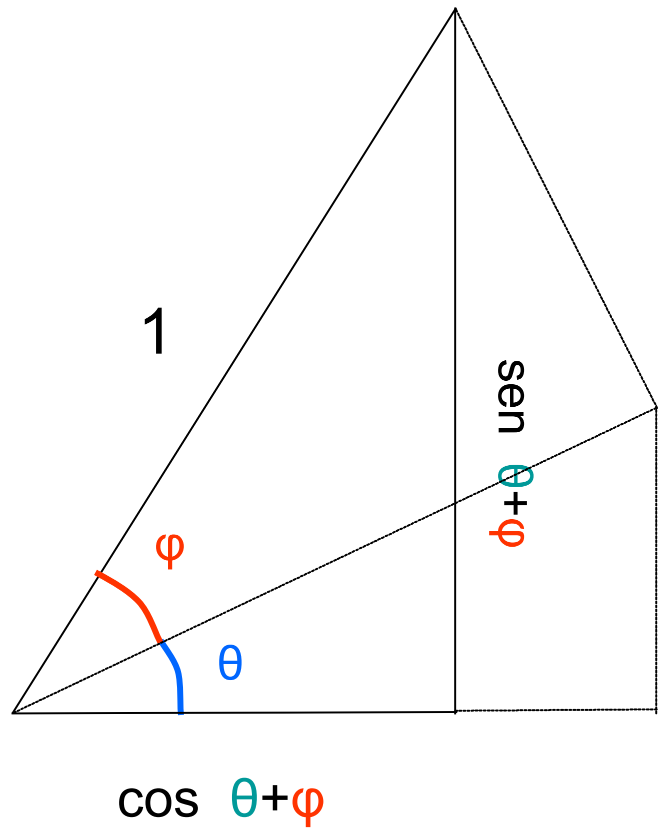
sumando: AC·BD + AB·CD = AK·BC + KD·BC = AD·BC

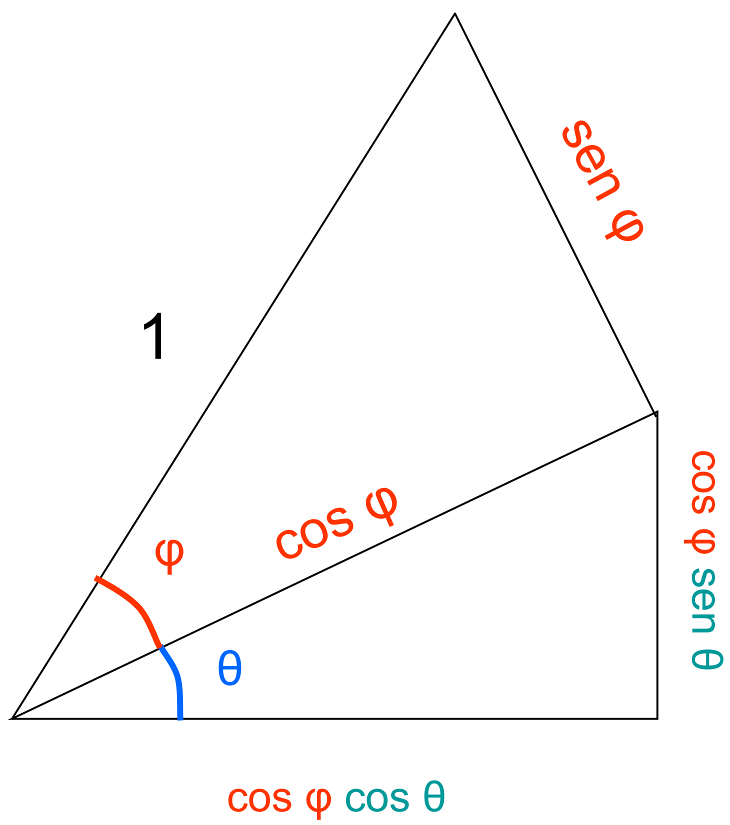
Aplicación del Teorema de Ptolomeo al cálculo de cuerdas

Tarea: Si al ángulo α le corresponde una cuerda a y al ángulo β le corresponde una cuerda b ¿Qué cuerda le corresponde al ángulo α+β ? (usa el Teorema de Ptoloméo)



Seno y coseno de la suma de dos ángulos

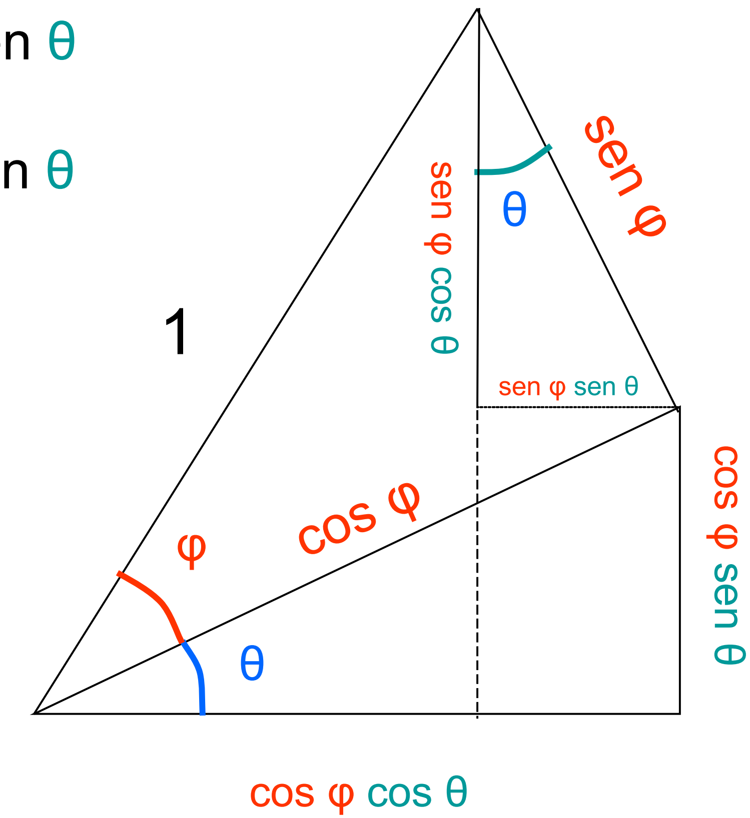




Seno y coseno de la suma de dos ángulos

$\operatorname{sen}(\theta+\varphi) = \operatorname{sen}\varphi \cos\theta + \cos\varphi \operatorname{sen}\theta$

$\cos(\theta+\varphi) = \cos\varphi \cos\theta - \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$

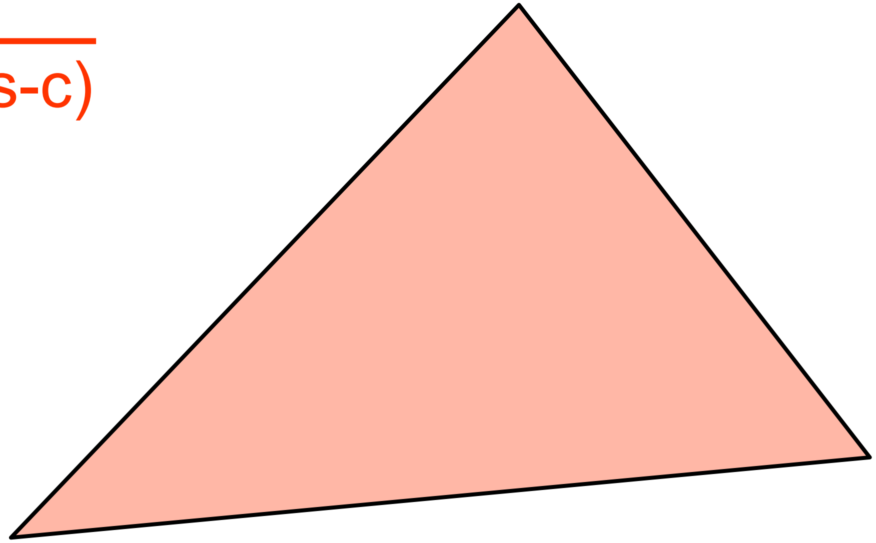


Área de un triángulo

Fórmula de Herón:

El área de un triángulo de lados a, b y c es:

$$\text{Área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$



donde $s = (a+b+c) / 2$

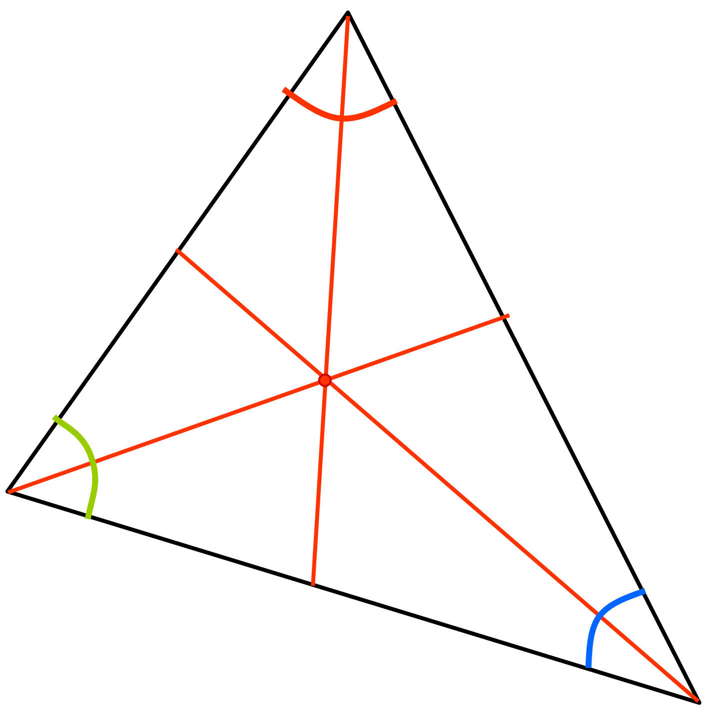
es el *semiperímetro*

del triángulo.

Teoremas de concurrencia

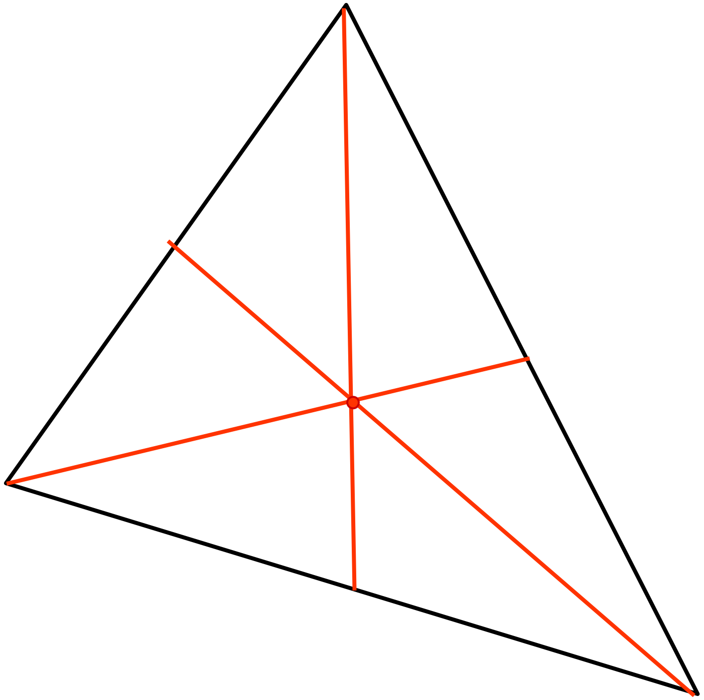
(decimos que unas líneas son concurrentes si todas pasan por el mismo punto)

Teorema. Las bisectrices de un triángulo son concurrentes



Teoremas de concurrencia

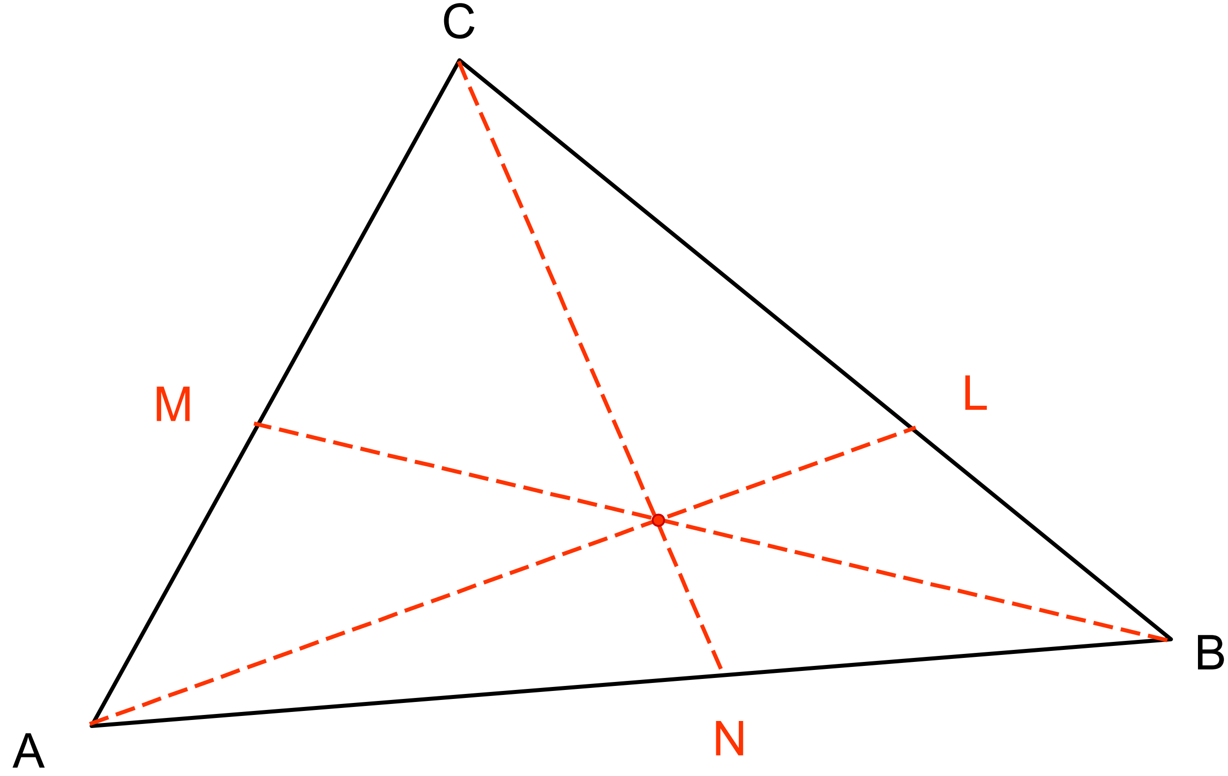
Teorema. Las medianas de un triángulo son concurrentes



Estos dos teoremas clásicos son consecuencia del siguiente:

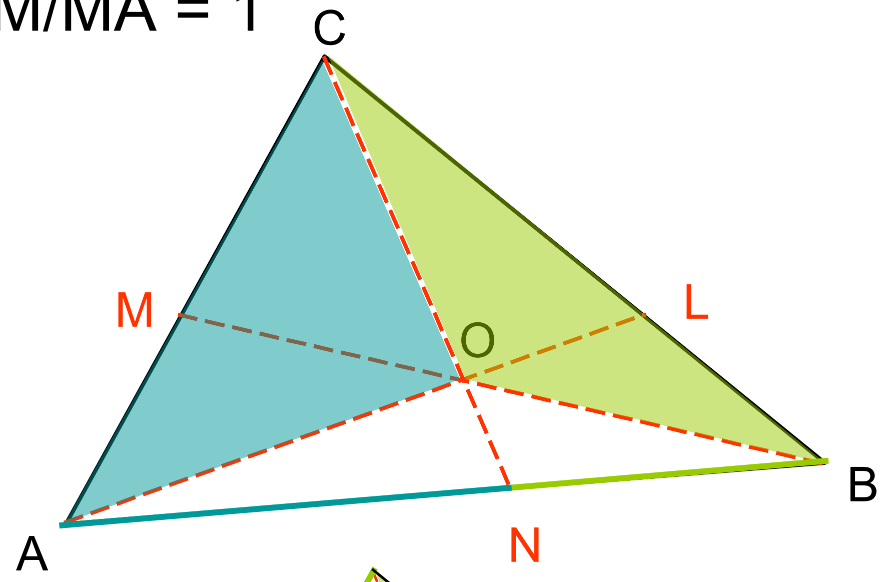
Teorema de Ceva
(~1700)

Teorema. Las líneas AL, BM y CN son concurrentes si y sólo si AN/NB · BL/LC · CM/MA = 1



Teorema de Ceva

Teorema. Las líneas AL, BM y CN son concurrentes si y sólo si $AN/NB \cdot BL/LC \cdot CM/MA = 1$



Demostración.(→)

Si las líneas son concurrentes

$AN/NB = AON/NOB = ACN/NCB$

Así que

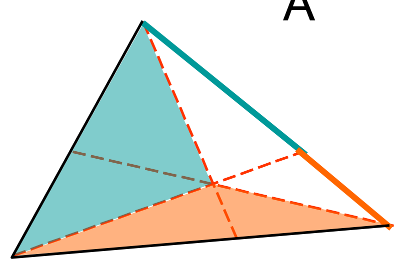
$AN/NB = AOC/BOC$

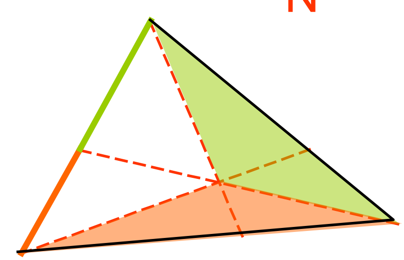
(la razón entre los segmentos es la razón entre las áreas).

Análogamente:

$BL/LC = AOB/AOC$

$CM/MA = BOC/AOB$



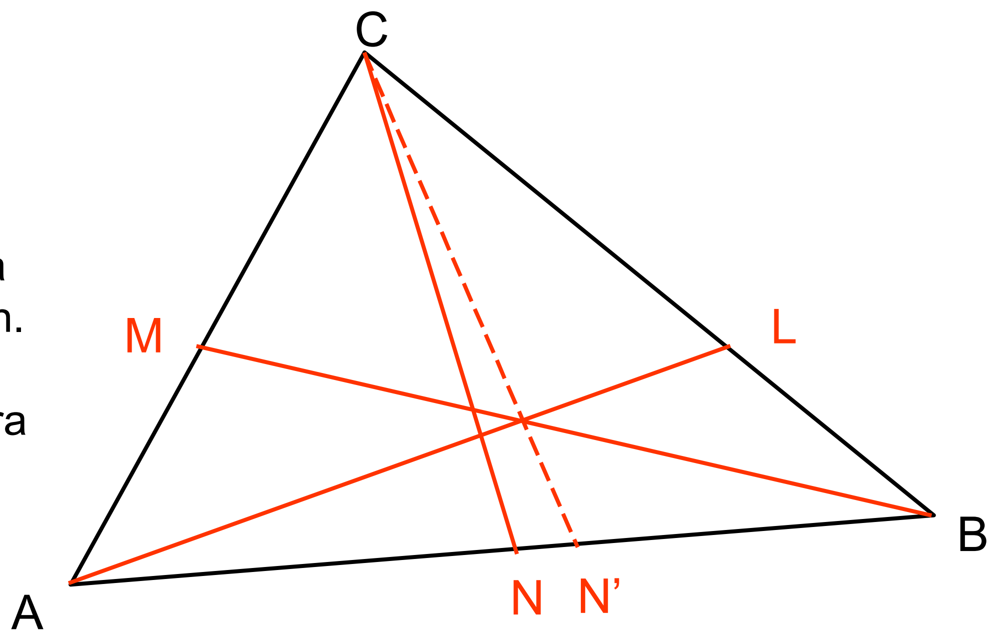


Así que

$AN/NB \cdot BL/LC \cdot CM/MA = AOC/BOC \cdot AOB/AOC \cdot BOC/AOB = 1$

Teorema de Ceva

Teorema. Las líneas AL, BM y CN son concurrentes si y sólo si AN/NB · BL/LC · CM/MA = 1



Demostración. (←)

Supongamos ahora que la igualdad se da pero las líneas AL, BM y CN no concurren.

Si dibujamos CN' de modo que sí concurra con AL y BM, entonces por hipótesis:

AN/NB · BL/LC · CM/MA = 1

y por la parte que ya demostramos del teorema también se cumple:

AN'/N'B · BL/LC · CM/MA = 1.

Pero no es posible que las dos igualdades se den, ya que AN/NB ≠ AN'/N'B si N ≠ N'

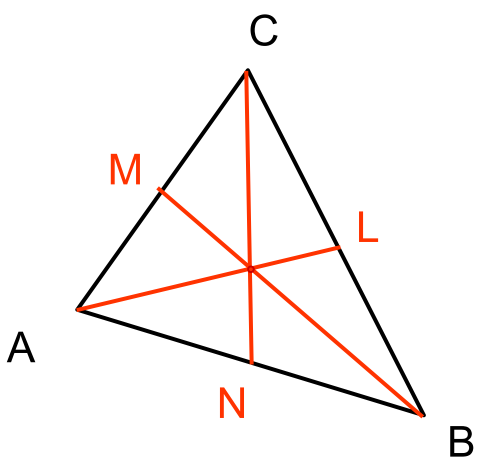
Corolario. Las medianas de un triángulo son concurrentes

Dem. Como AL, BM y CN son medianas,

AN =NB, BL=LC, CM=MA

Así que

AN/NB · BL/LC · CM/MA = 1



Corolario. Las bisectrices de un triángulo son concurrentes

Dem. Como AL, BM y CN son bisectrices,

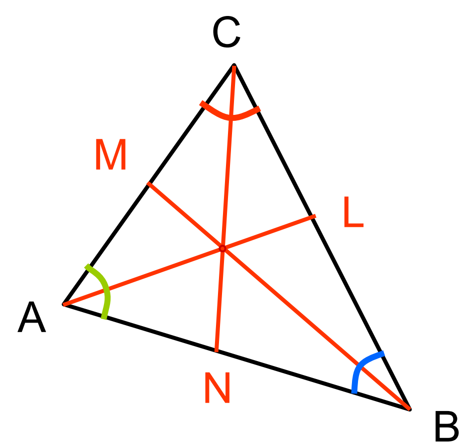
AN/NB=AC/BC

BL/LC=AB/AC

CM/MA=BC/AB

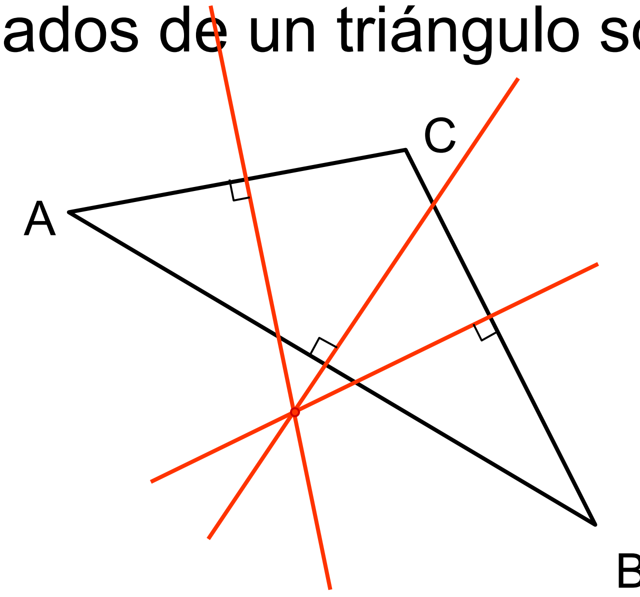
Así que

AN/NB · BL/LC · CM/MA = AC/BC · AB/AC · BC/AB = 1



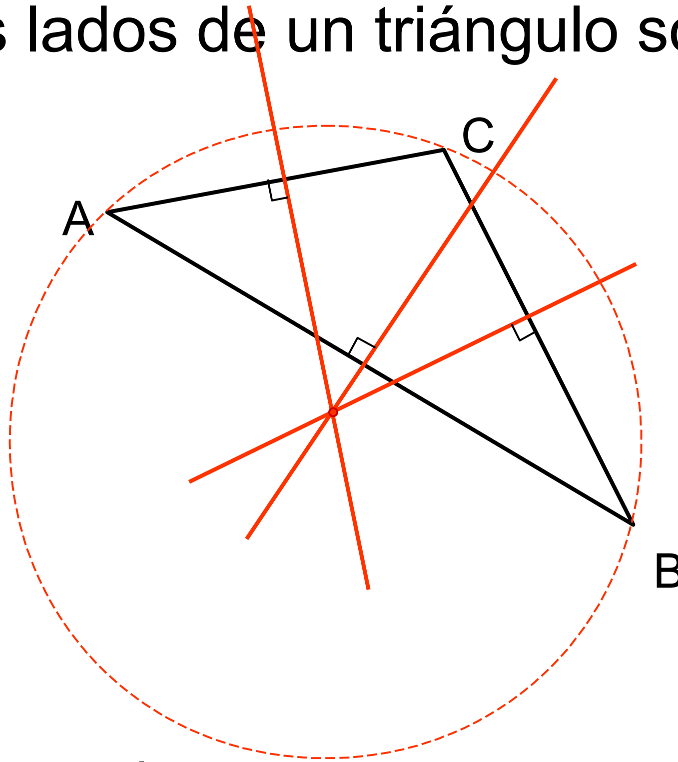
La *mediatriz* de un segmento AB es la línea perpendicular al segmento que pasa por su punto medio. Está formada por los puntos del plano que están ala misma distancia de A y de B.

Teorema. Las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes



La *mediatriz* de un segmento AB es la línea perpendicular al segmento que pasa por su punto medio. Está formada por los puntos del plano que están ala misma distancia de A y de B.

Teorema. Las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes

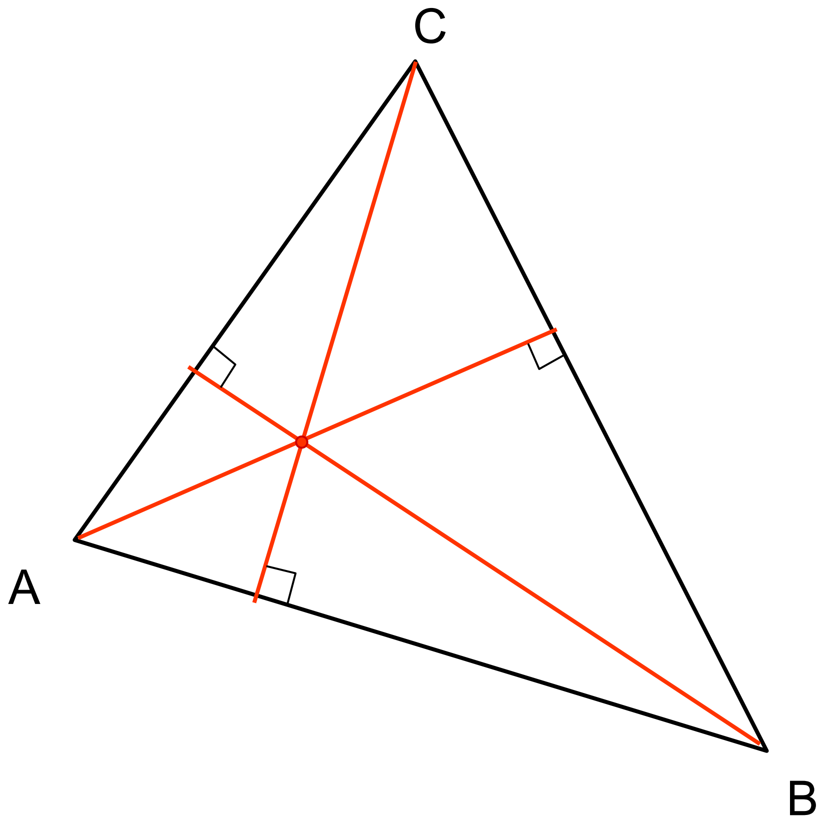


Demostración.

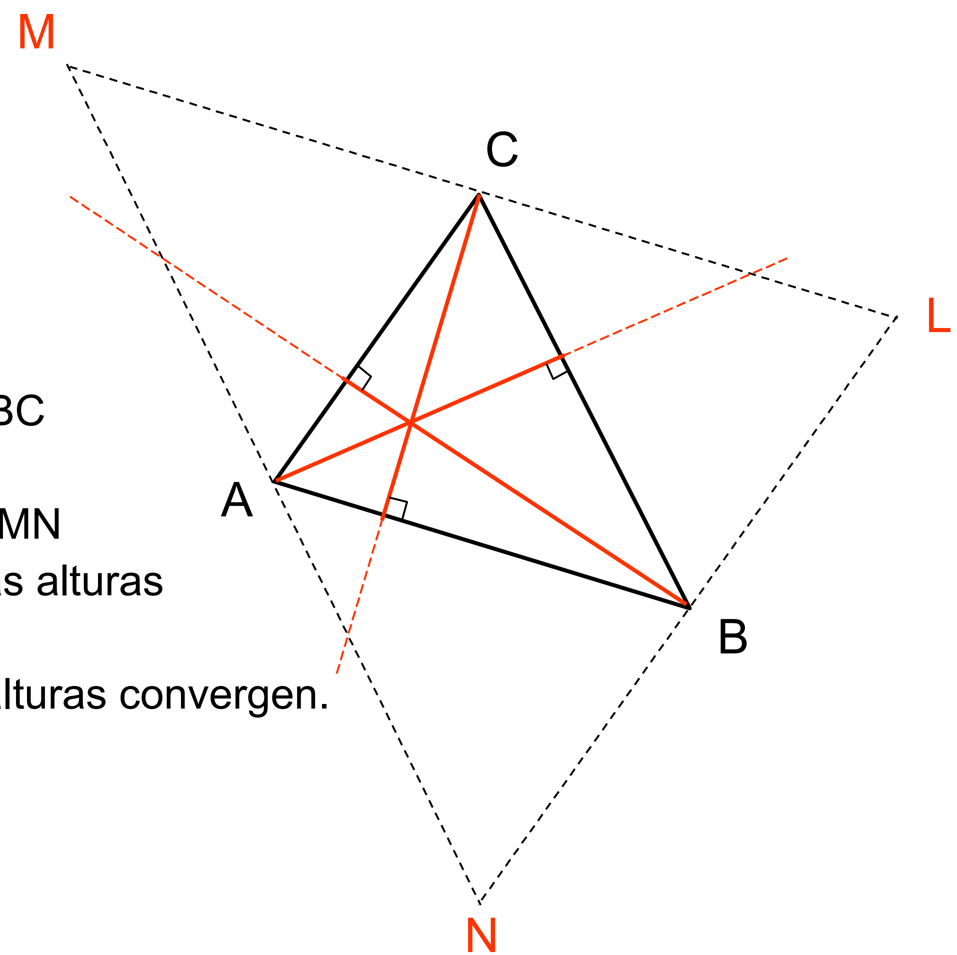
Dos mediatrices de los lados de un triángulo se intersectan en un punto que está a la misma distancia de los tres vértices, así que este punto esta en la mediatriz del tercer lado

El punto de intersección de las 3 mediatrices es el centro del circulo que pasa por los 3 vértices (el *círculo circunscrito)*.

Corolario. Las alturas de un triángulo son concurrentes



Corolario. Las alturas de un triángulo son concurrentes

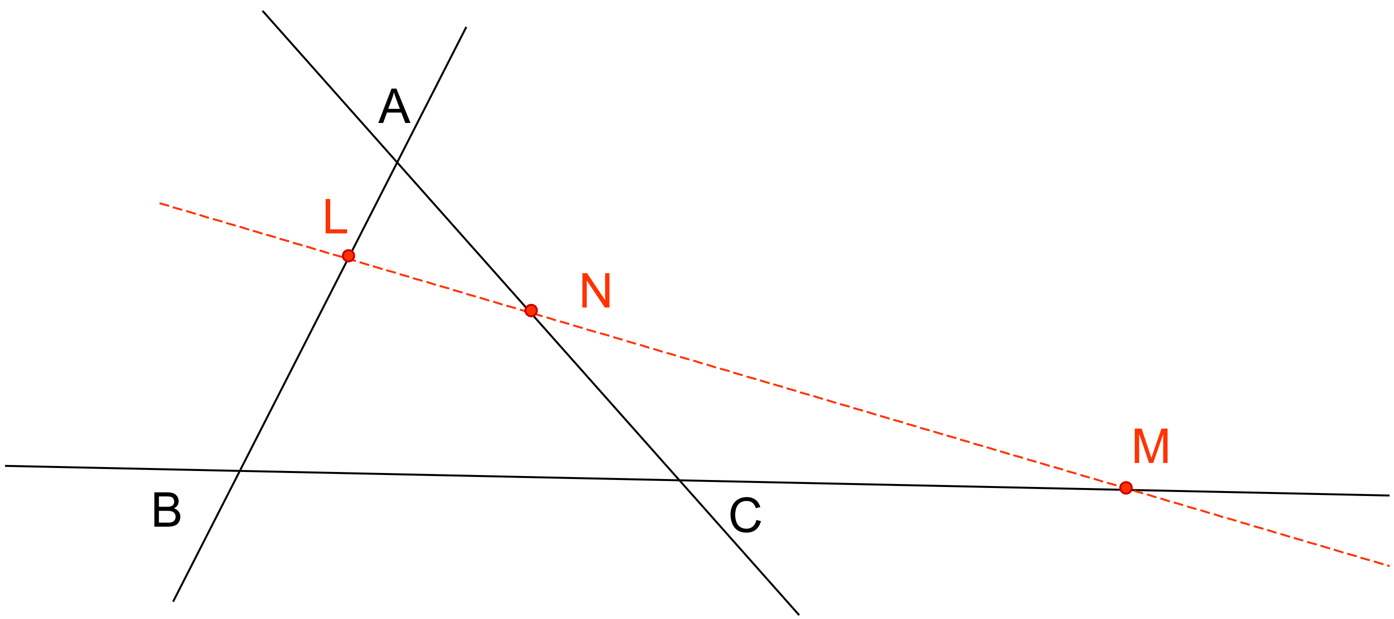


Demostración.

Dibujar por los vértices del triángulo ABC
líneas paralelas a los lados opuestos.
Estas líneas determinan un triángulo LMN
que es semejante al triángulo ABC y las alturas
de ABC son las mediatrices de LMN.
Como las mediatrices convergen, las alturas convergen.

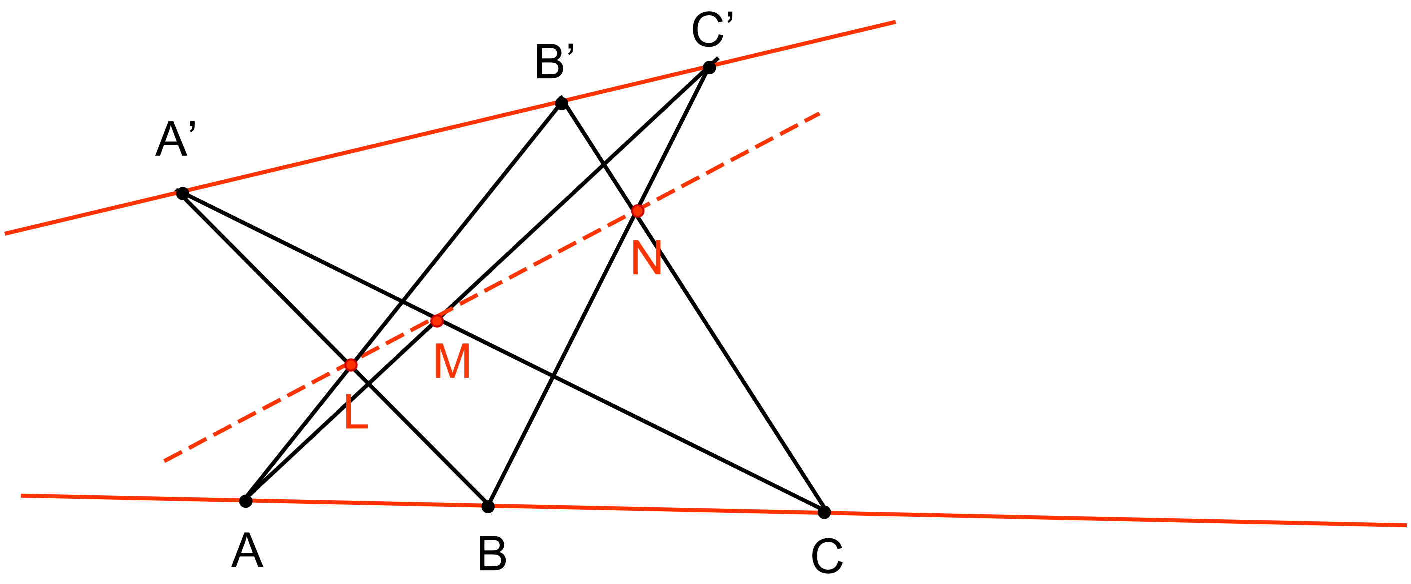
Teorema de Menelao

Teorema. Si L, M y N son puntos en los lados extendidos de un triángulo ABC, entonces L, M y N están alineados si y sólo si $AL/LB \cdot BM/MC \cdot CN/NA = -1$



Teorema de Pappus

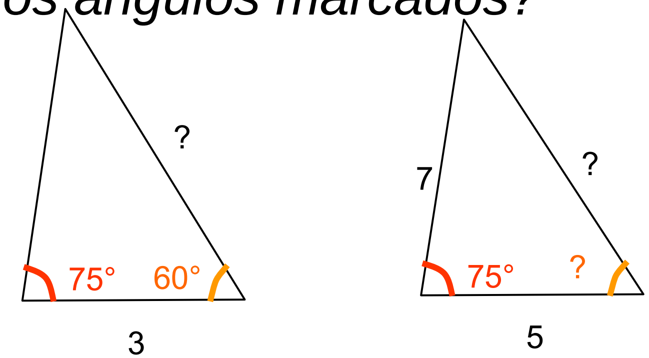
Teorema. Si los puntos A, B y C están alineados y los puntos A´, B´ y C' están alineados, entonces los puntos AB'∩A'B, BC'∩B'C y AC'∩A'C también están alineados.



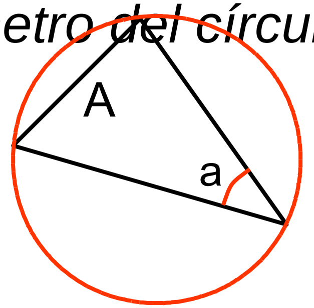
TAREA 5

1. *Calcula la cuerda correspondiente a la suma de dos ángulos a partir de las cuerdas correspondientes a los ángulos.*

2. *¿Cuánto miden los lados y los ángulos marcados?*



3. *¿Puedes demostrar que el diámetro del círculo circunscrito al triángulo es A/sena?*



Clase 6

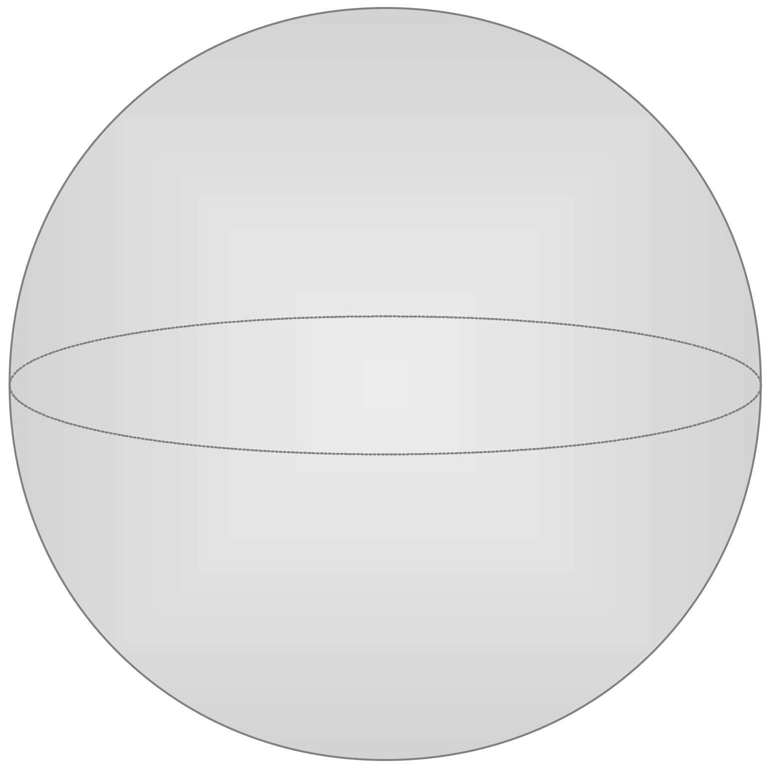
Geometría esférica

“Si la Tierra fuera plana de este a oeste, las estrellas se levantarían tan pronto para los occidentales como para los orientales, lo cual es falso. Además, si la Tierra fuera plana de norte a sur y viceversa, las estrellas que fueran visibles para alguien seguirán viéndose donde quiera que vaya, lo cual es falso. Pero parece plana a la vista humana, porque es muy extensa …”

Ptolomeo, el Almagesto

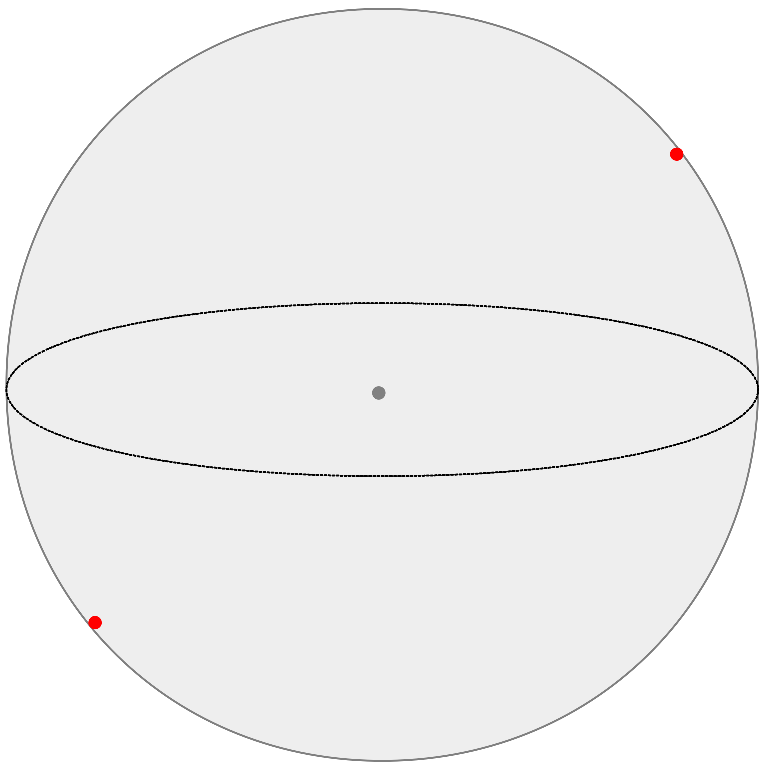
La esfera

Consideremos la *superficie* de una esfera:



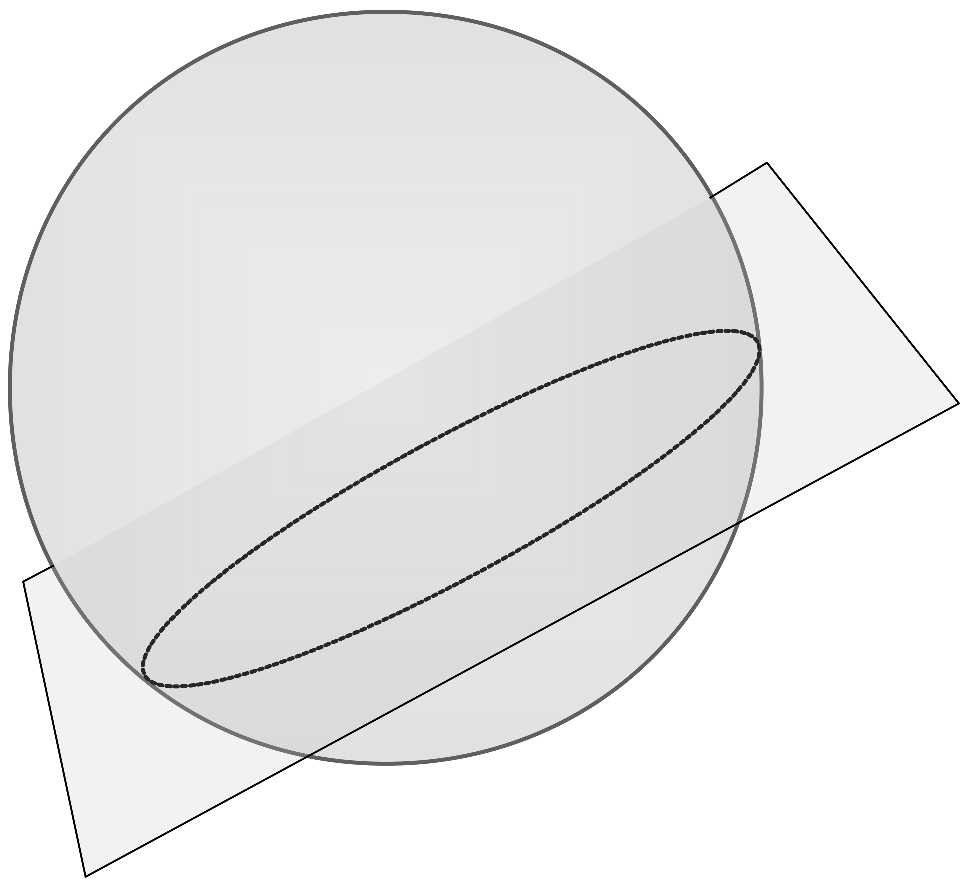
La esfera

Dos puntos en la esfera se llaman *antípodas* si son diametralmente opuestos.



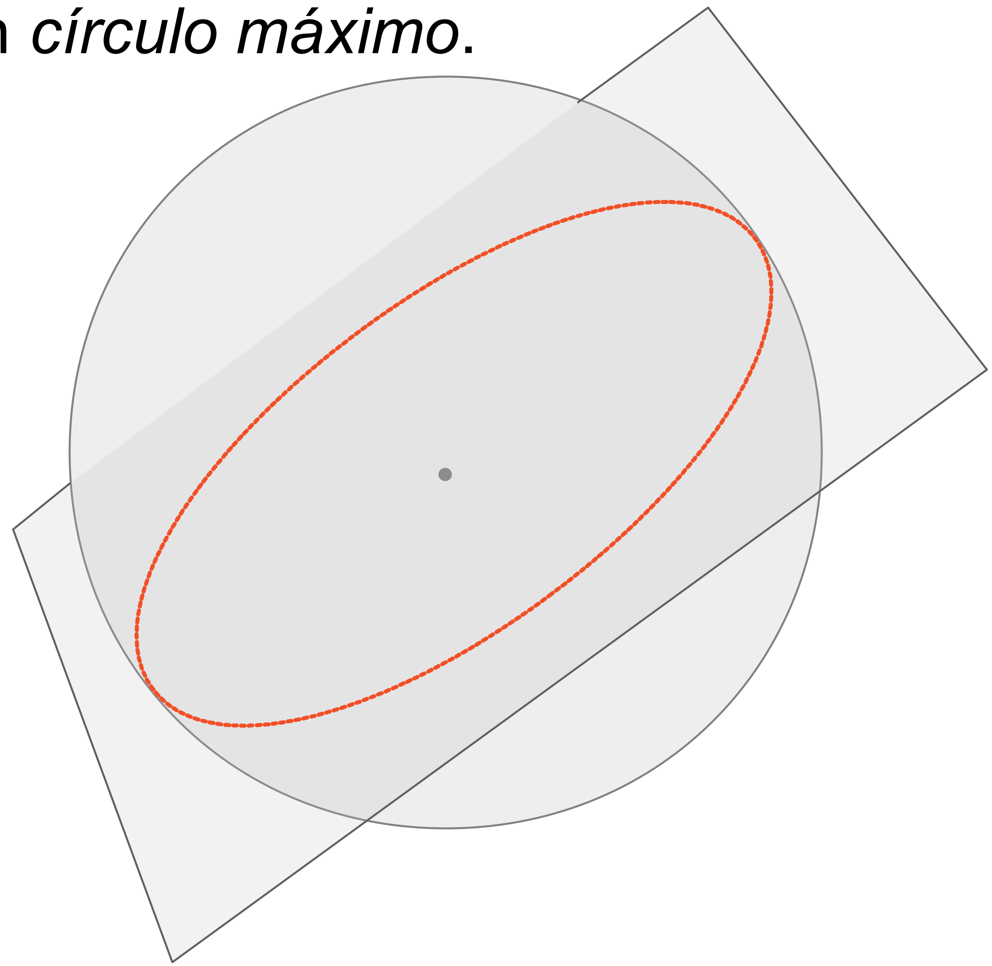
La esfera

La intersección de la esfera con un plano es un círculo:



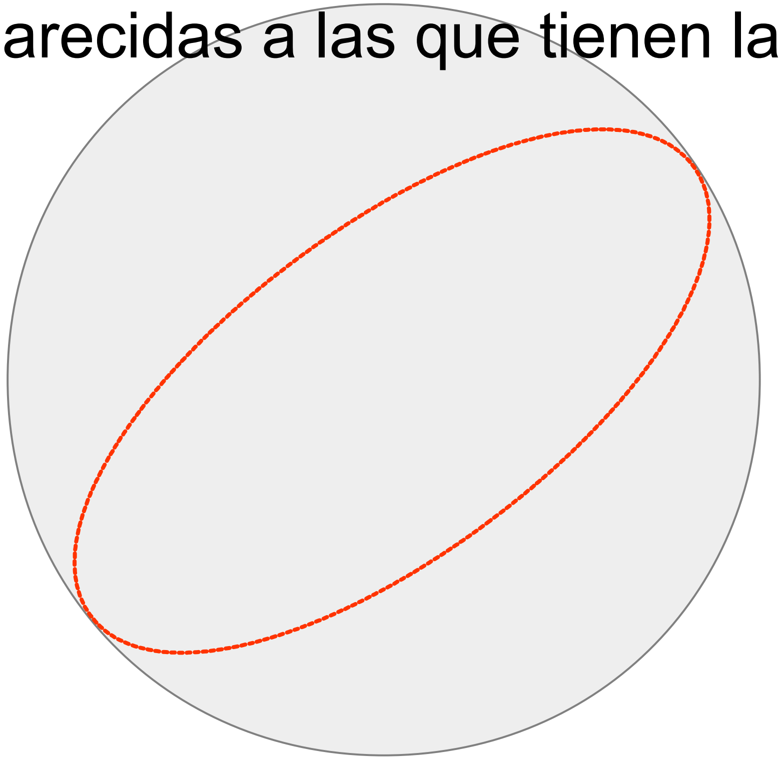
La esfera

La intersección de la esfera con un plano que pasa por su centro es un *círculo máximo*.



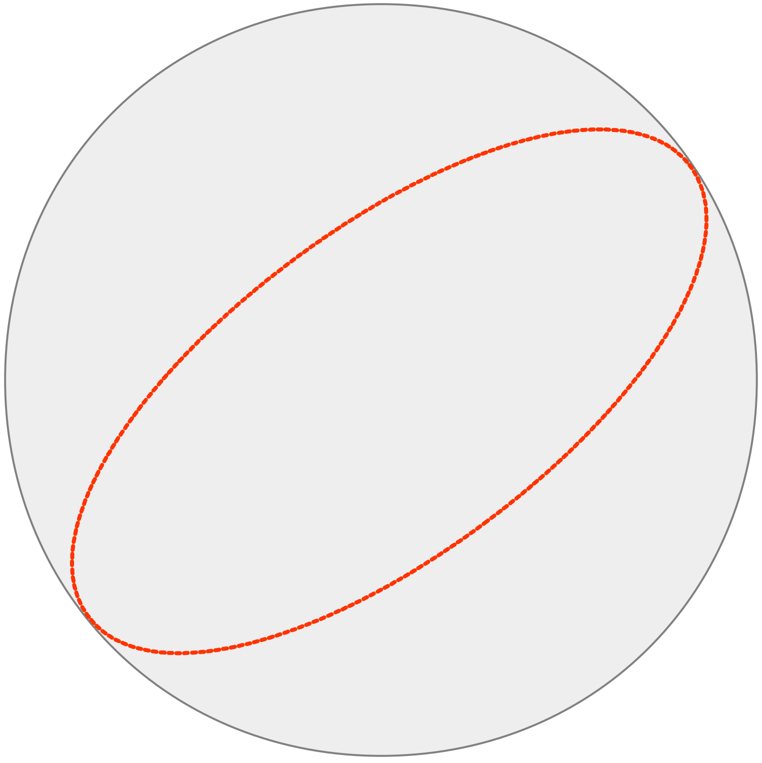
La esfera

En la esfera no hay líneas rectas, pero si pensamos en los círculos máximos como “líneas”, obtenemos algunas propiedades parecidas a las que tienen las líneas rectas en el plano:



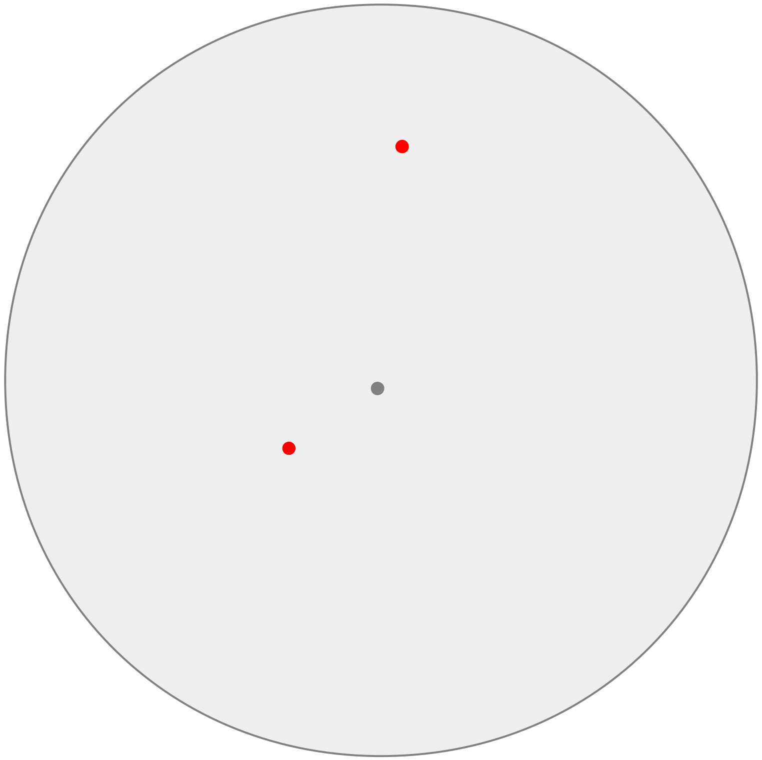
La esfera

La geometría de la esfera es importante por sus aplicaciones a la navegación y a la astronomía.



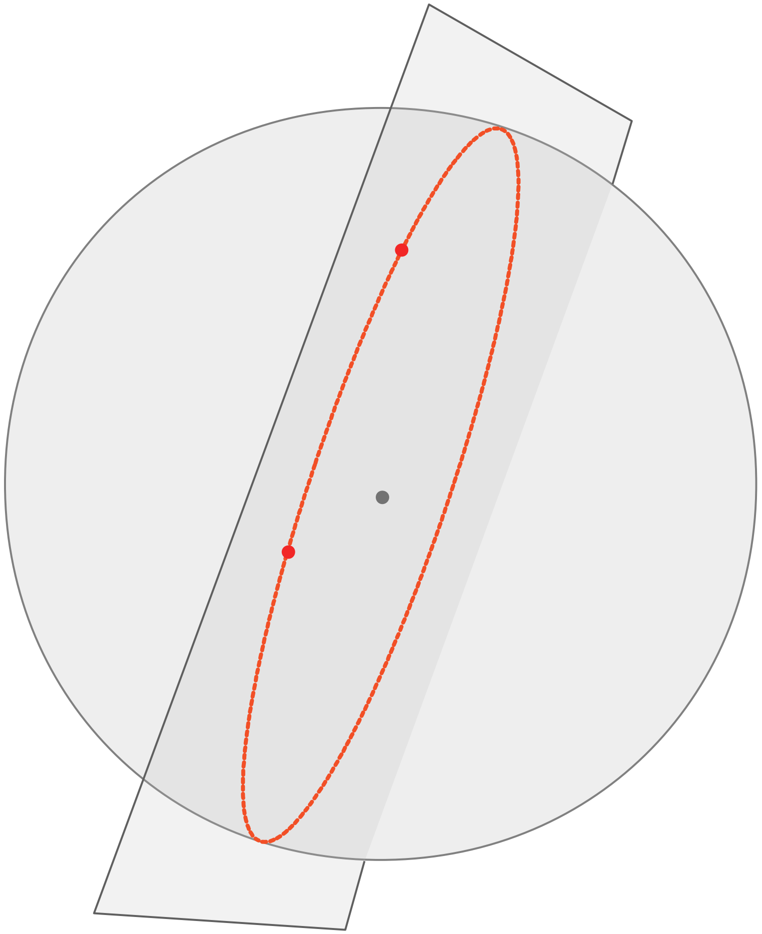
La esfera

Por dos puntos de la esfera que no sean antípodas pasa una única “línea”



La esfera

Por dos puntos de la esfera que no sean antípodas pasa una única "línea"

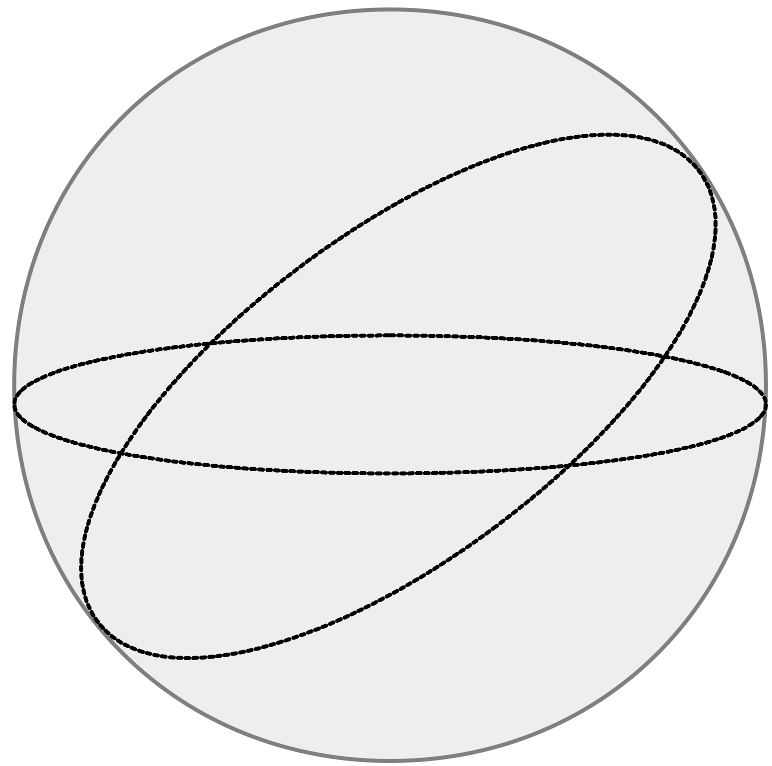


Demostración.

Por dos puntos de la esfera que no sean antípodas pasa un único círculo máximo ya que por dos puntos no antípodas y el centro pasa un solo plano (pero por dos puntos antípodas pasan una infinidad de círculos máximos).

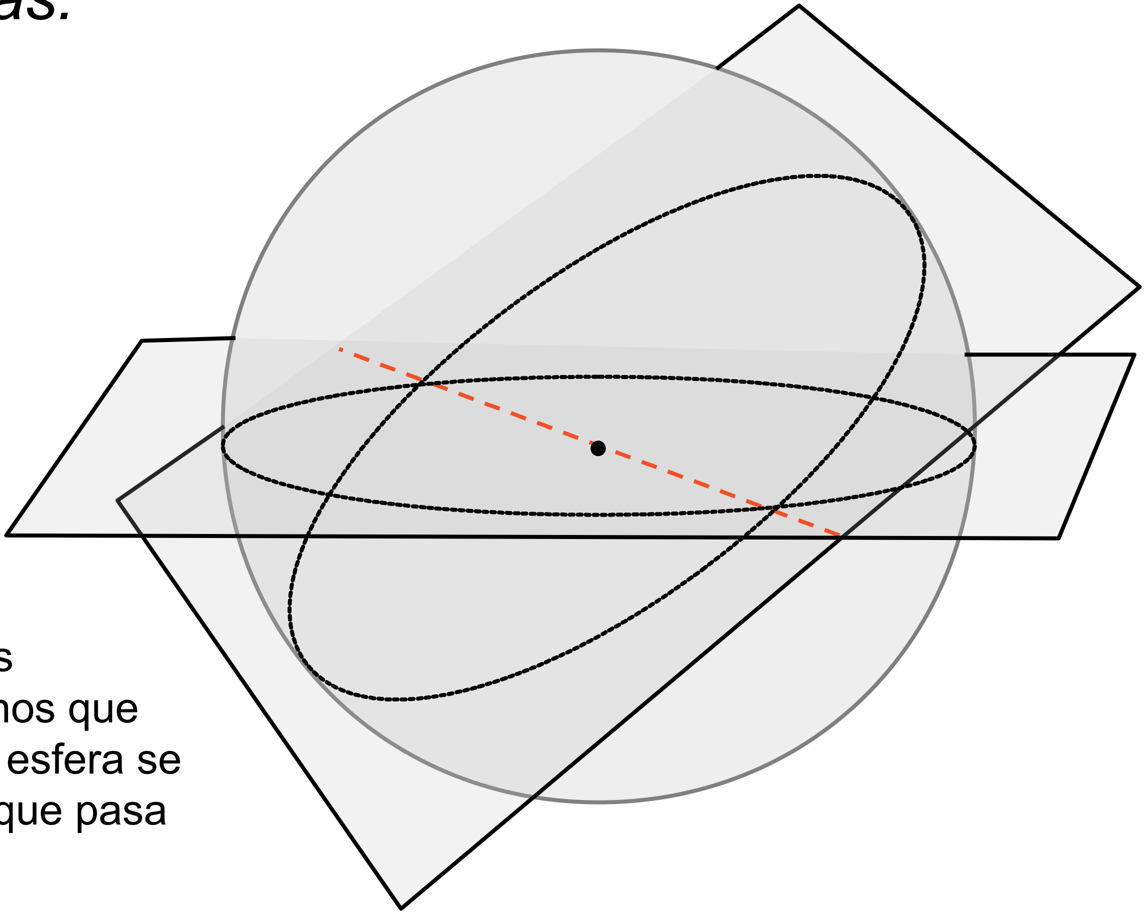
La esfera

Dos "líneas" distintas en la esfera se intersectan en dos puntos antípodas.



La esfera

Dos “líneas” distintas en la esfera se intersectan en dos puntos antípodas.

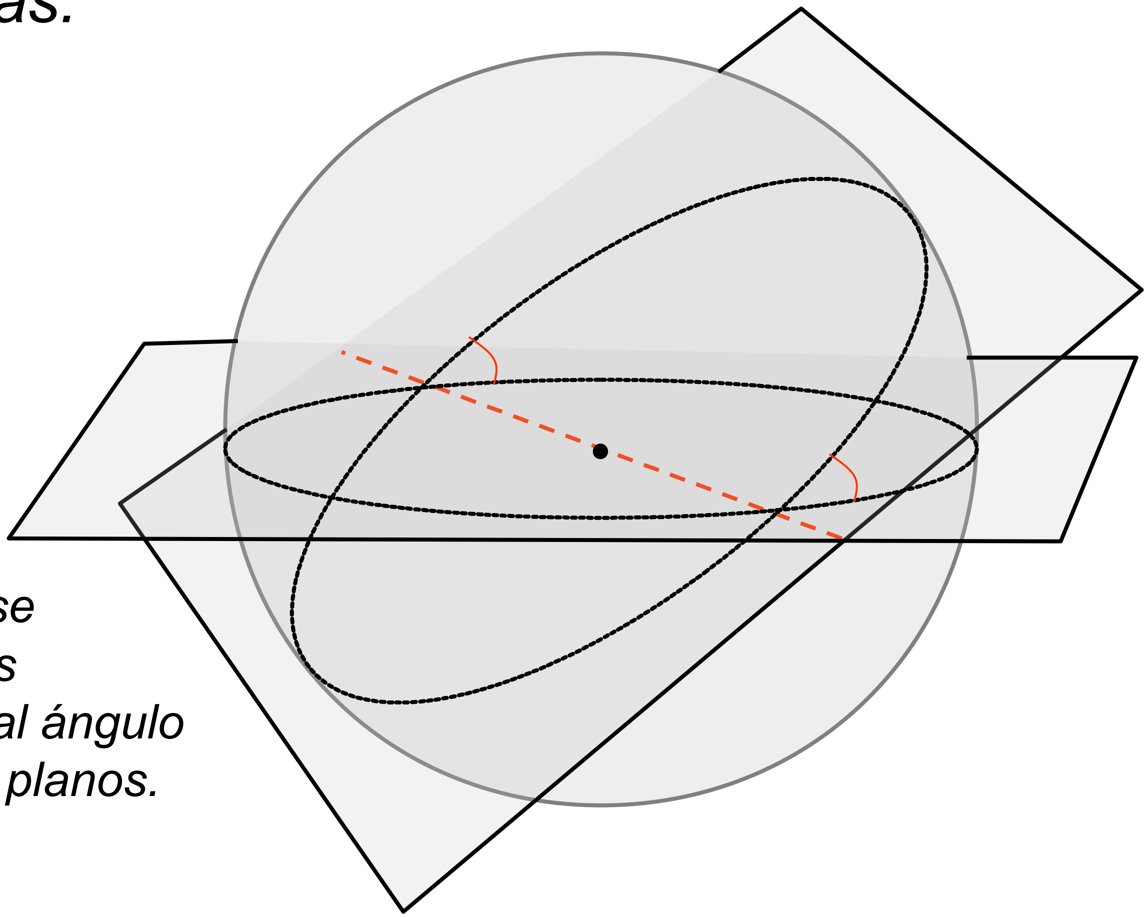


Demostración.

Dos círculos máximos se intersectan en dos puntos antípodas ya que los planos que pasan por el centro de la esfera se intersectan en una línea que pasa por el centro.

La esfera

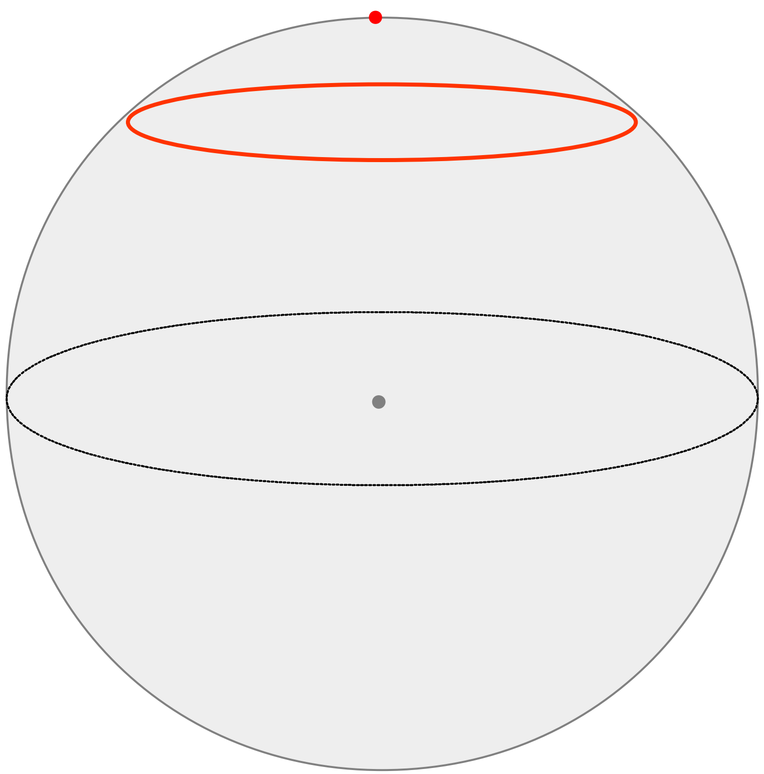
Dos "líneas" distintas en la esfera se intersectan en dos puntos antípodas.



Los ángulos con que se intersectan los círculos máximos son iguales al ángulo de intersección de los planos.

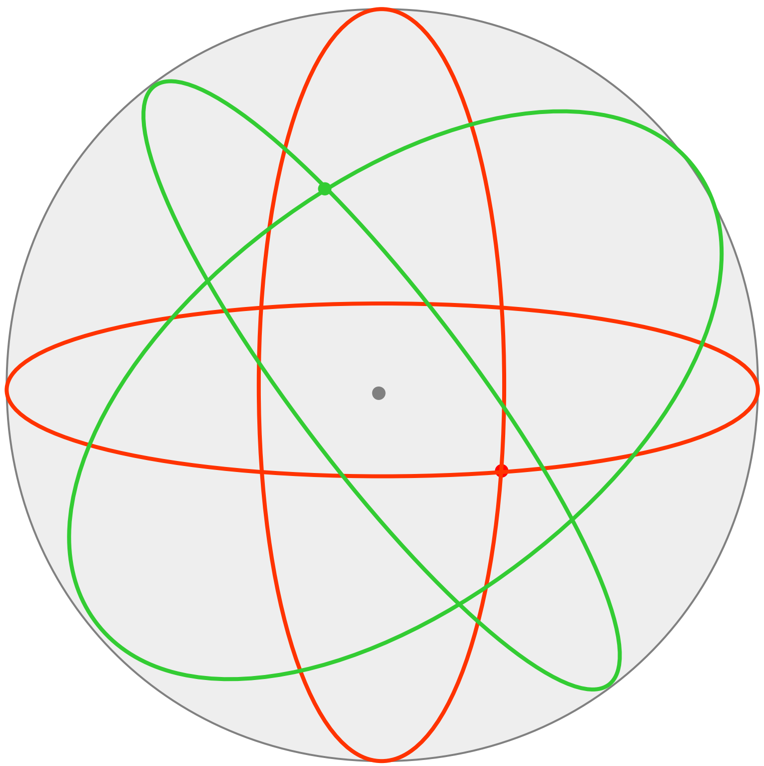
La esfera

Se puede trazar un círculo con cualquier centro y que pase por cualquier otro punto.



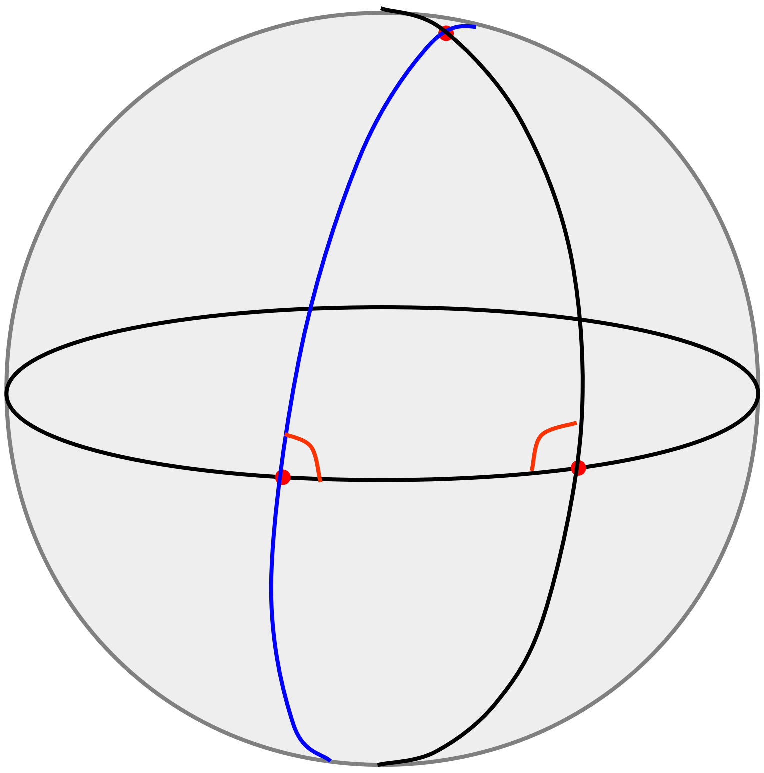
La esfera

Todos los ángulos rectos son iguales



La esfera

Si dos líneas cruzan a otra línea formando ángulos internos que suman menos de dos rectos, las líneas se cruzan de ese lado.

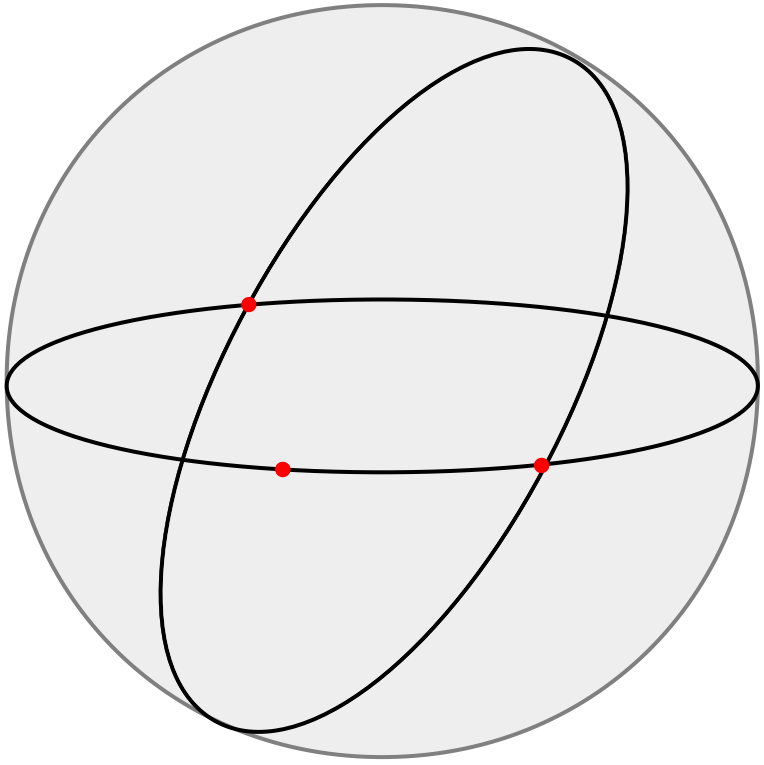


(Todos los círculos máximos se cruzan)

La esfera

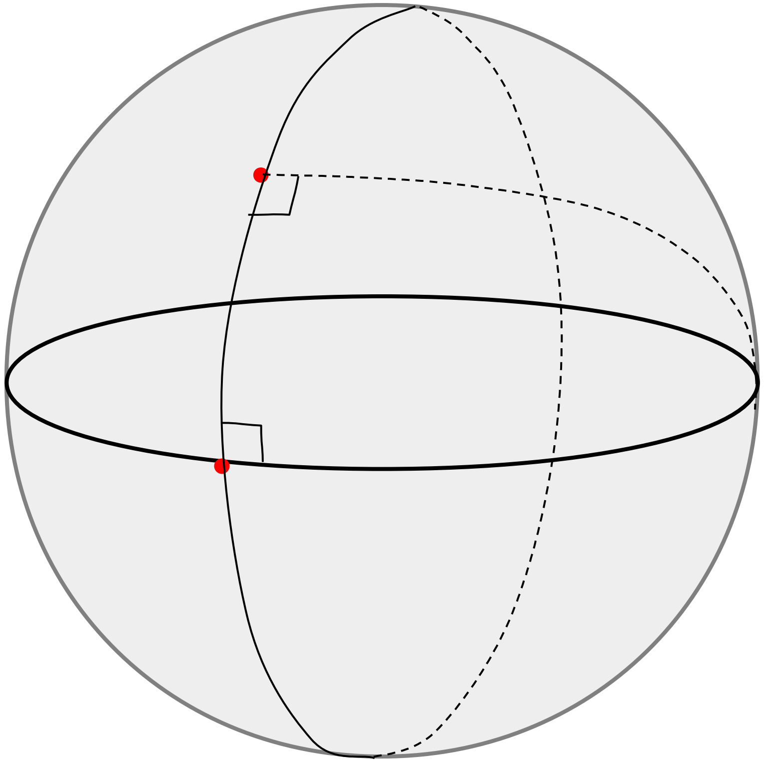
Las "líneas" en la esfera casi cumplen con los postulados de las líneas en el plano.

¿Cuáles de los resultados de la geometría plana serán ciertos en la geometría esférica y cuales no?



La esfera

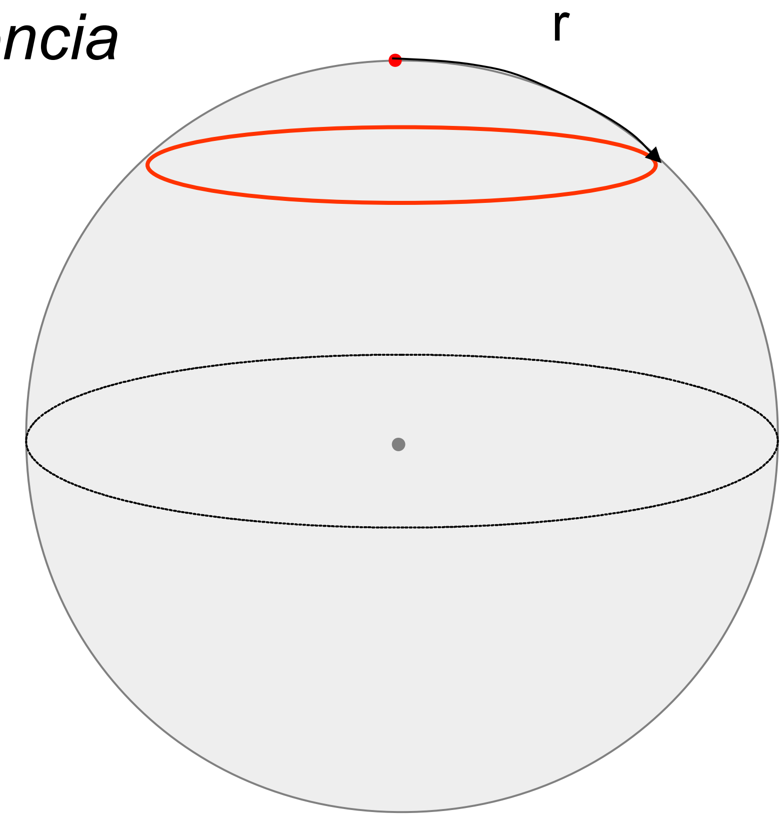
En la esfera se pueden trazar perpendiculares, pero se pueden trazar paralelas.



La esfera

En la esfera, un círculo de radio r tiene circunferencia

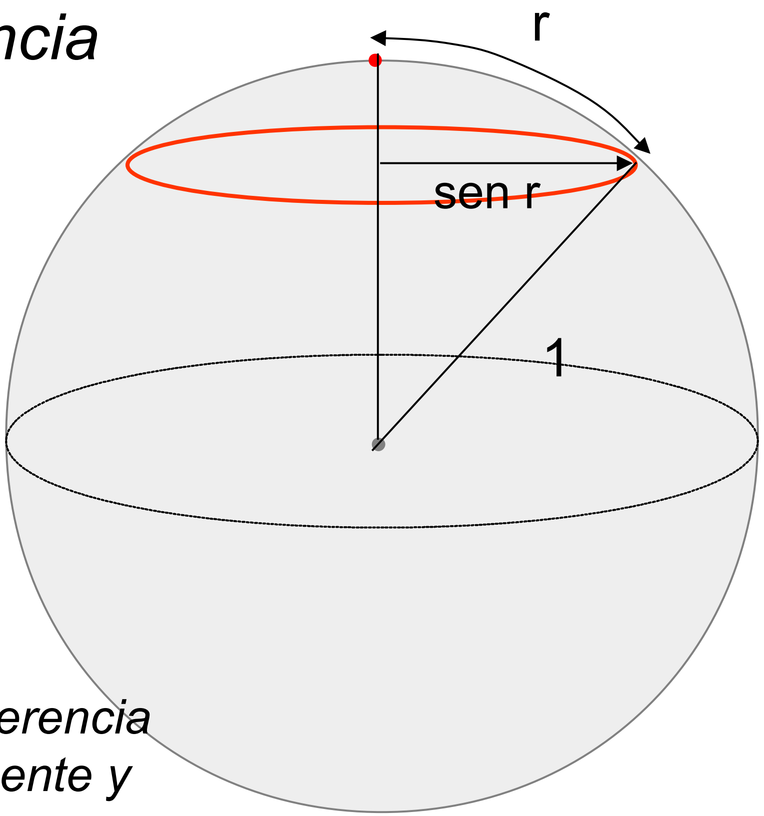
$$C = 2\pi \text{ sen } r$$



La esfera

En la esfera, un círculo de radio r tiene circunferencia

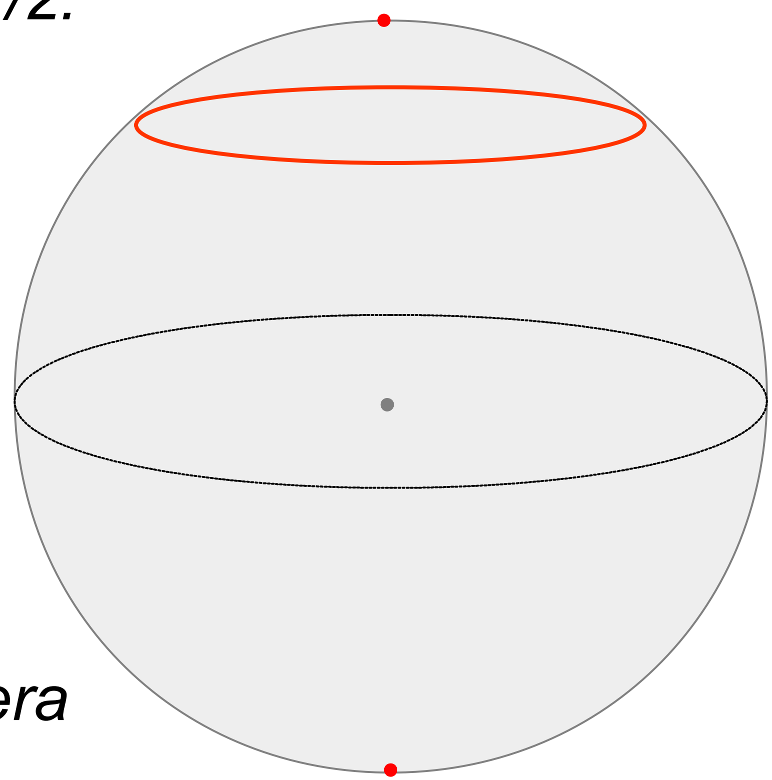
$$C = 2\pi \operatorname{sen} r$$



Al aumentar el radio, la circunferencia aumenta cada vez mas lentamente y luego disminuye.

La esfera

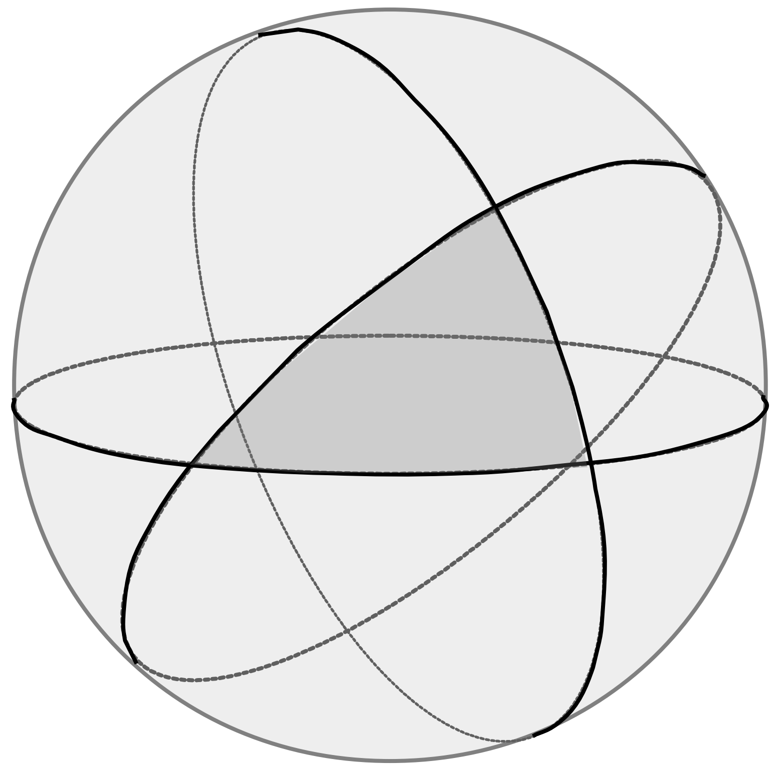
Las líneas en la esfera son círculos de radio $\pi/2$.



¡Los círculos en la esfera tienen dos centros !

Triángulos esféricos

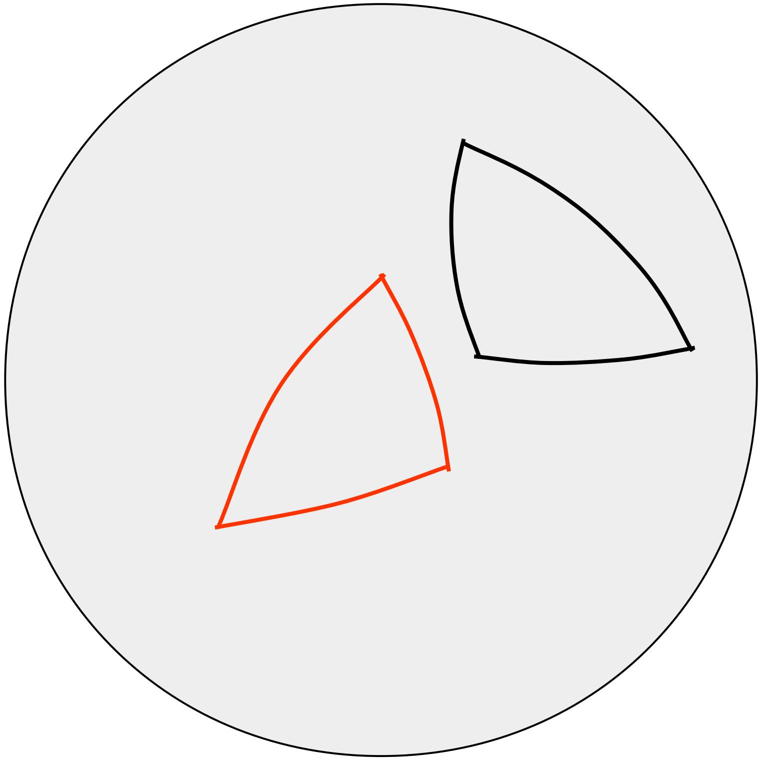
Determinados por 3 arcos de círculos máximos



(asumiremos que los lados tienen longitud menor que π o equivalentemente que los ángulos internos son menores que π).

Triángulos esféricos

Si dos triángulos esféricos tienen lados iguales, sus ángulos correspondientes son iguales.

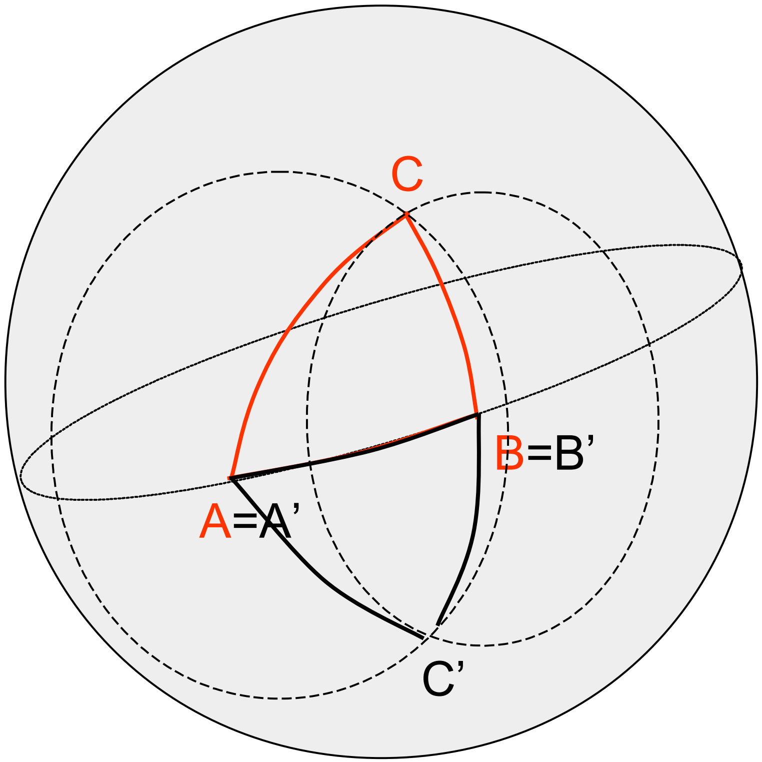


Triángulos esféricos

Si dos triángulos esféricos tienen lados iguales, sus ángulos correspondientes son iguales.

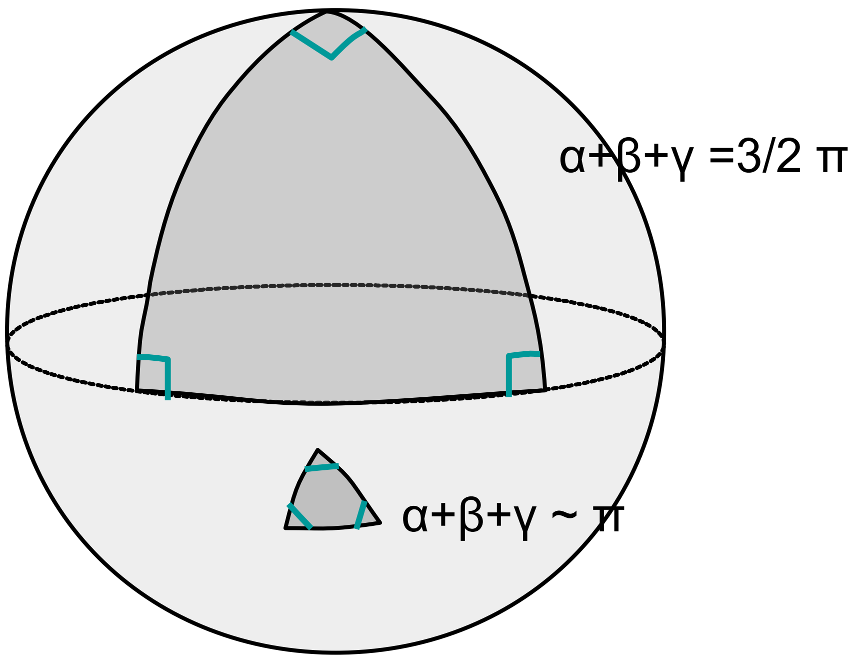
Demostración.

Si los triángulos ABC y A'B´C' tienen lados correspondientes iguales, podemos mover a A'B'C' para que A' coincida con A y B' coincida con B. Ahora C y C' están a la misma distancia de A y también de B, por lo que deben estar en la intersección de dos círculos. Así C' coincide con C o con el punto simétrico a C del otro lado de AB.



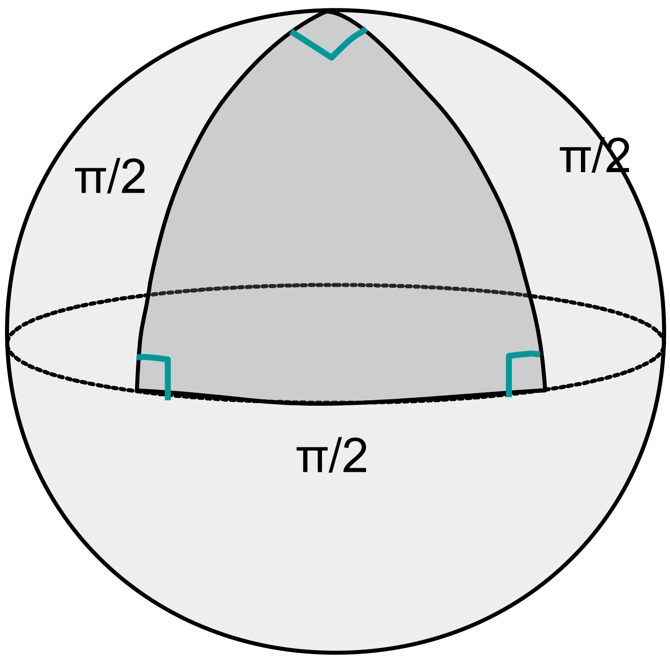
Triángulos esféricos

La suma de los ángulos internos de un triángulo esférico depende del triángulo.



Triángulos esféricos

¿Qué relaciones habrá entre los lados y los ángulos de un triángulo esférico?

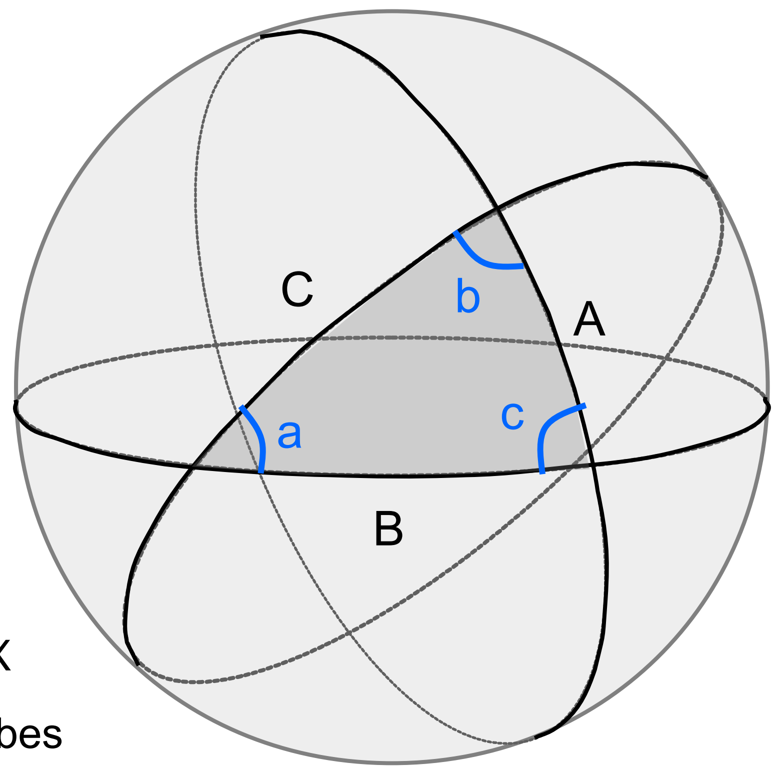


El Teorema de Pitágoras (y por lo tanto la ley de los cosenos) no valen.

Triángulos esféricos

Ley (esférica) de los senos:

$$\operatorname{sen} A / \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} B / \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} C / \operatorname{sen} c$$



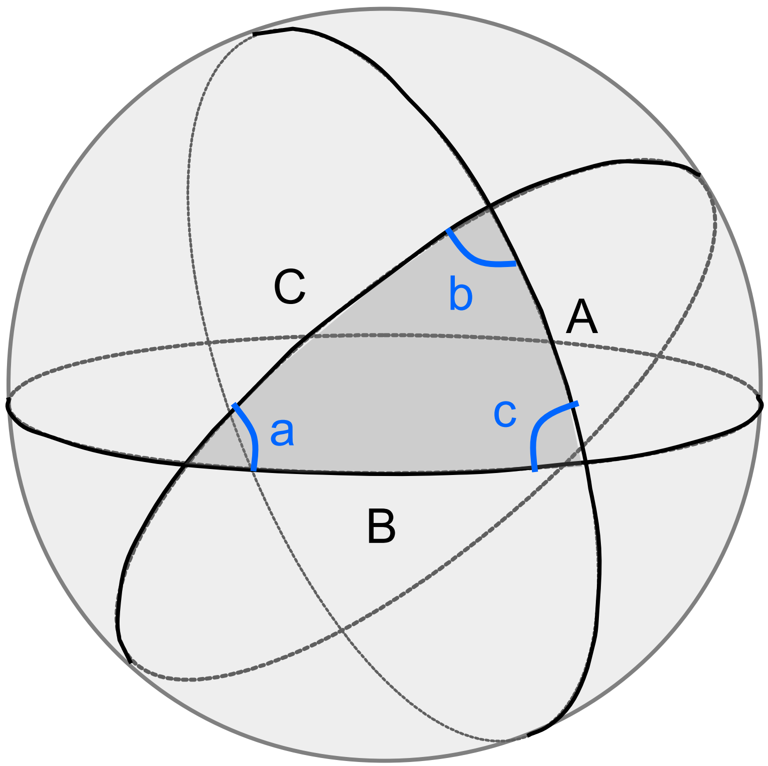
Descubierta en el siglo X

por los matemáticos árabes

Triángulos esféricos

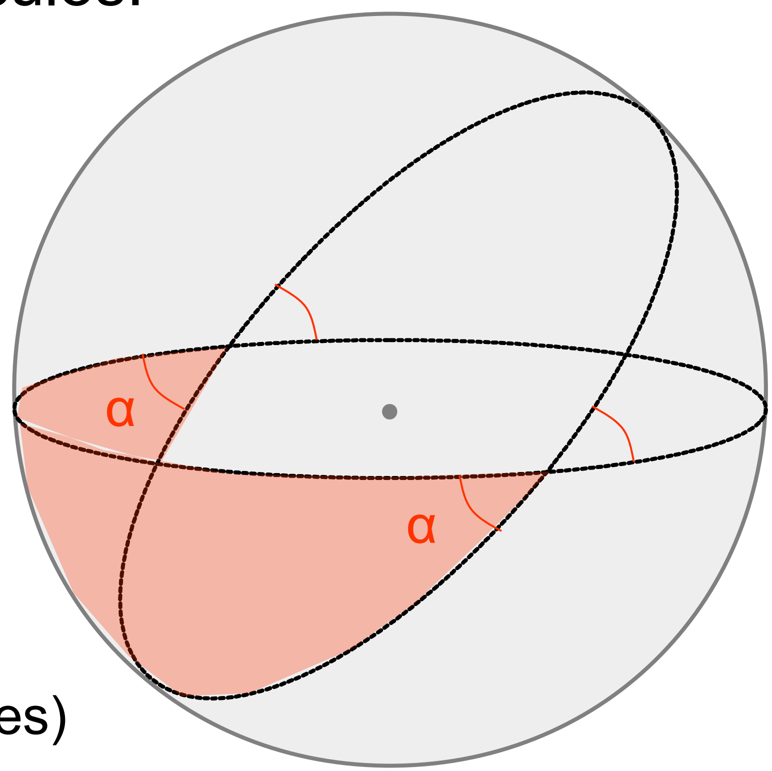
Ley (esférica) de los cosenos:

$$\cos C = \cos A \cdot \cos B + \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B \cdot \cos c$$



Áreas y ángulos

La esfera de radio 1 tiene área 4π, media esfera tiene área 2π y los gajos determinados por dos círculos máximos tienen áreas proporcionales al ángulo que forman los círculos:

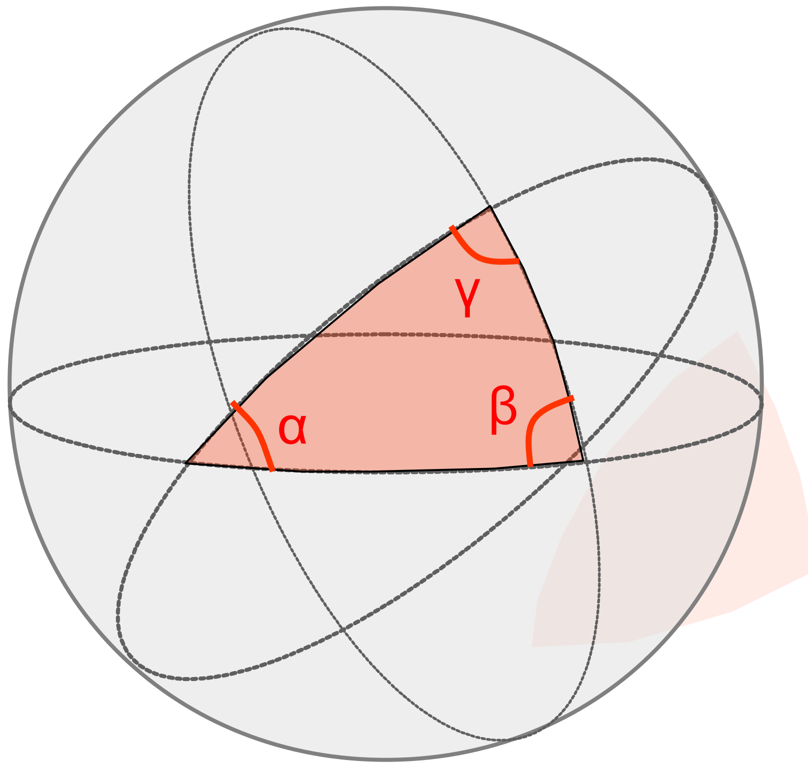


Área = 2α

(α medido en radianes)

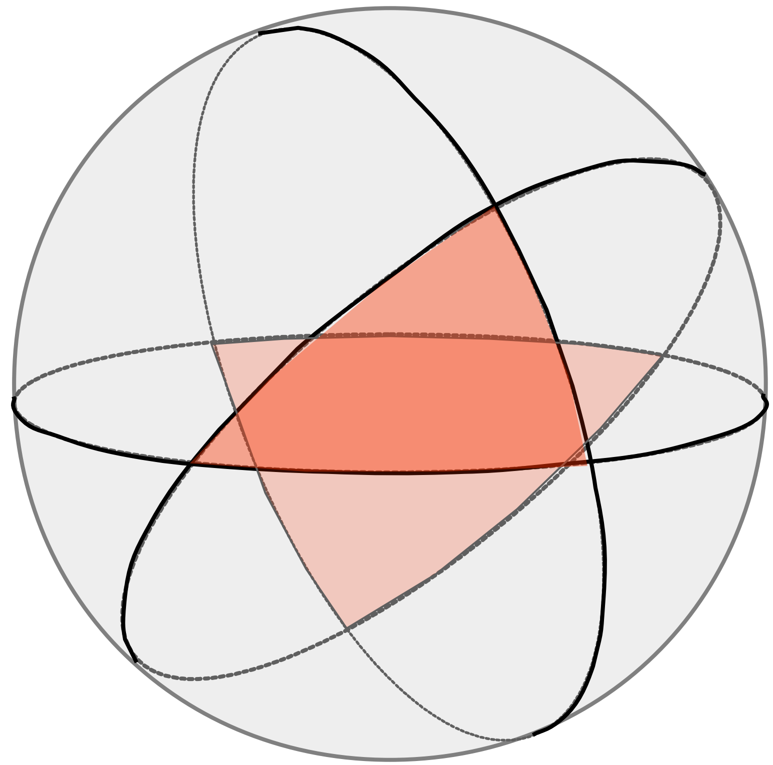
Teorema de Girard
(1632)

Teorema La suma de los ángulos internos de un triángulo esférico Δ es: $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \text{Area } \Delta$



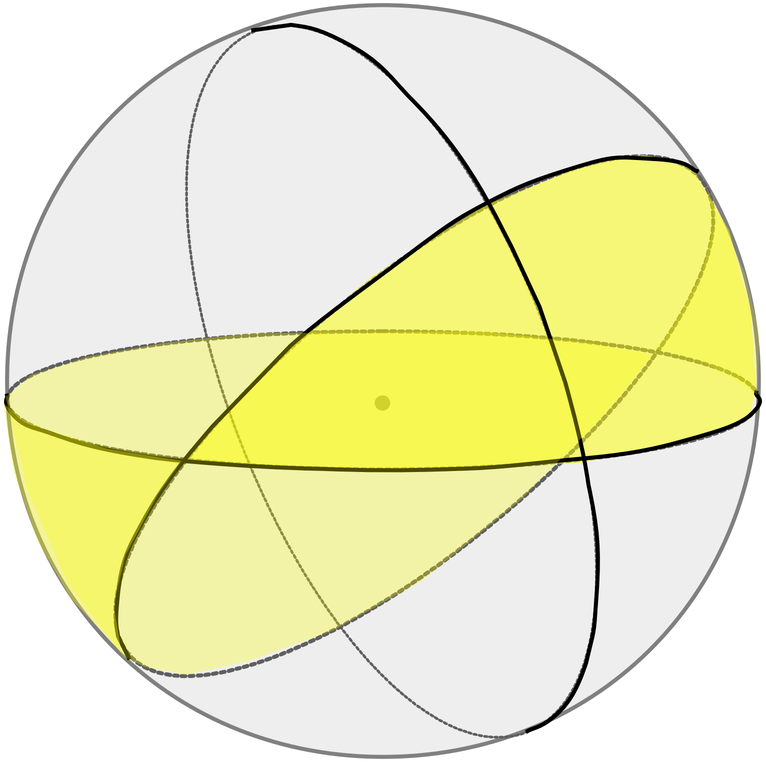
Teorema La suma de los ángulos internos de un triángulo esférico Δ es $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \text{Area } \Delta$

Demostración (Paso 1). Los 3 círculos máximos determinan 8 triángulos esféricos que son iguales por pares.



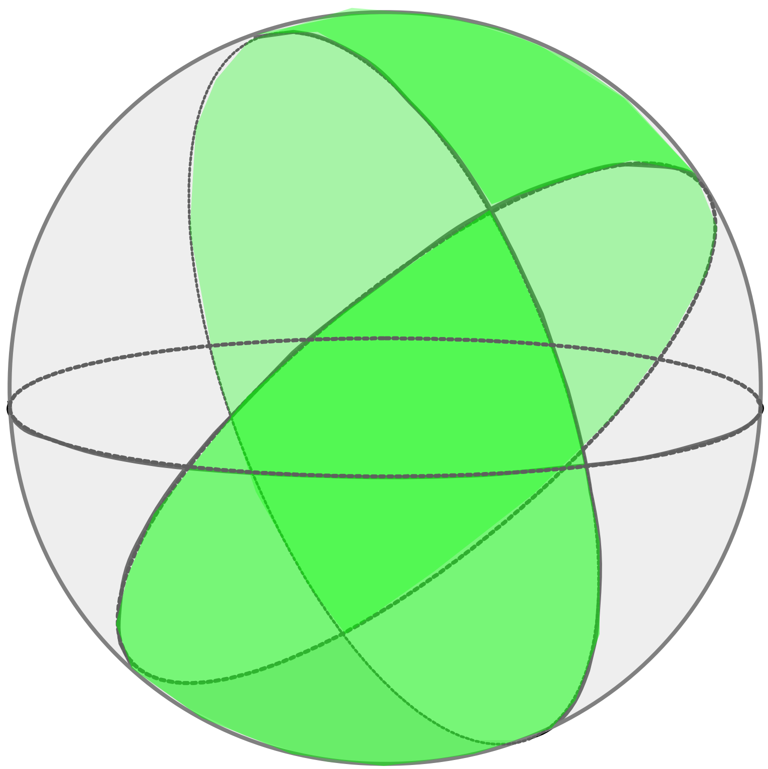
Teorema La suma de los ángulos internos de un triángulo esférico Δ es $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \text{Area } \Delta$

Demostración (Paso 2). Los triángulos forman 3 pares de gajos iguales.



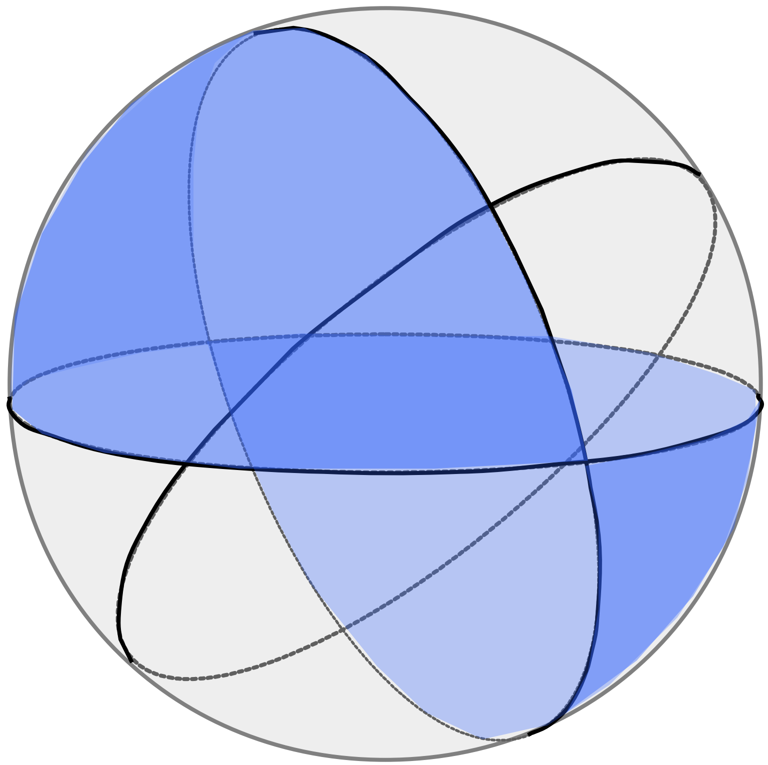
Teorema La suma de los ángulos internos de un triángulo esférico Δ es $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \text{Area } \Delta$

Demostración (Paso 2). Los triángulos forman 3 pares de gajos iguales.



Teorema La suma de los ángulos internos de un triángulo esférico Δ es $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \text{Area } \Delta$

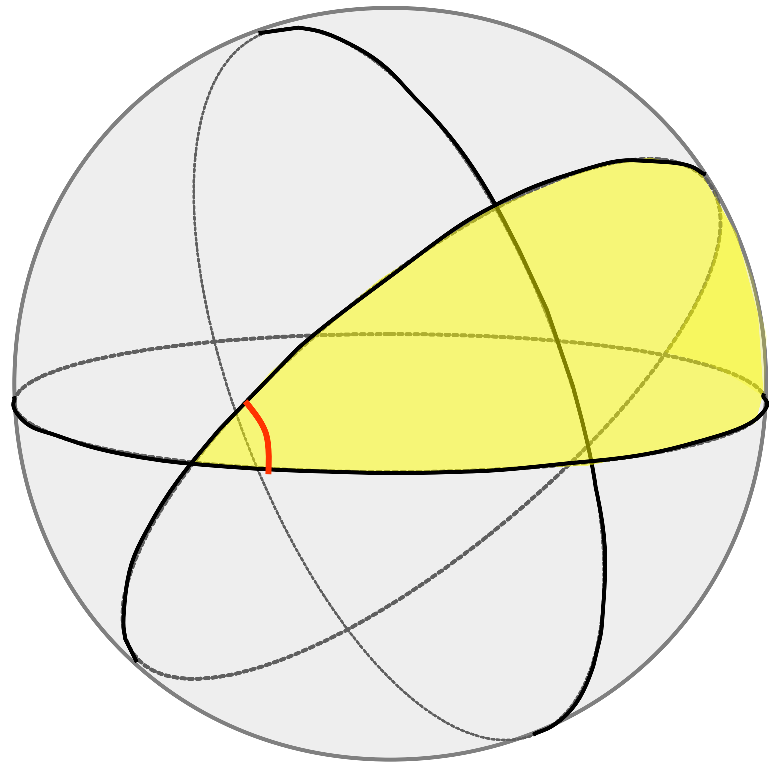
Demostración (Paso 2). Los triángulos forman 3 pares de gajos iguales.



Teorema La suma de los ángulos internos de un triángulo esférico Δ es $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \text{Area } \Delta$

Demostración (paso 3).

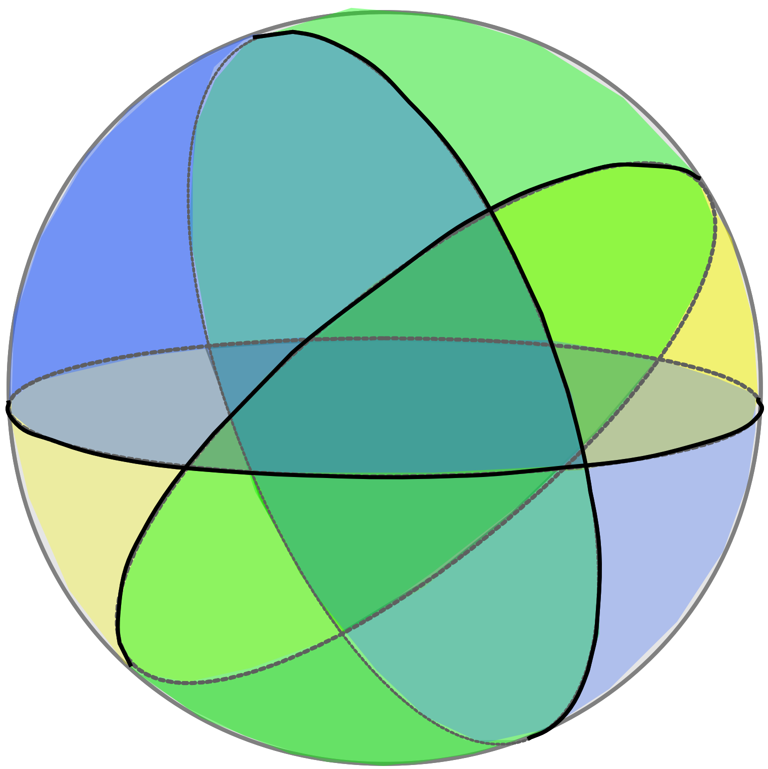
El ángulo en cada vértice del triángulo es igual a la mitad del área del gajo que lo contiene



Teorema La suma de los ángulos internos de un triángulo esférico Δ es $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \text{Area } \Delta$

Demostración (paso 4).

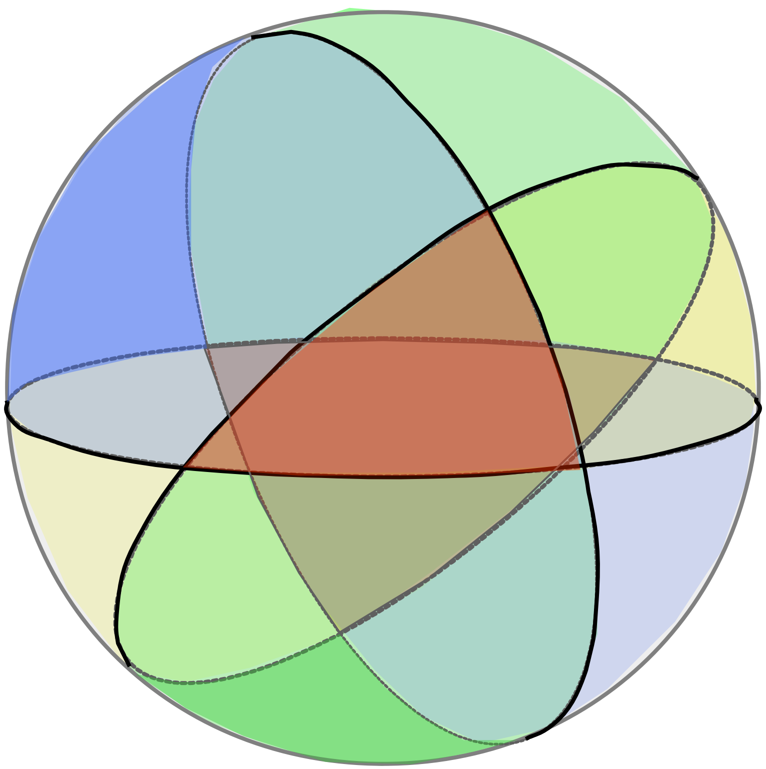
La suma de los ángulos internos de los dos triángulos rosas es igual a la mitad de la suma de las áreas de todos los gajos.



Teorema La suma de los ángulos internos de un triángulo esférico Δ es α + β + γ = π + Area Δ

Demostración (paso 5).

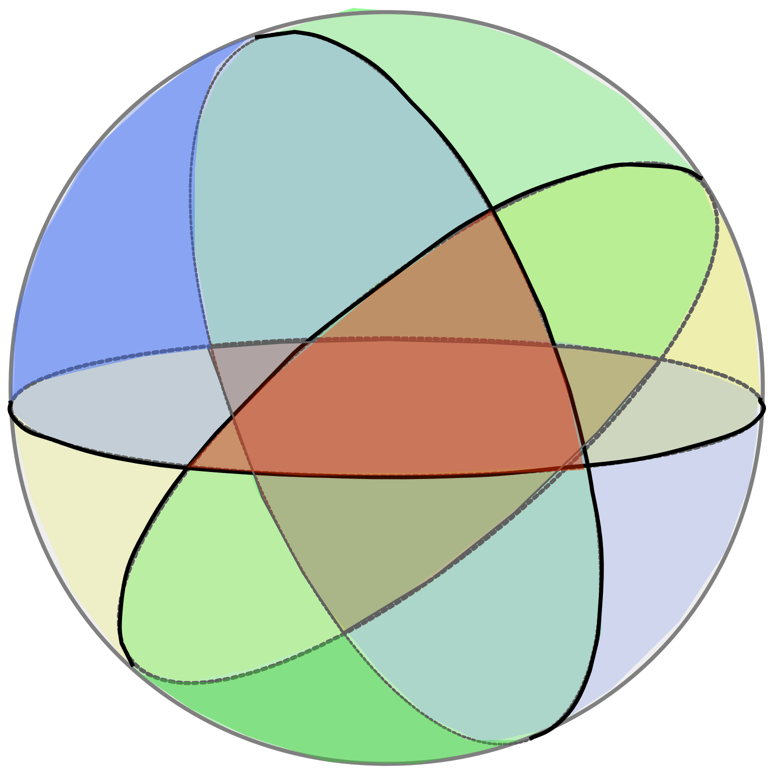
Los gajos cubren totalmente a la esfera, cubriendo a cada triángulo rosa tres veces y a lo demás una sola vez.



Teorema La suma de los ángulos internos de un triángulo esférico Δ es $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \text{Area } \Delta$

Demostración (paso 6).

Así que la suma de los ángulos internos de los dos triángulos rosas es igual a la mitad del área de la esfera mas 2 veces el área de los dos triángulos:

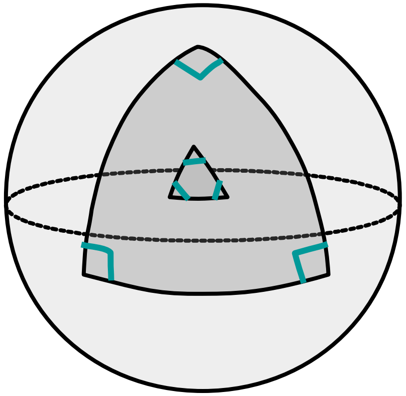


$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2\pi + 2\text{Area } \Delta$$

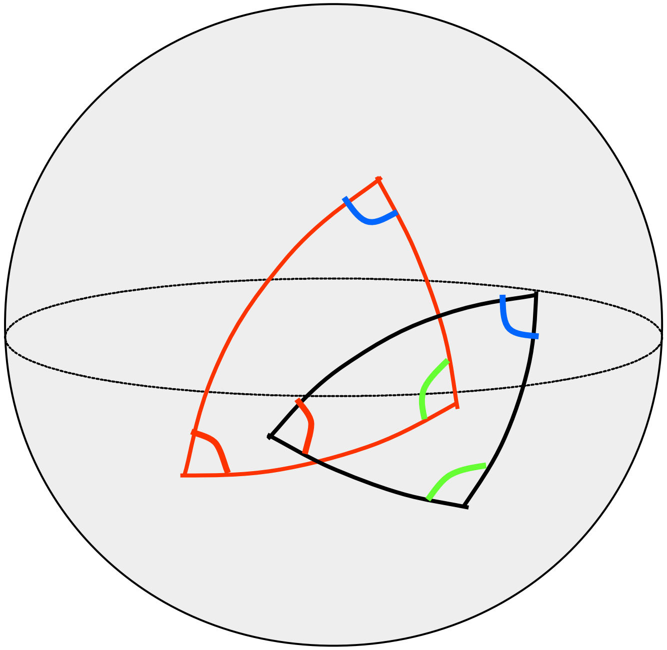
Corolarios

- *Si dos triángulos esféricos tienen ángulos iguales, sus áreas son iguales.*

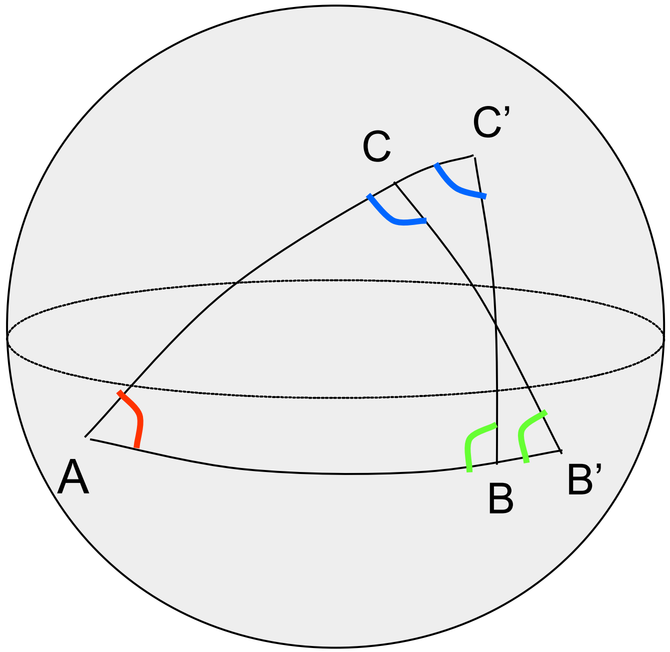
- *Dos triángulos esféricos con lados proporcionales no tienen ángulos iguales (a menos que los lados sean iguales).*



Teorema. *Si dos triángulos esféricos tienen ángulos iguales, sus lados correspondientes son iguales.*



Teorema. Si dos triángulos esféricos tienen ángulos iguales, sus lados correspondientes son iguales.

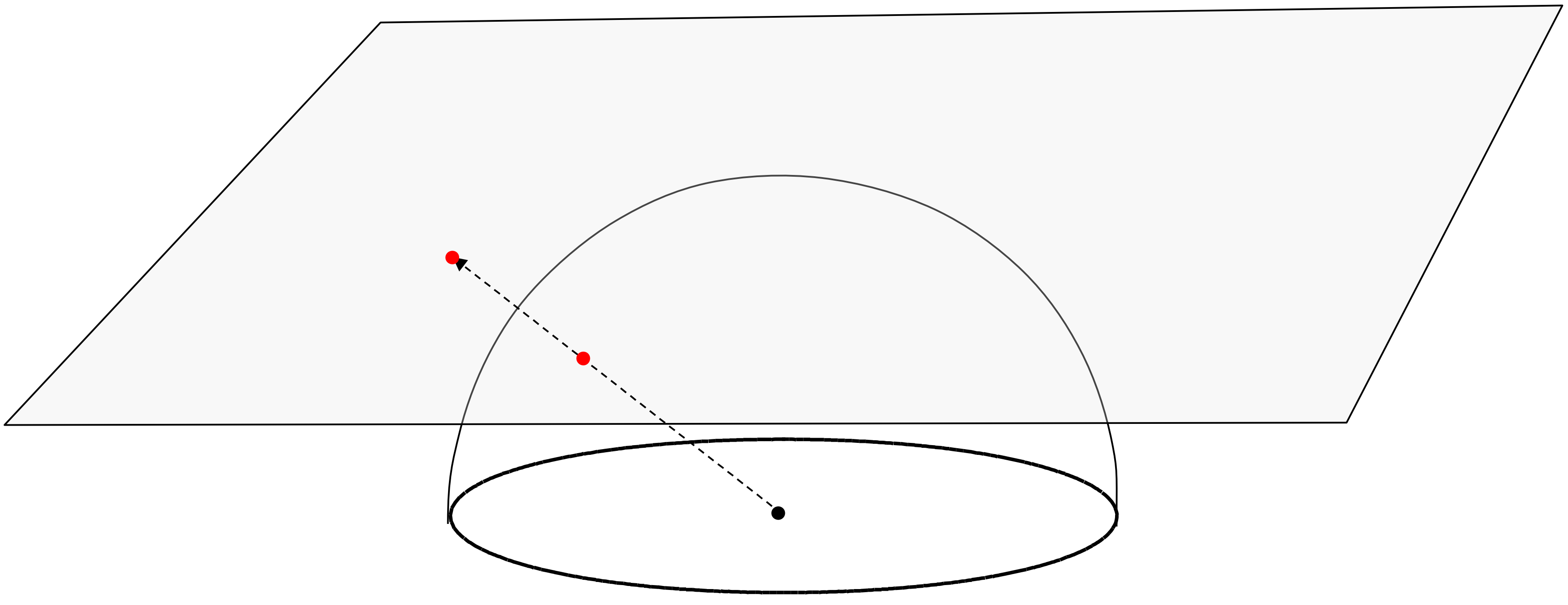


Demostración.

Podemos desplazar un triángulo para que coincida con el otro en un ángulo. Como los triángulos tienen áreas iguales ninguno puede estar contenido en el otro; lo único que podría pasar si no coinciden es que los lados se crucen formando ángulos iguales como en la figura.

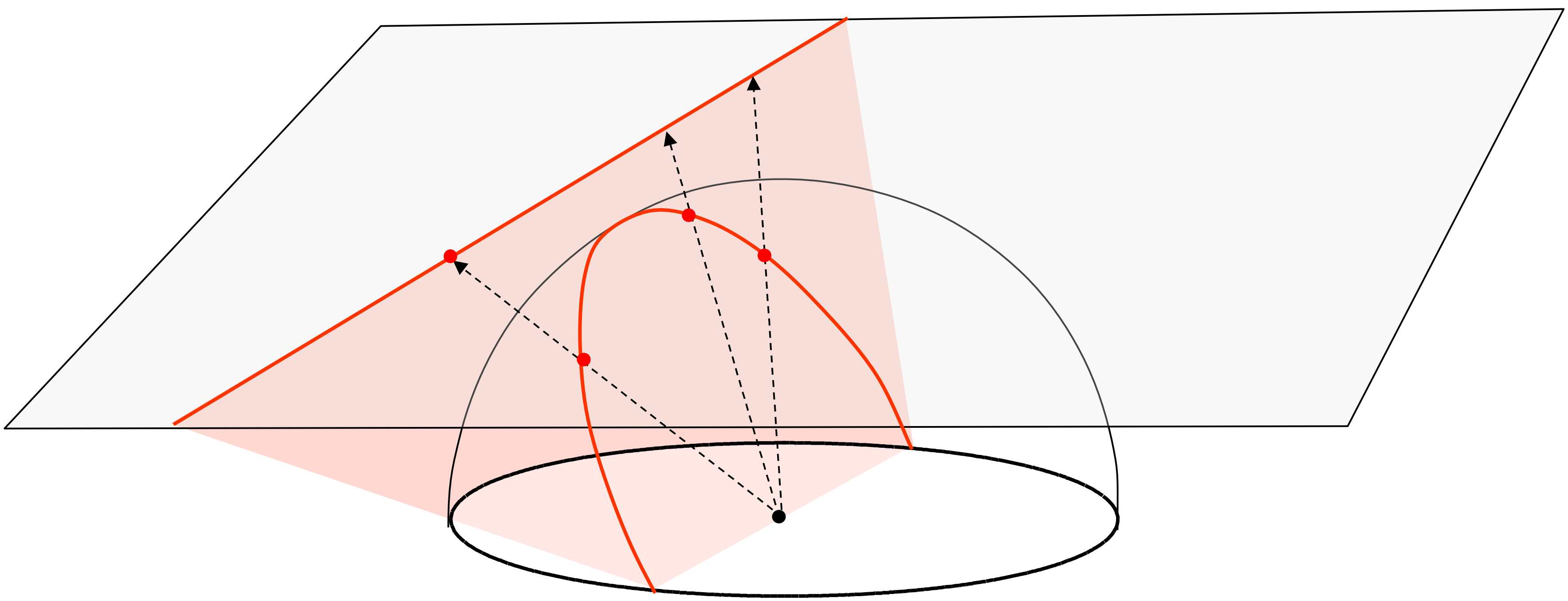
TAREA: Esto sólo puede pasar si el punto medio de BB' y el punto medio de CC' son antípodas (de modo que el ángulo en A sería π y entonces ABC no sería un triángulo)

Proyección de un hemisferio al plano



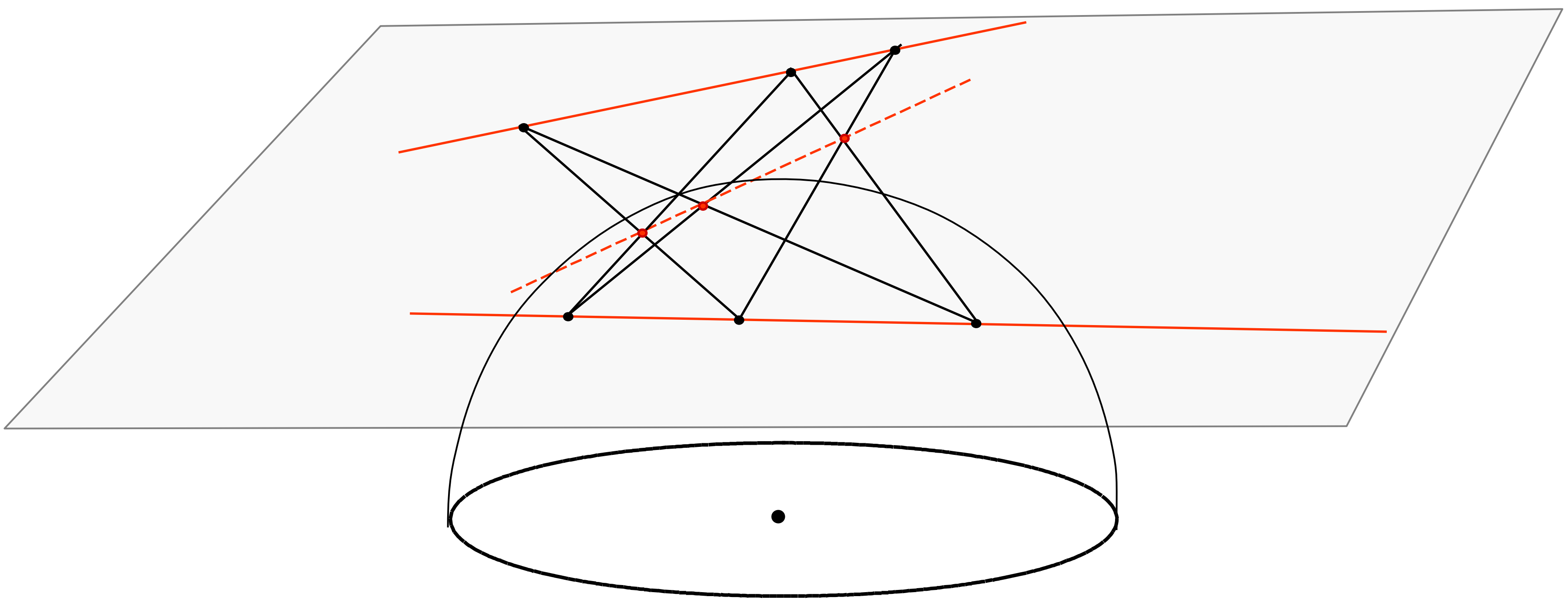
La proyección radial da una biyección continua entre los puntos del hemisferio y los puntos del plano.

Proyección de un hemisferio al plano

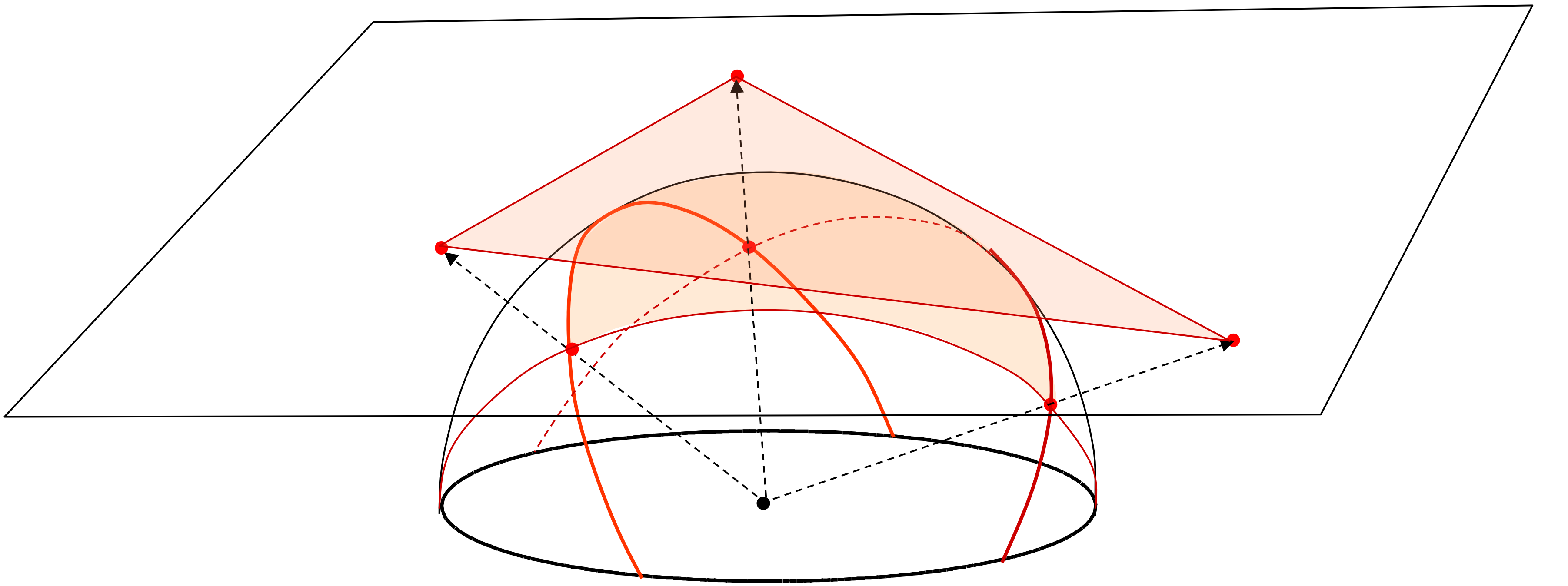


La proyección envía círculos máximos en líneas rectas.

Corolario. El teorema de Pappus vale en la esfera.

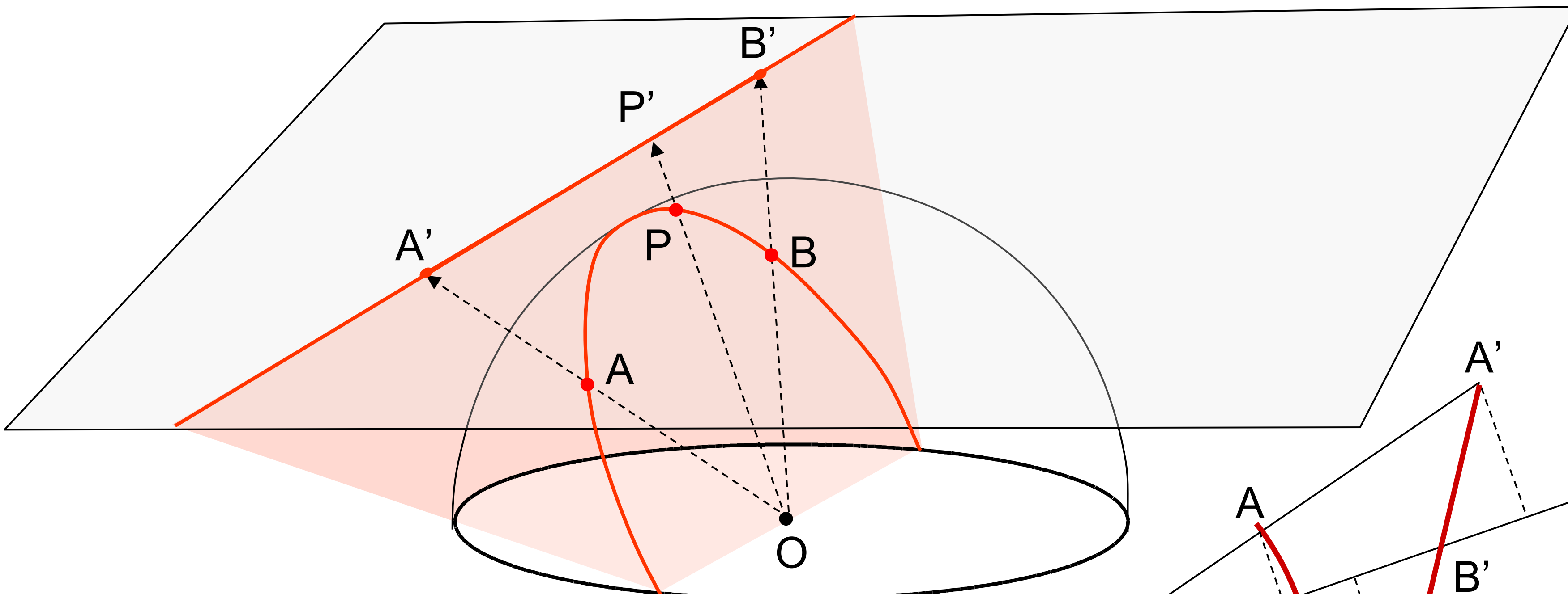


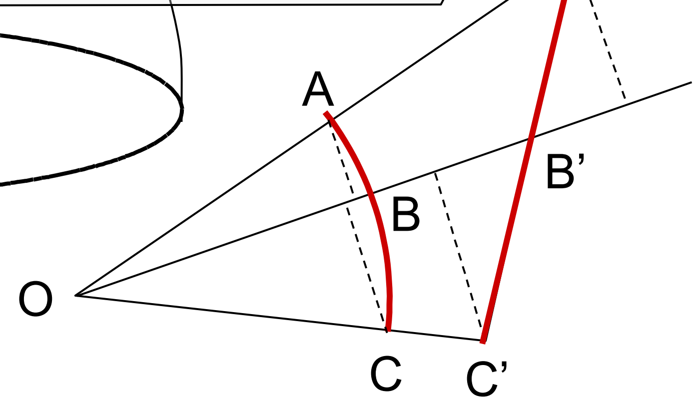
Proyección de un triángulo



Teorema de Ceva. *En un triángulo esférico ABC, las líneas que van de los vértices A, B, C a puntos L, M, N en los lados opuestos son concurrentes si y sólo si:*

senAN/senNB · senBL/senLC · senCM/senMA = 1





A’P’/P’B’ = OA senAOP / OB senPOC

Corolario: *En un triángulo esférico:*

Las bisectrices son concurrentes

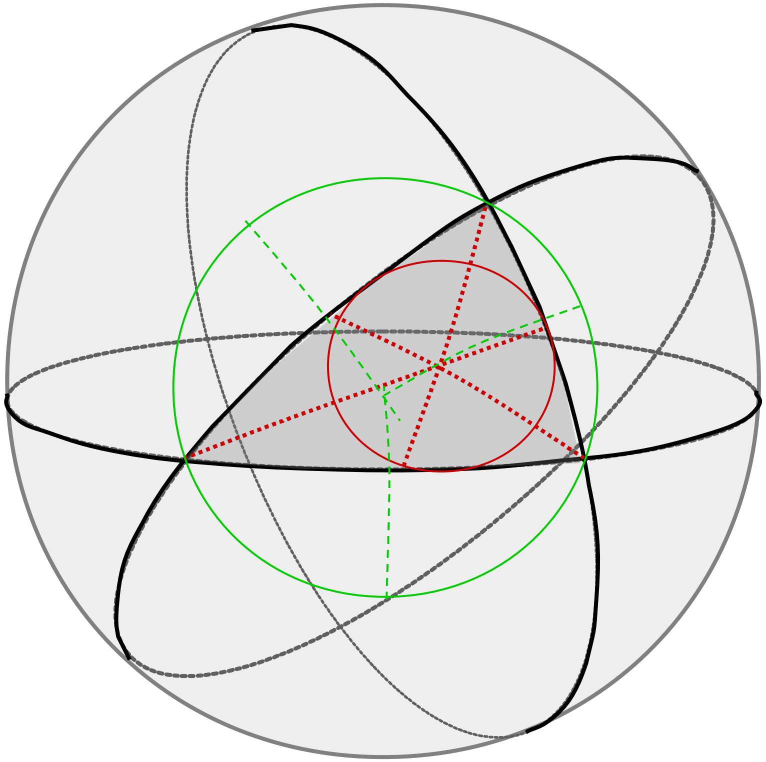
(se encuentran en el centro del círculo inscrito)

Las mediatrices son concurrentes

(se encuentran en el centro del círculo circunscrito)

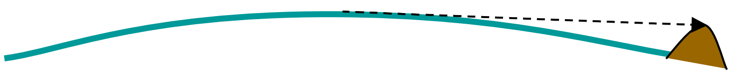
Las medianas son concurrentes

Las alturas son concurrentes



TAREA 6

1. *¿Cuánto suman los ángulos internos de un polígono esférico de n lados?*
2. *Si un triángulo esférico tiene ángulos 90°, 60° y 45° ¿Cuál es su área? ¿Cuánto miden sus lados?*
3. *¿En el mar, desde que distancia puede verse una isla que tiene 1km de altura?*



4. *Si se dibujara un triángulo de 1km de lado en una esfera del tamaño de la tierra, ¿Cuánto mayor que π sería la suma de sus ángulos internos?*

Clases 7 y 8

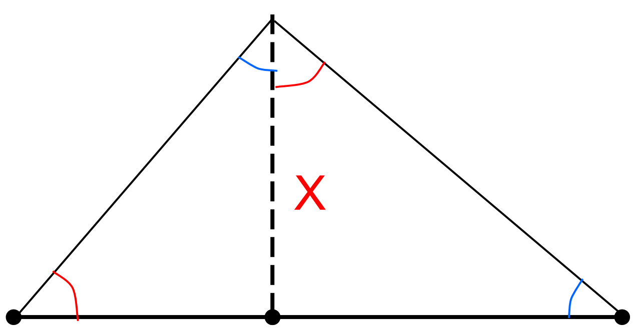
Secciones cónicas

Medias proporcionales

(o medias geométricas)

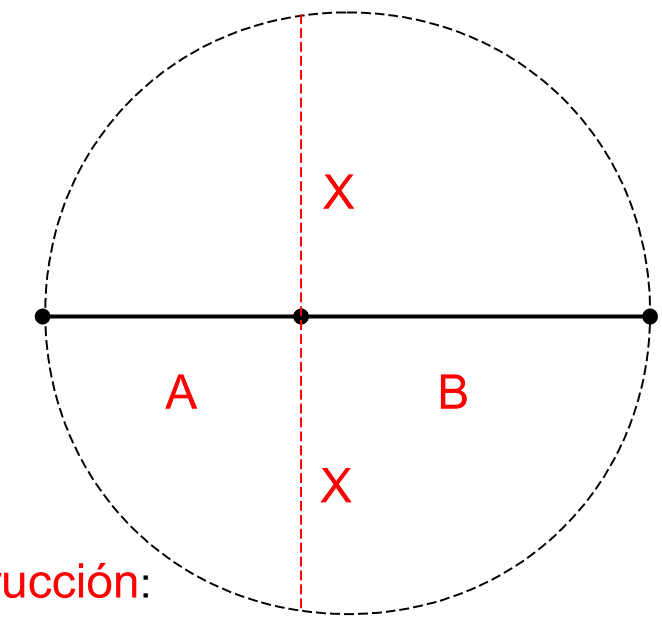
El problema de construir un cuadrado de la misma área que un rectángulo dado se resuelve hallando la *media proporcional* entre los lados del rectángulo:

La *media proporcional* entre a y b es un número x tal que $B/X = X/A$ ya que entonces $X^2 = AB$.



(Triángulos semejantes)

Construcción:

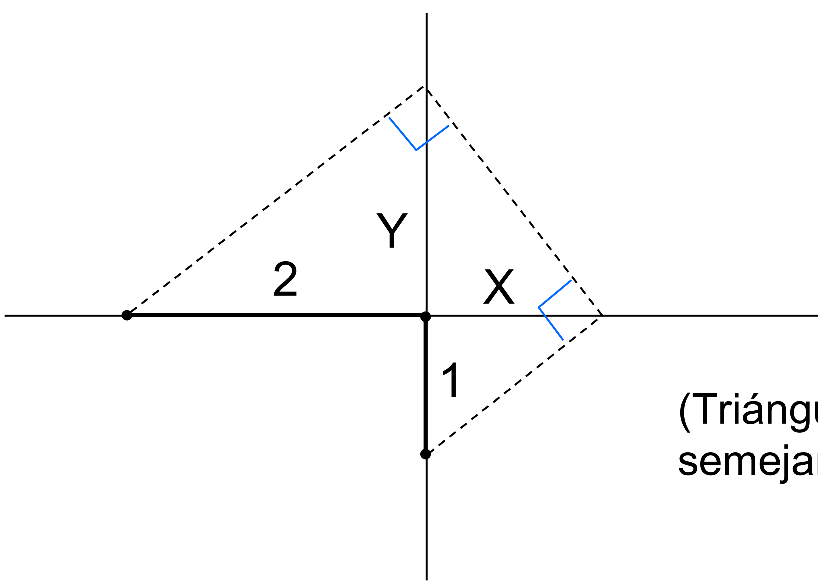


Duplicación del cubo

El problema de duplicar el cubo (construir $\sqrt[3]{2}$) podría resolverse hallando *dos medias proporcionales* entre 1 y 2, es decir, dos números X y Y entre 1 y 2 tales que

$$2/Y = Y/X = X/1$$

ya que entonces $X^3 = 2/Y \cdot Y/X \cdot X/1 = 2$.

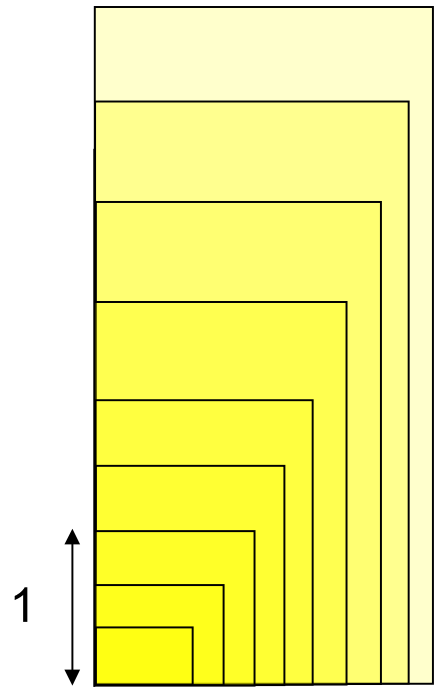


(Triángulos semejantes)

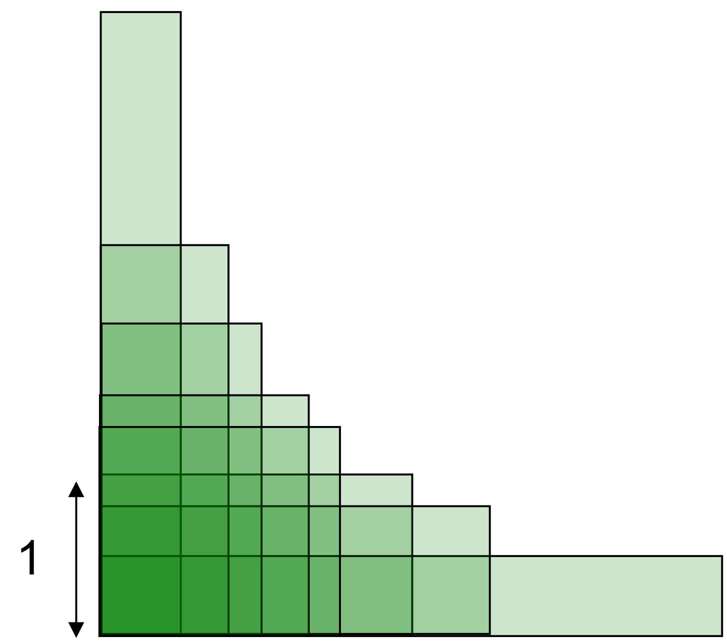
¿Construcción?

Si $2/Y = Y/X = X/1$ entonces $Y = X^2$ y $2 = XY$

Así que X y Y son los lados de un rectángulo cuya altura Y es el cuadrado de la base X y cuya área XY es 2.



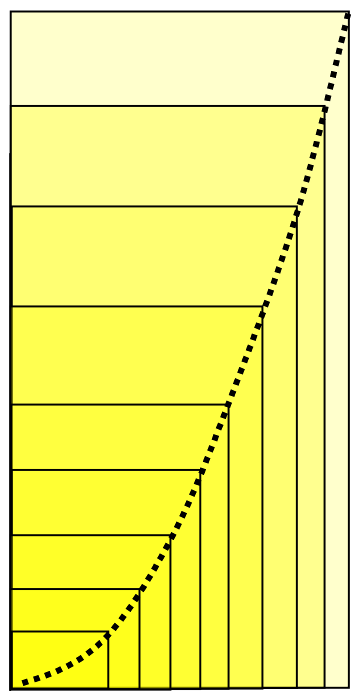
RECTÁNGULOS CUYA ALTURA ES EL CUADRADO DE LA BASE



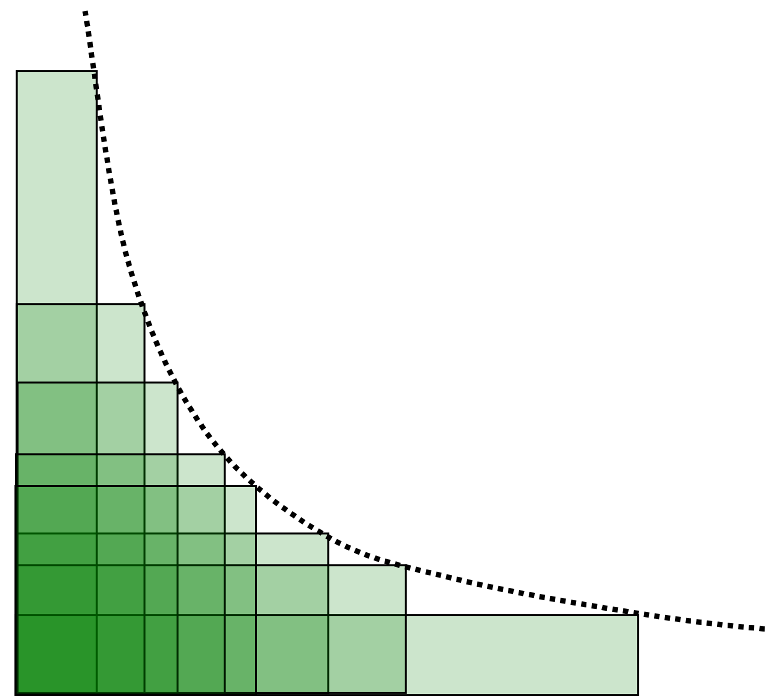
RECTÁNGULOS DE ÁREA 2

Si $2/Y = Y/X = X/1$ entonces $Y = X^2$ y $2 = XY$

Si pudiéramos dibujar todas los rectángulos sus vértices dibujarían dos curvas:

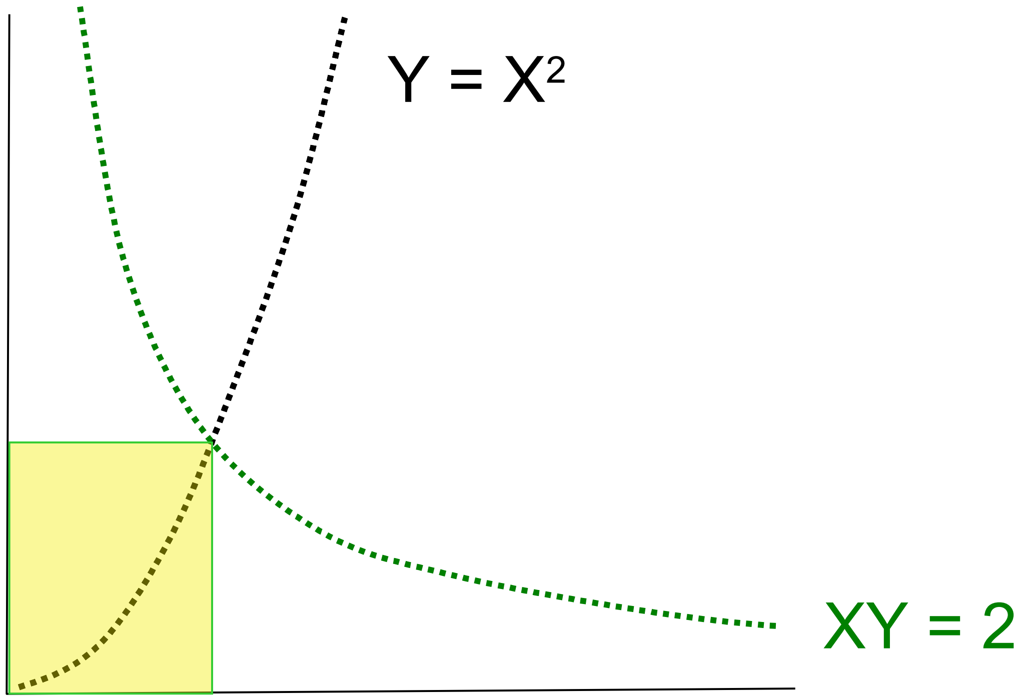


$Y = X^2$



$XY = 2$

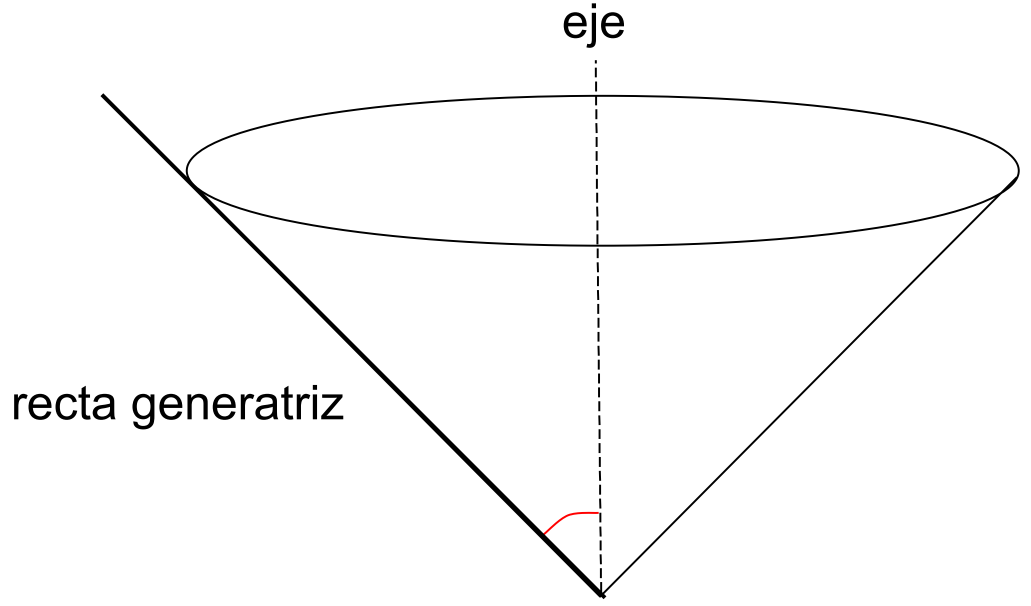
Si pudiéramos dibujar las dos curvas, la solución del problema Deliano estaría dada por su intersección:



Estas curvas se llaman *parábola* e *hipérbola*.

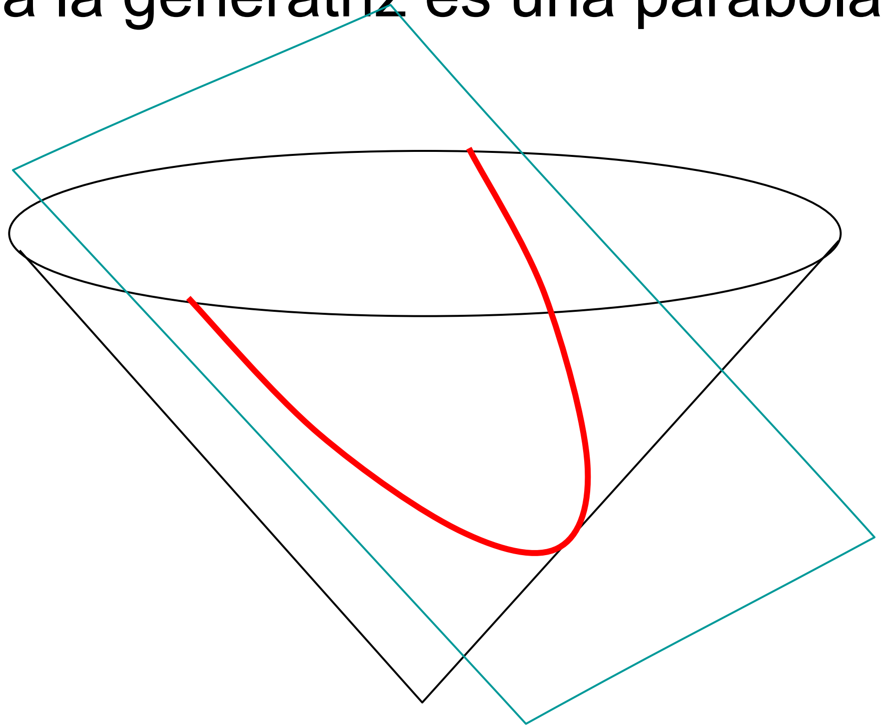
El cono

Considerar el cono obtenido al girar alrededor de un eje vertical una recta inclinada 45°



Parábola:

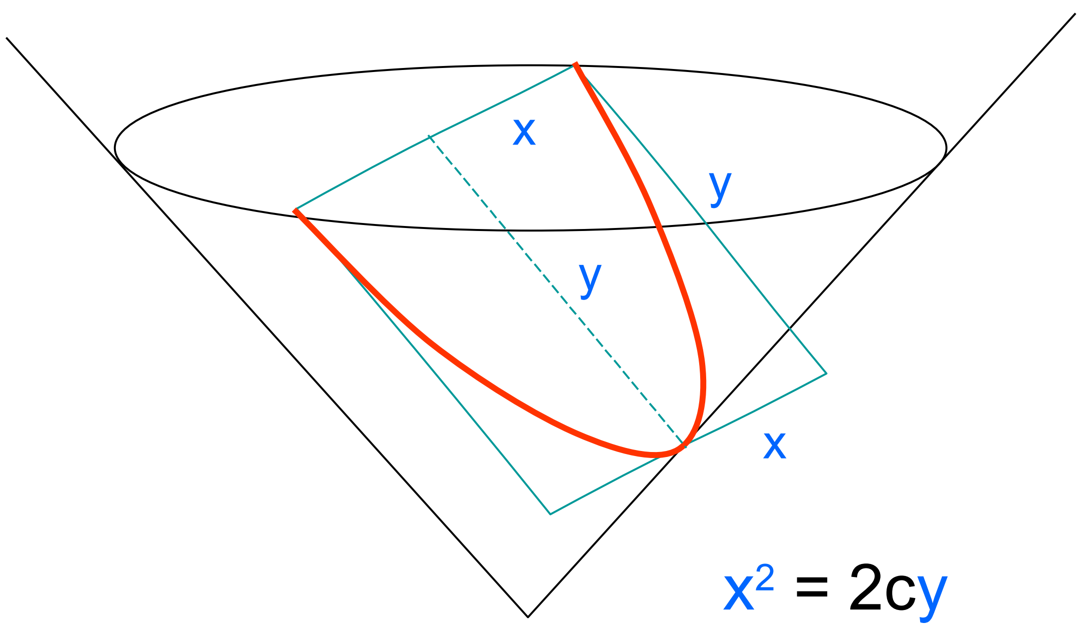
La curva que se obtiene de cortar un cono recto con un plano paralelo a la generatriz es una parábola.

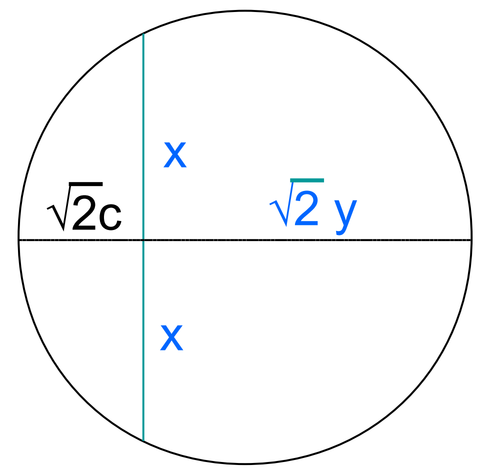


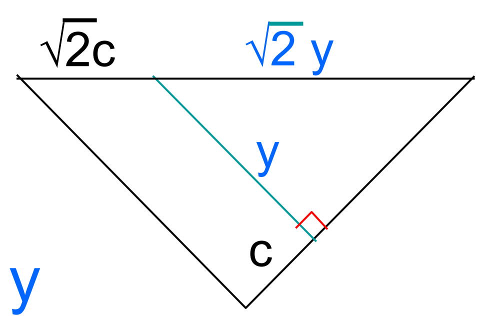
Parábola:

La curva que se obtiene de cortar un cono recto con un plano paralelo a la generatriz del cono es una parábola.

Demostración:





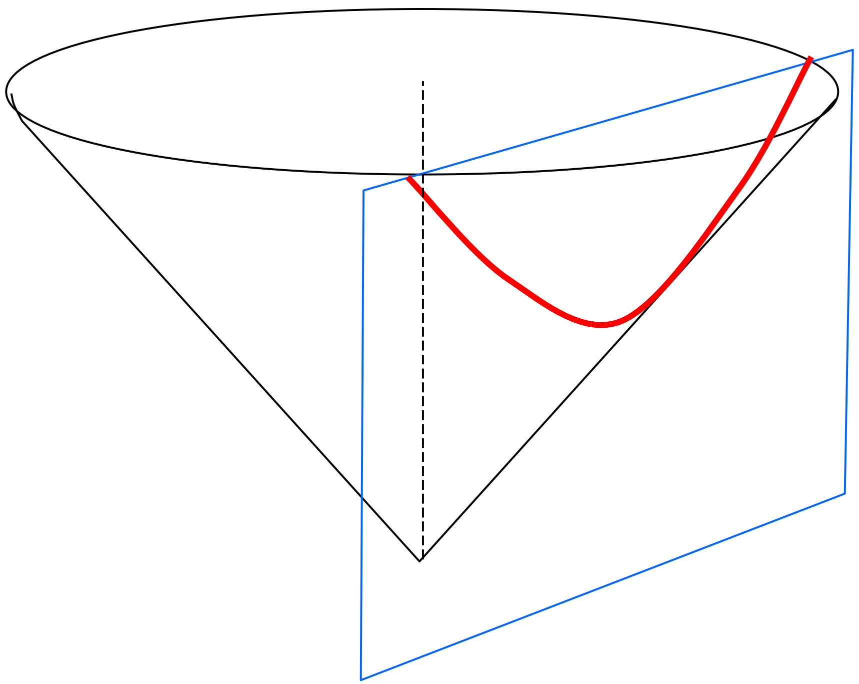


$$x^2 = 2cy$$

cuando c = ½ queda $x^2 = y$

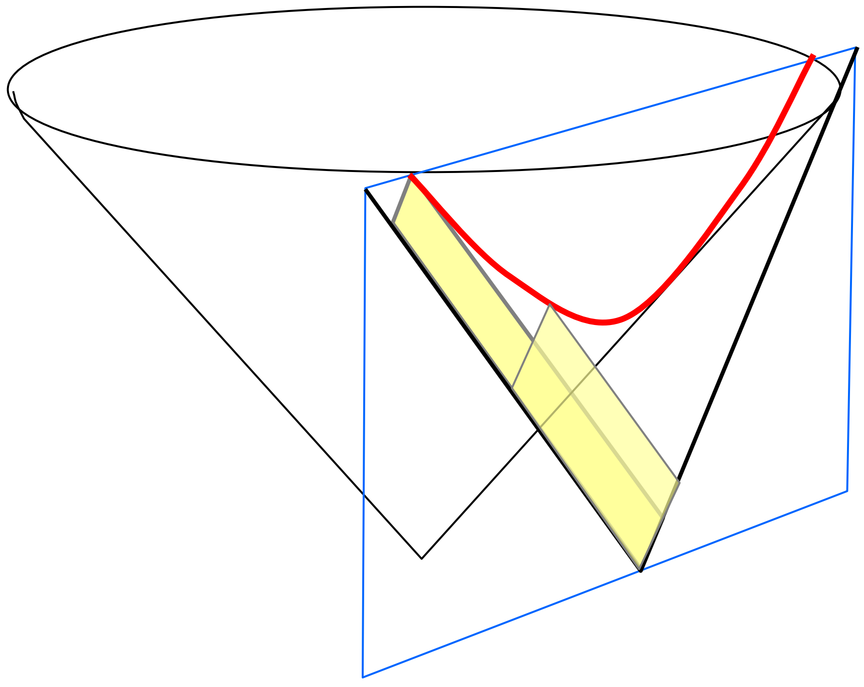
Hipérbola:

La curva que se obtiene de cortar un cono recto con un plano paralelo al eje del cono es una hipérbola.



Hipérbola:

La curva que se obtiene de cortar un cono recto con un plano paralelo al eje del cono es una hipérbola.



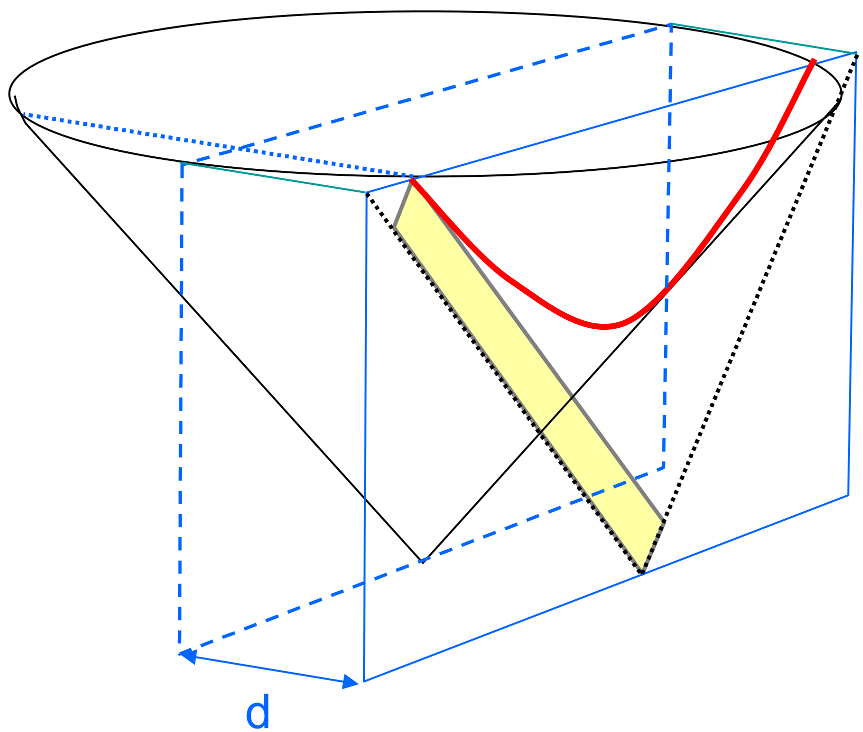
Demostración:

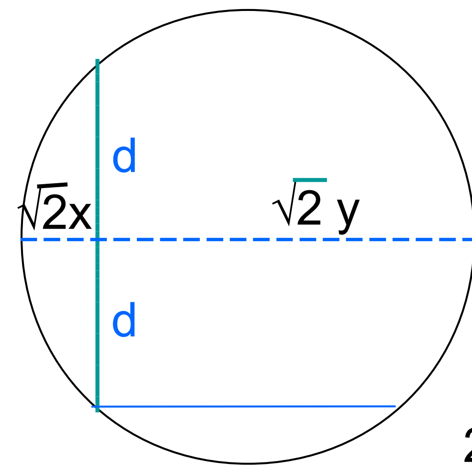
Tenemos que ver que hay dos rectas perpendiculares tales que los rectángulos determinados por las rectas y un punto de la curva tienen áreas iguales.

Hipérbola:

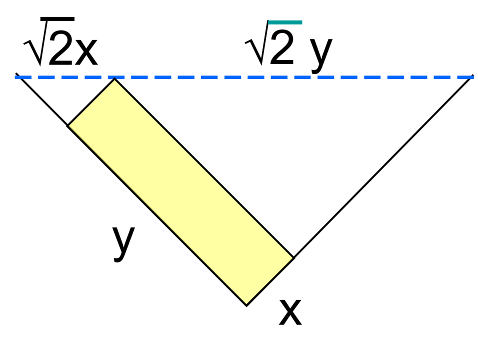
La curva que se obtiene de cortar un cono recto con un plano paralelo al eje del cono es una hipérbola.

Demostración:

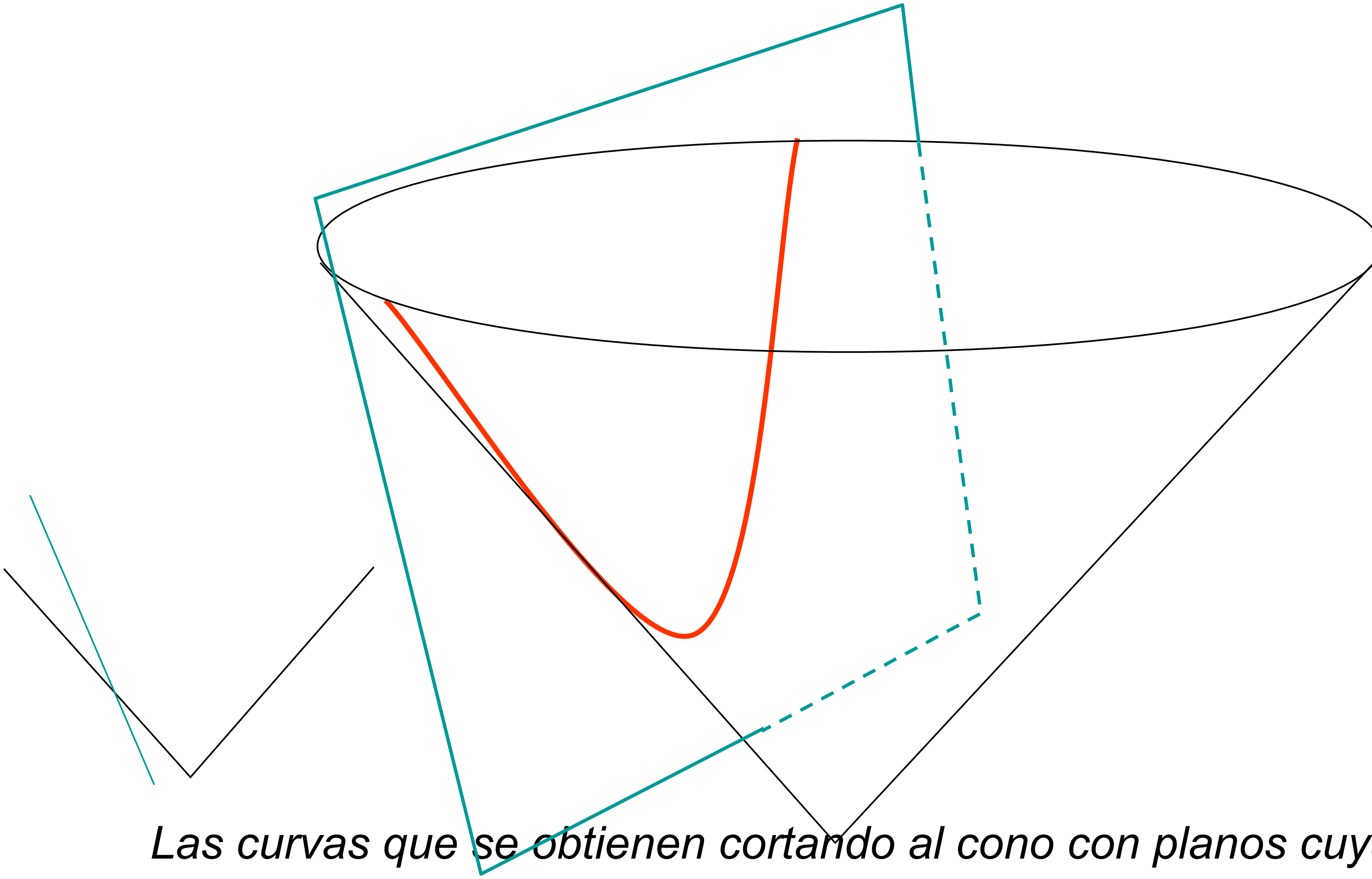




$$2xy = d^2$$

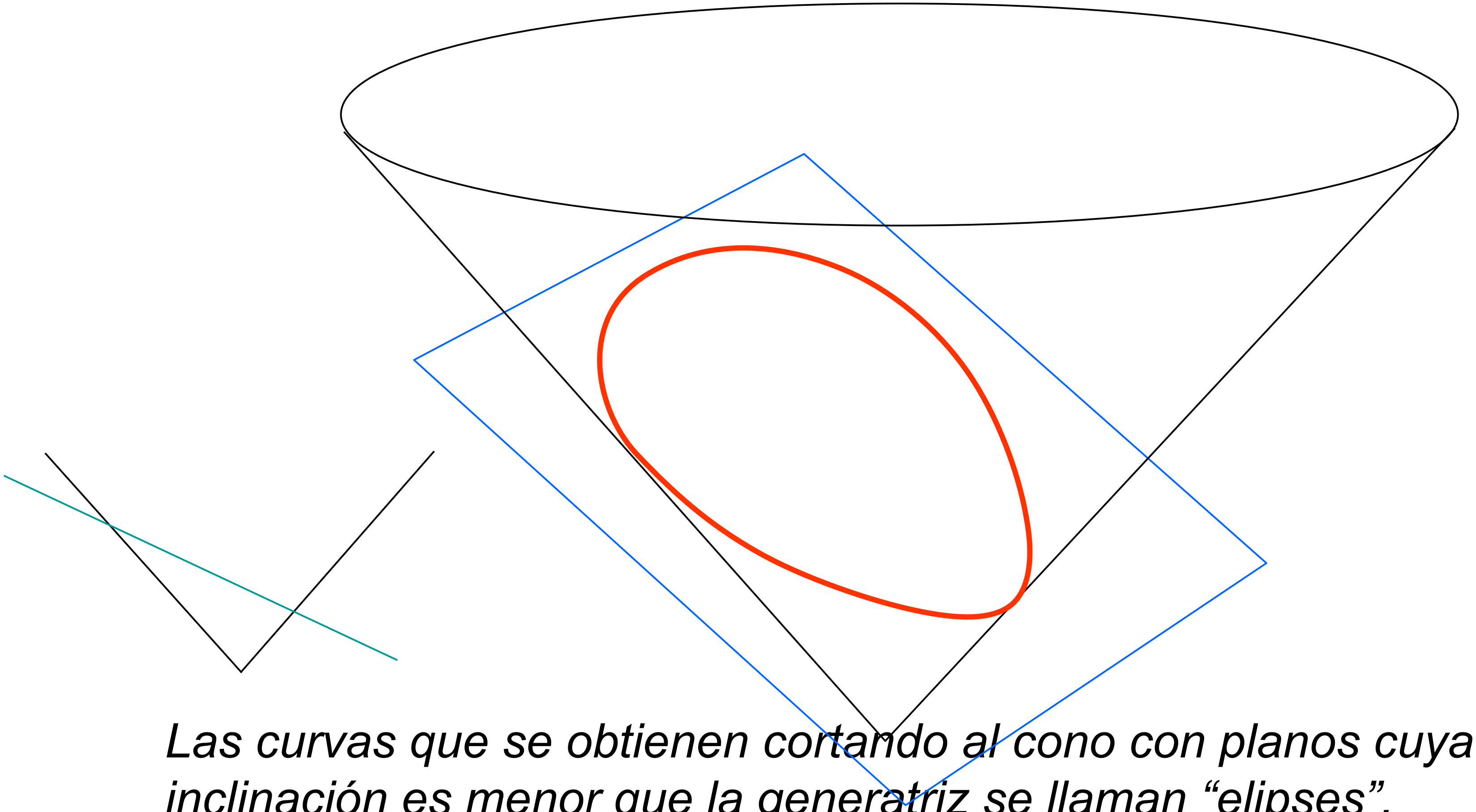


Hipérbolas



Las curvas que se obtienen cortando al cono con planos cuya inclinación es mayor que la generatriz se llaman hipérbolas".

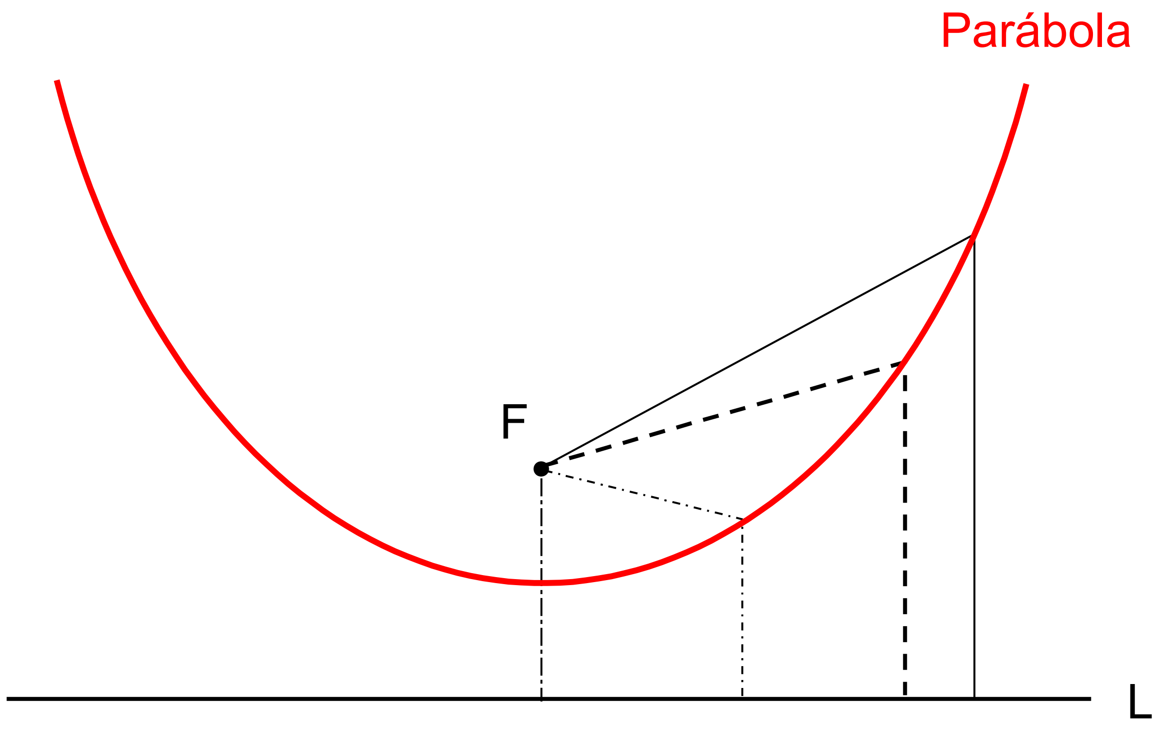
Elipse



Las curvas que se obtienen cortando al cono con planos cuya inclinación es menor que la generatriz se llaman "elipses".

Parábola:

La parábola está formada por los puntos del plano cuya distancia a un punto F y a una línea recta L son iguales.



Parábola:

La parábola está formada por los puntos del plano cuya distancia a un punto F y a una línea recta L son iguales.

Demostración.

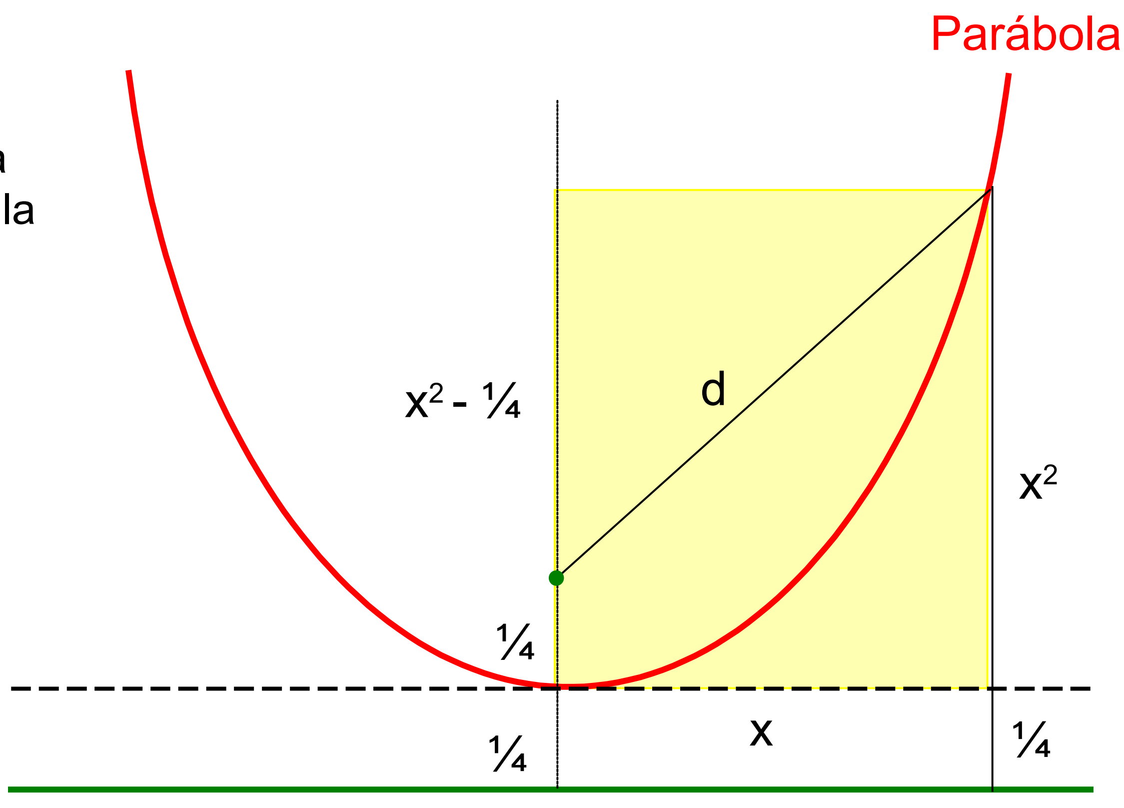
Tomemos el punto F y la recta L a distancia ¼ de la base y calculemos sus distancias a un punto de la parábola

Por el Teo. Pitágoras

$$d^2 = (x^2 - \tfrac{1}{4})^2 + x^2$$

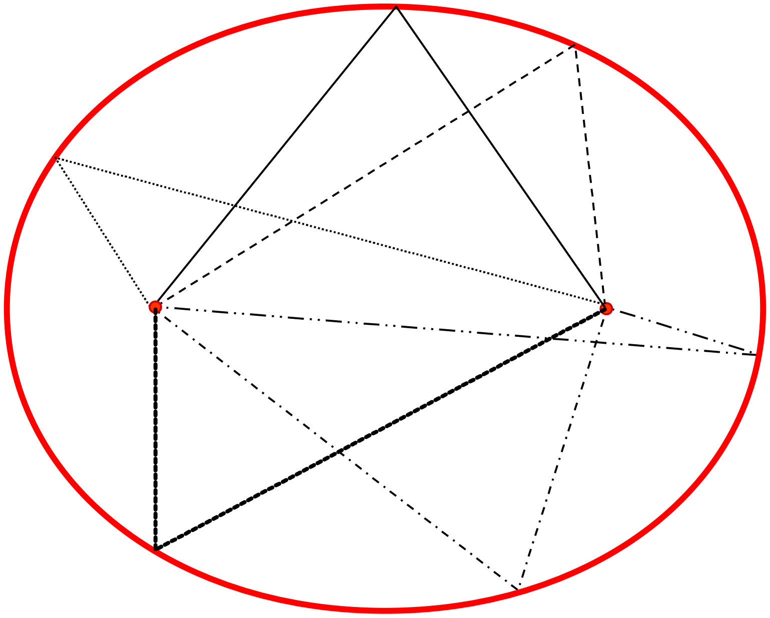
$$= (x^2 + \tfrac{1}{4})^2$$

Así que la distancia de cualquier punto de la curva al punto F y a la recta L son iguales.



Elipse

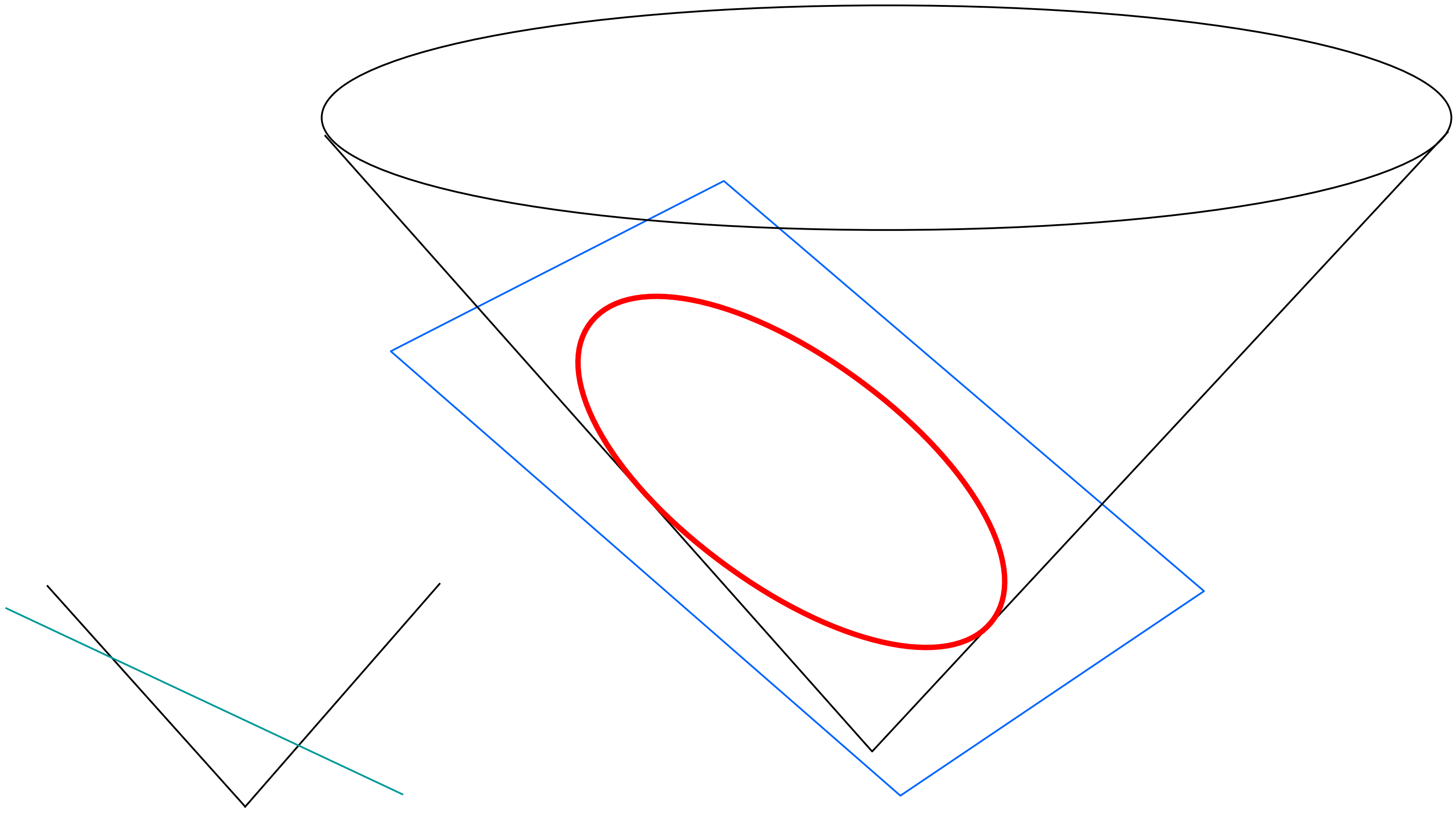
Una elipse está formada por los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos es constante.



Demostración:
después …

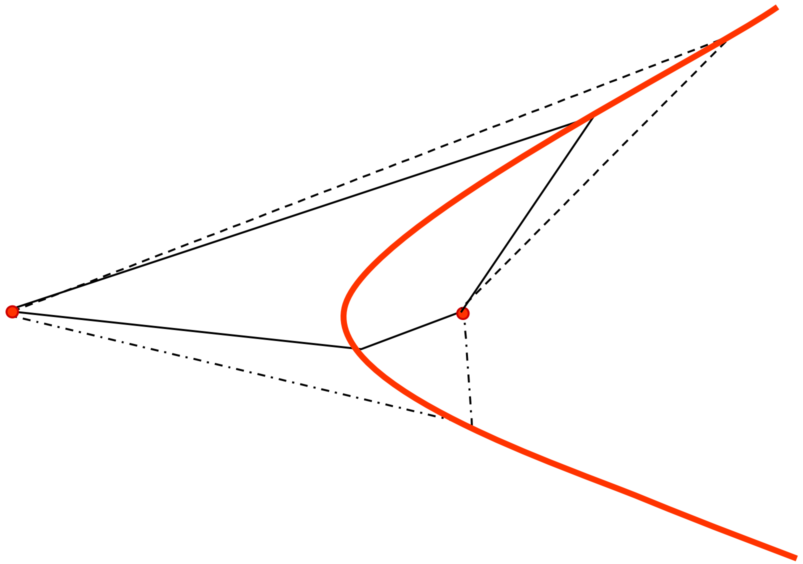
Elipses

Las elipses son simétricas.



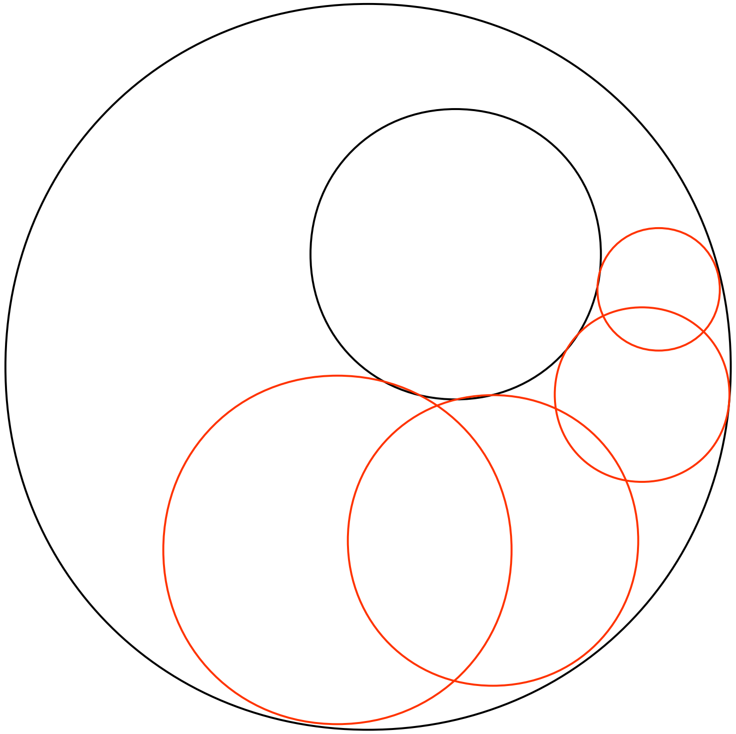
Hipérbola

Una hipérbola está formada por los puntos del plano tales que la resta de sus distancias a dos puntos es constante.



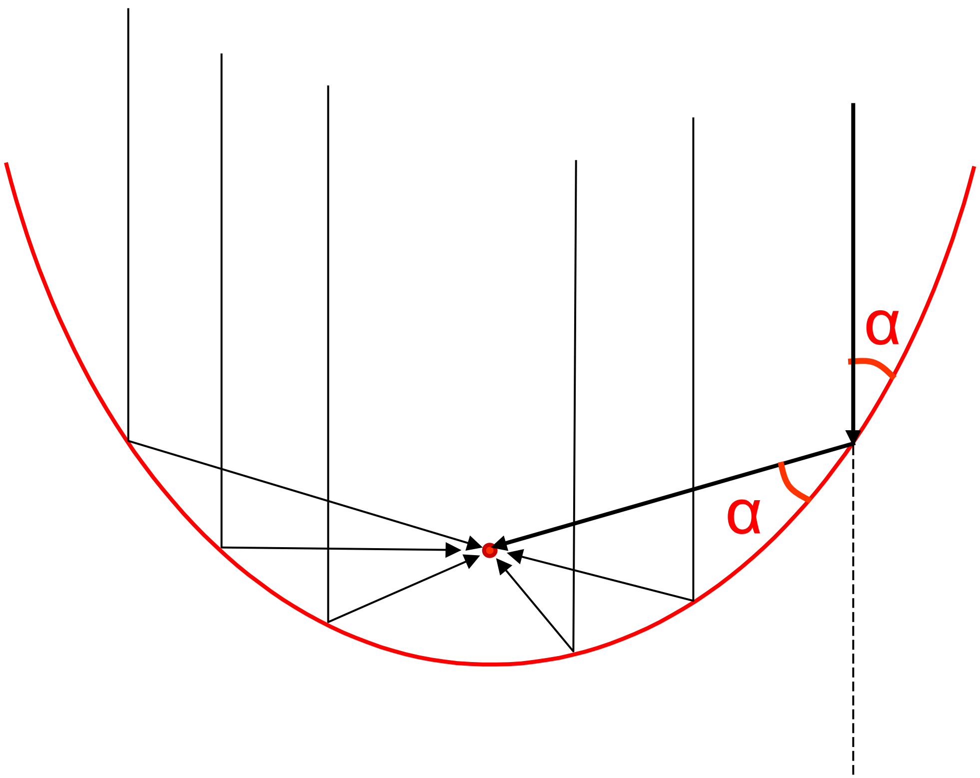
Demostración:
después …

Tarea ¿Qué curva forman los centros de todos los círculos tangentes a dos círculos no concéntricos?



Parábola

Propiedad focal: *Los rayos paralelos al eje que se reflejan en la parábola se concentran en el foco.*



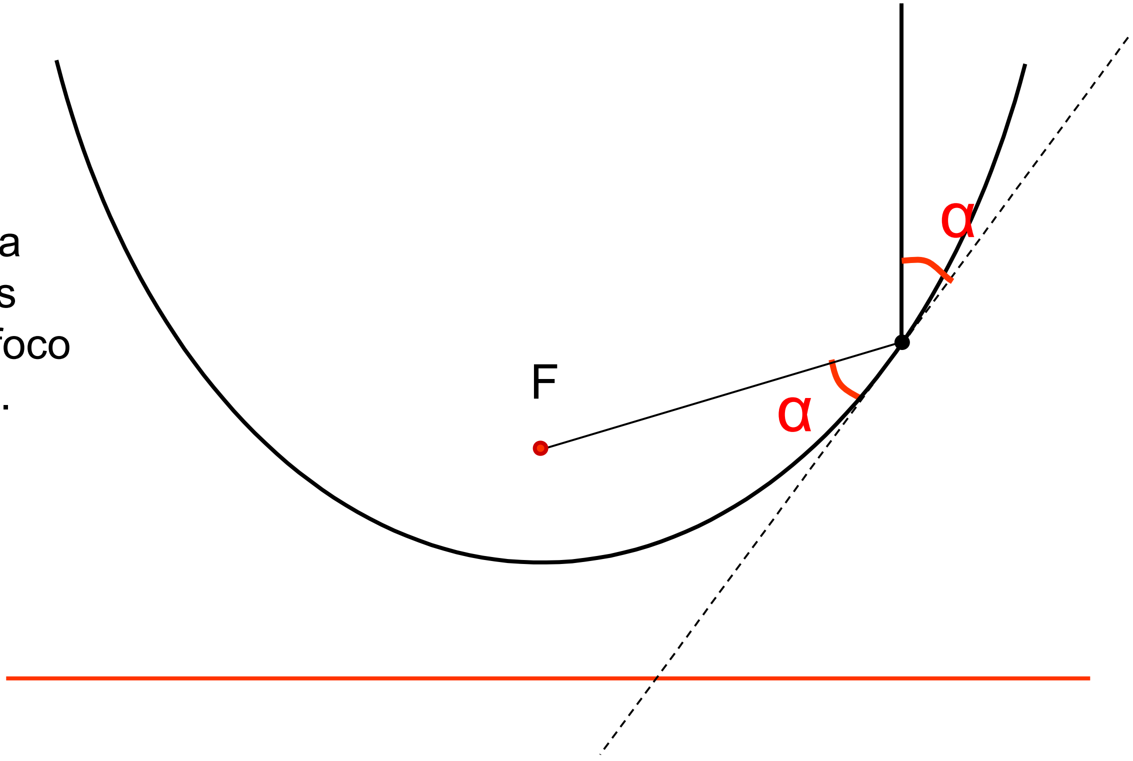
Espejos que queman

Parábola

Propiedad focal: *Los rayos paralelos al eje que se reflejan en la parábola se concentran en el foco.*

Demostración. (1)

Hay que ver que las tangentes a la parábola forman ángulos iguales con la línea que va al foco y con la paralela al eje.



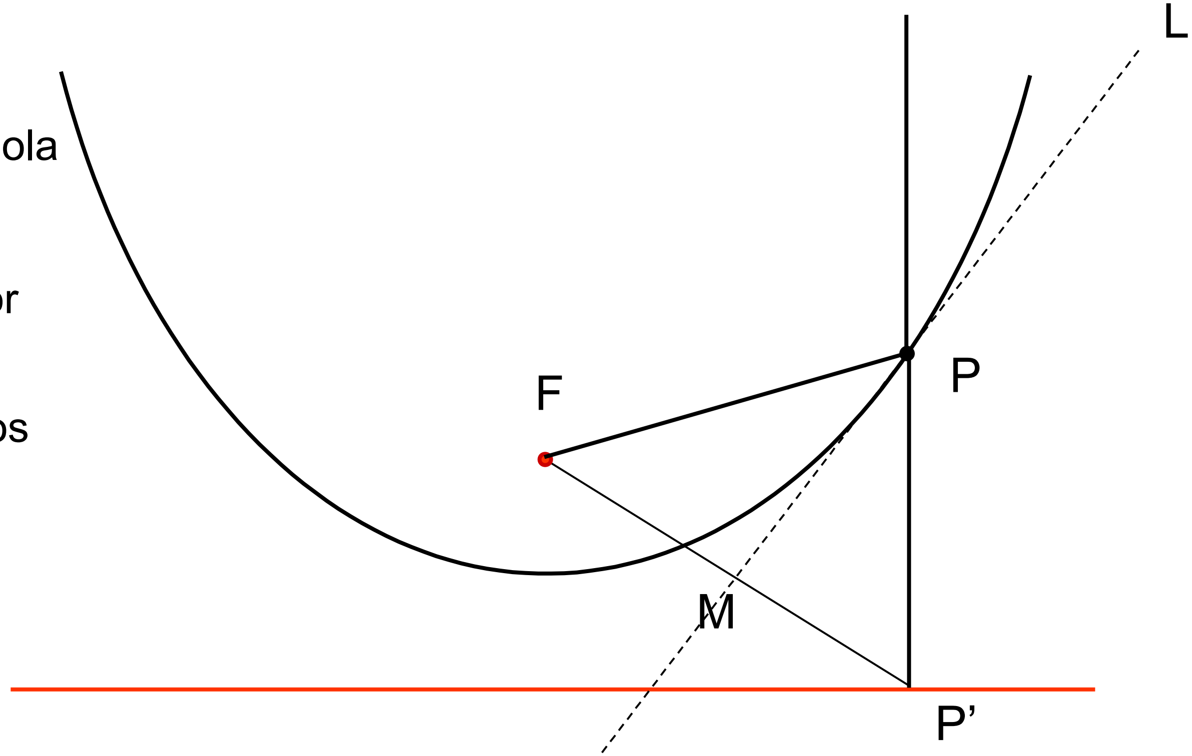
Parábola

Propiedad focal: *Los rayos paralelos al eje que se reflejan en la parábola se concentran en el foco.*

Demostración. (2)

Sea P un punto de la parábola y P' su proyección a la directriz. Consideremos la línea L que pasa por P y por el punto medio M de F y P'.

Como PF = PP' entonces los triángulos FPM y P'PM son semejantes.



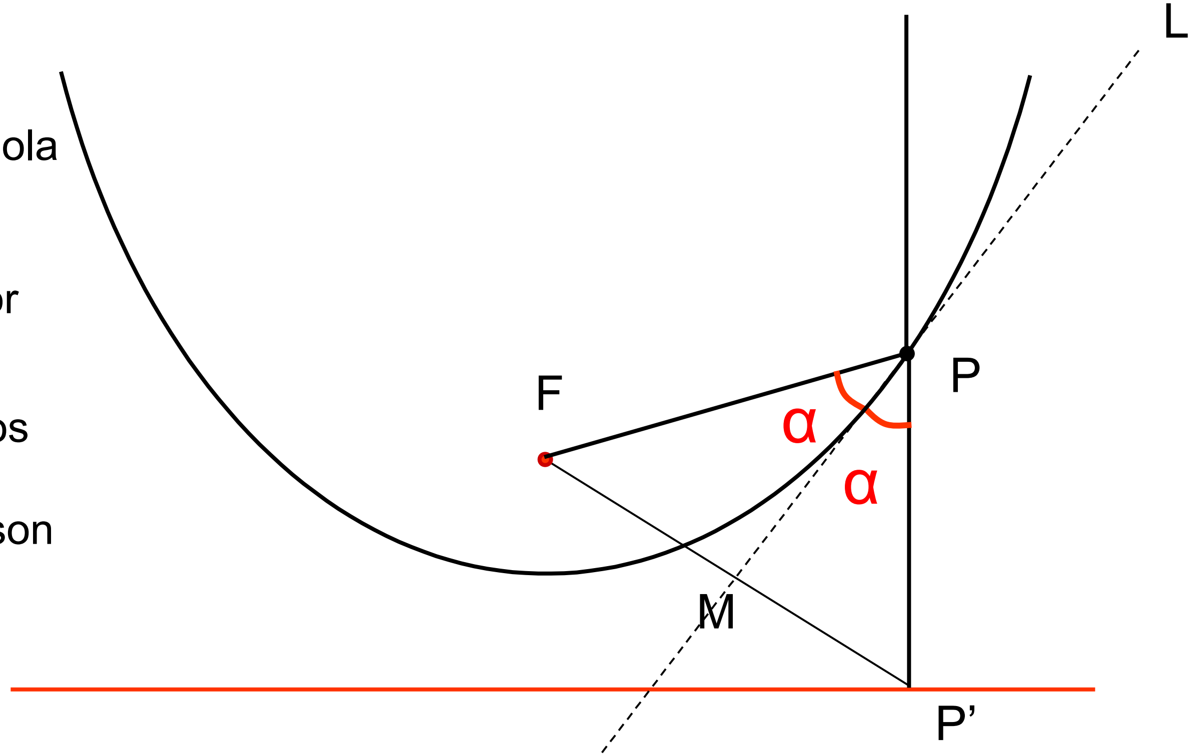
Parábola

Propiedad focal: *Los rayos paralelos al eje que se reflejan en la parábola se concentran en el foco.*

Demostración. (2)

Sea P un punto de la parábola y P' su proyección a la directriz. Consideremos la línea L que pasa por P y por el punto medio M de F y P'.

Como PF = PP' entonces los triángulos FPM y P'PM son semejantes, y los ángulos son iguales'.



Parábola

Propiedad focal: *Los rayos paralelos al eje que se reflejan en la parábola se concentran en el foco.*

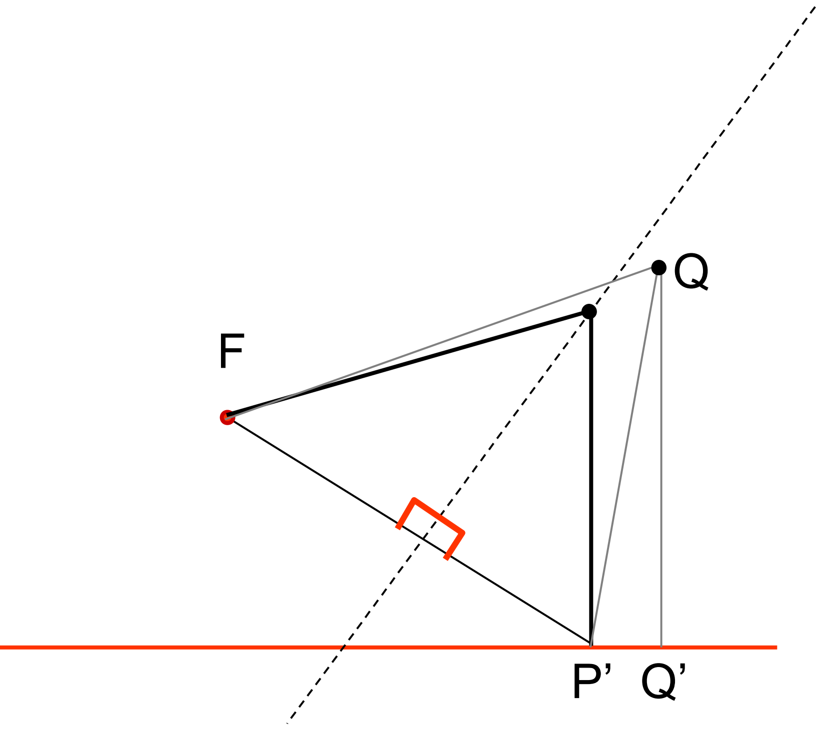
Demostración. (3)

Falta ver que L es la línea tangente. Para esto, basta ver que todos los puntos de la parábola quedan del mismo lado de L.

Como L es la mediatriz del segmento PF', un punto Q a la derecha de L está mas lejos de F que de P así que:

FQ > QP' > QQ'

Por lo tanto Q no está en la parábola.

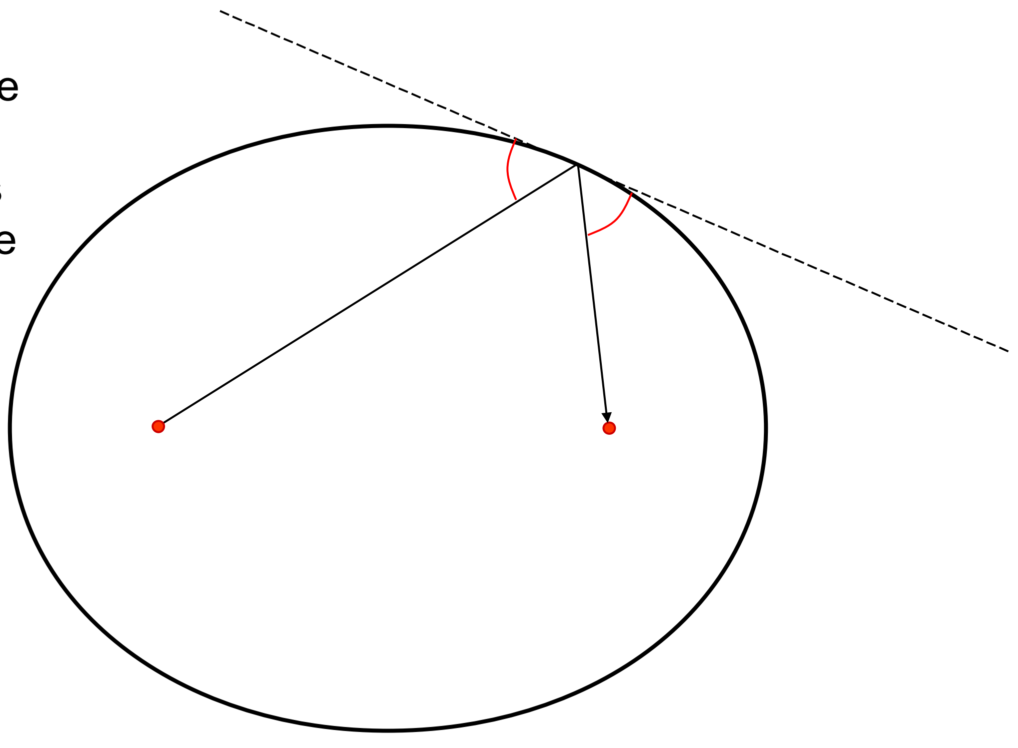


Elipse

Propiedad focal: Los rayos que salen de un foco y se reflejan en la elipse se concentran en el otro foco.

Demostración:

(1) Hay que ver que la tangente a la elipse en un punto P forma ángulos iguales con las líneas que van de los focos a P.

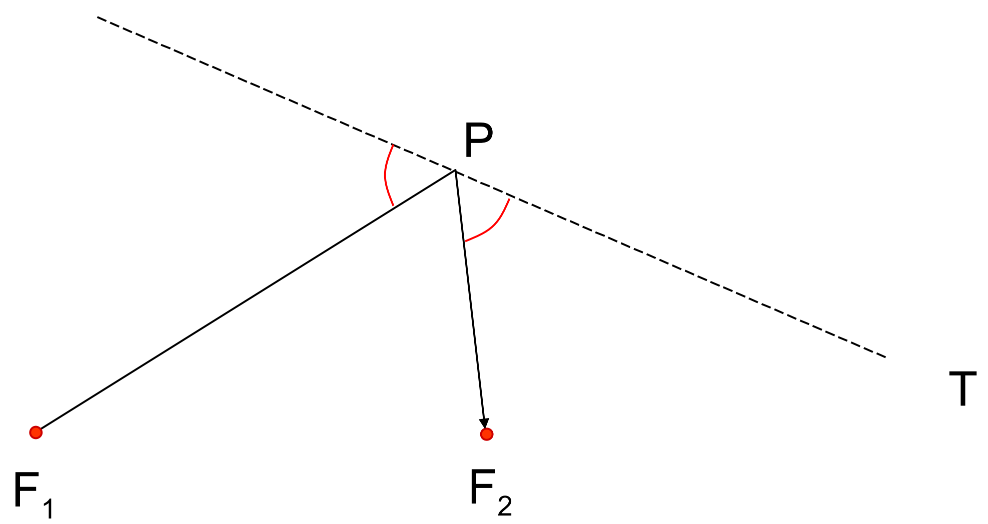


Elipse

Propiedad focal: Los rayos que salen de un foco y se reflejan en la elipse se concentran en el otro foco.

Demostración:

(2) Tomemos la recta T que pasa por P y forma ángulos iguales con las líneas que van a los focos. Si mostramos que todos los puntos de la elipse quedan del mismo lado de T, de modo que T solo toca a la elipse en el punto P, entonces T debe ser la tangente.

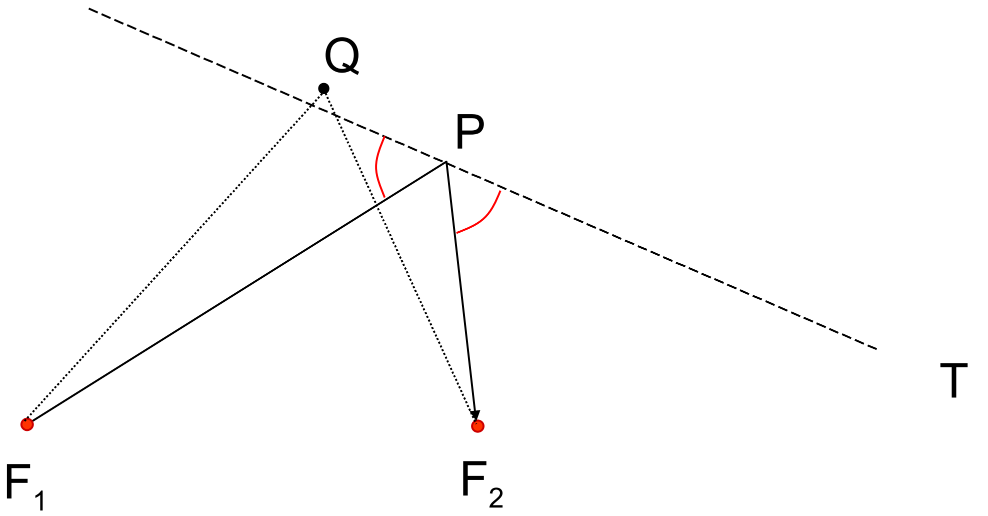


Elipse

Propiedad focal: Los rayos que salen de un foco y se reflejan en la elipse se concentran en el otro foco.

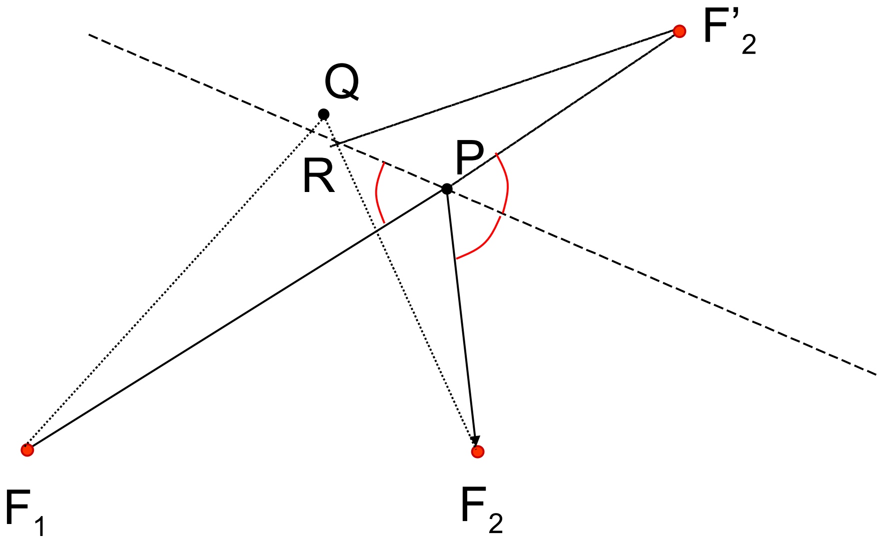
Demostración:

(3) Ahora basta ver que para cualquier punto Q del otro lado de T la suma de las distancias de Q a los focos es mayor que la suma de las distancias de P a los focos.



Elipse

Propiedad focal: Los rayos que salen de un foco y se reflejan en la elipse se concentran en el otro foco.

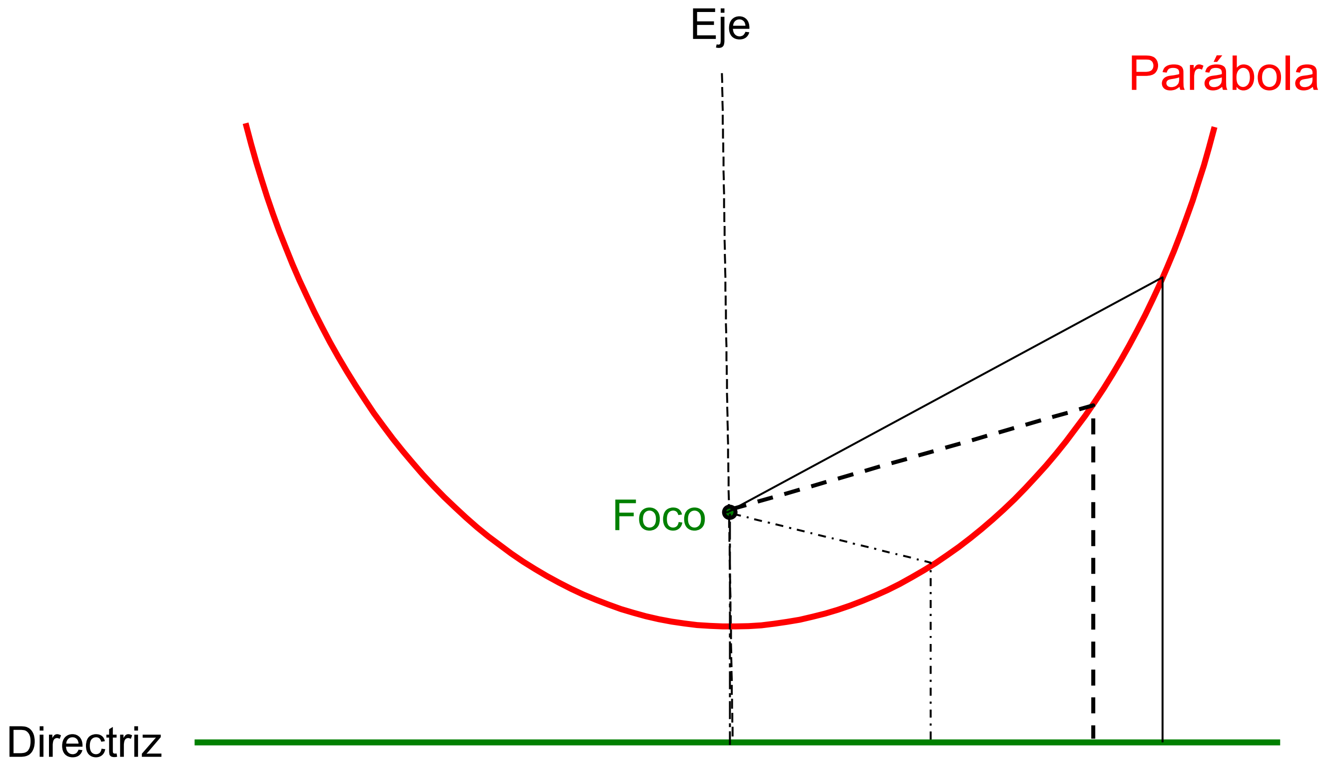


Demostración:

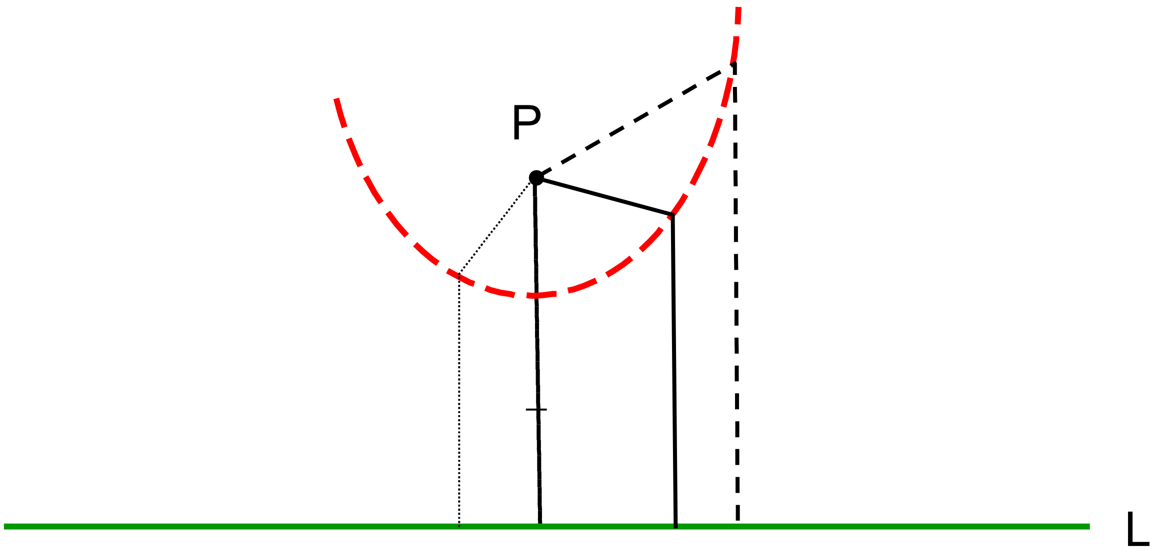
(4) Si reflejamos PF_2 y QF_2 en la recta T vemos que

$$F_1Q + QF_2 = F_1Q + QR + RF'_2 > F_1F'_2 = F_1P + PF_2$$

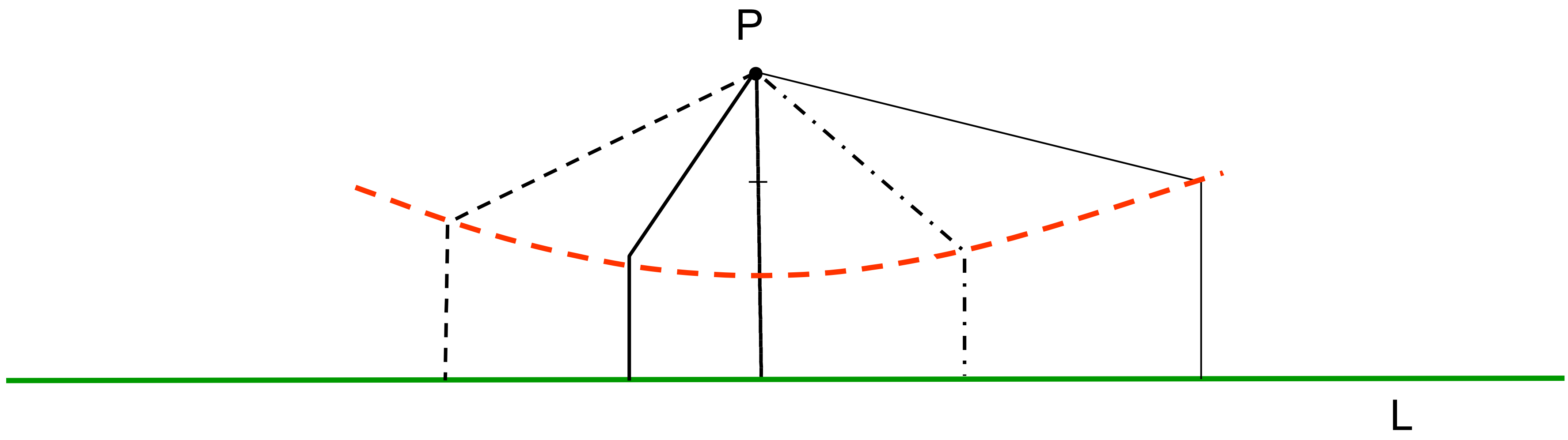
Ya sabemos que los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo es igual a su distancia a una recta forman una parábola:



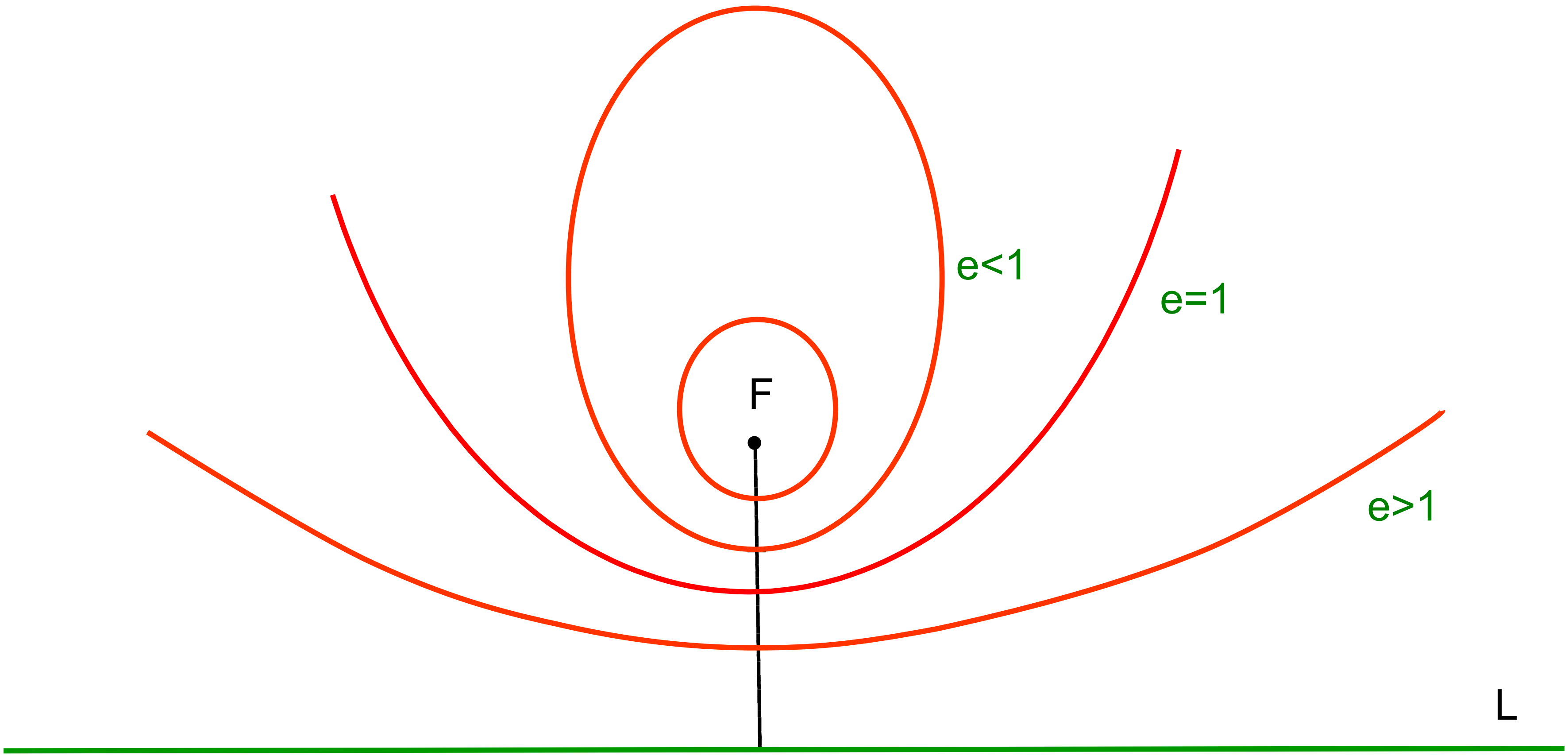
¿Qué curva forman los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo es *la mitad* de su distancia a una recta?



¿Y qué curva forman los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo es *el doble* de su distancia a una recta?



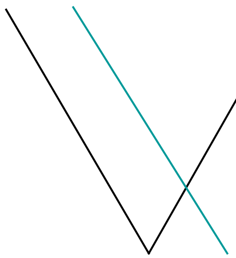
Teorema. Los puntos del plano cuya distancia a un punto F es igual a e veces su distancia a una recta L forman una sección cónica, que es una elipse si e <1, una parábola si e =1 y una hipérbola si e >1.

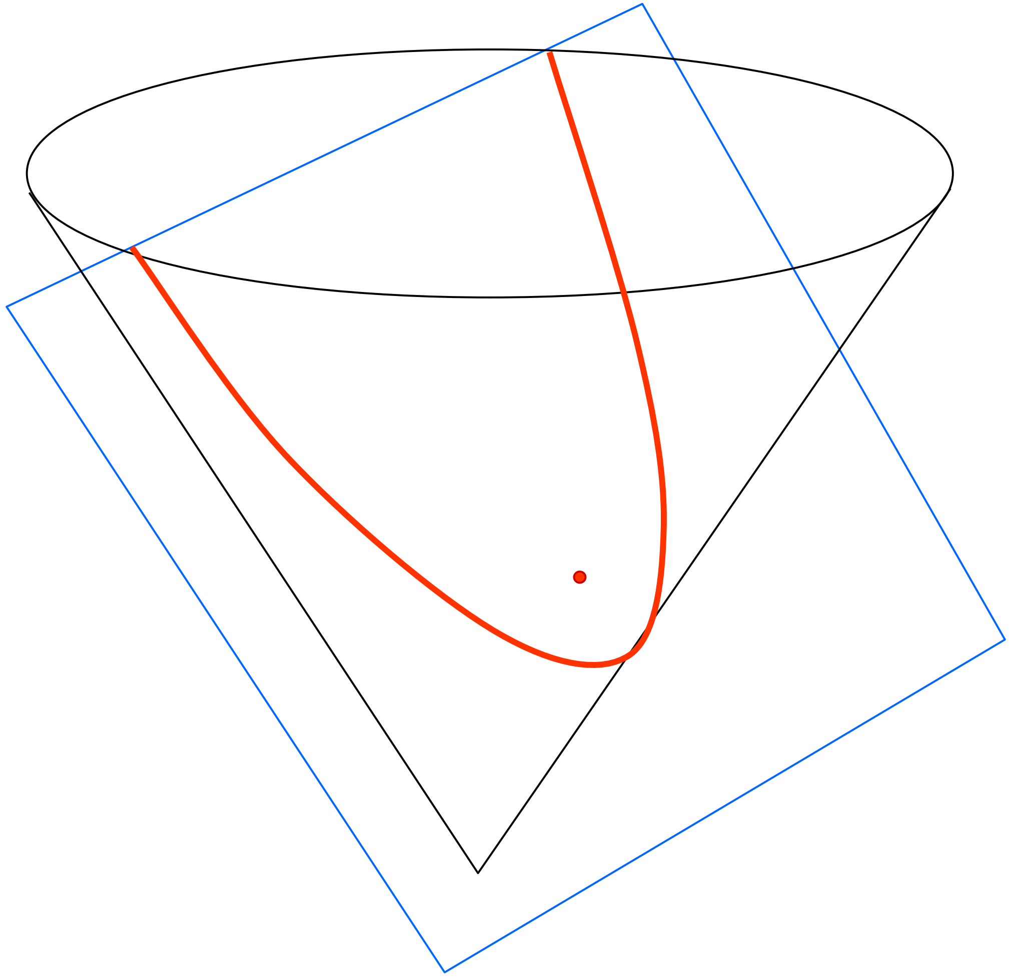


A la constante e se le llama la *excentricidad* de la cónica.

Cónicas

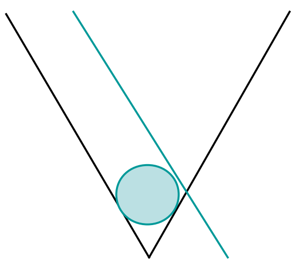
Al cortar un cono con un plano de la misma inclinación se obtiene una parábola.

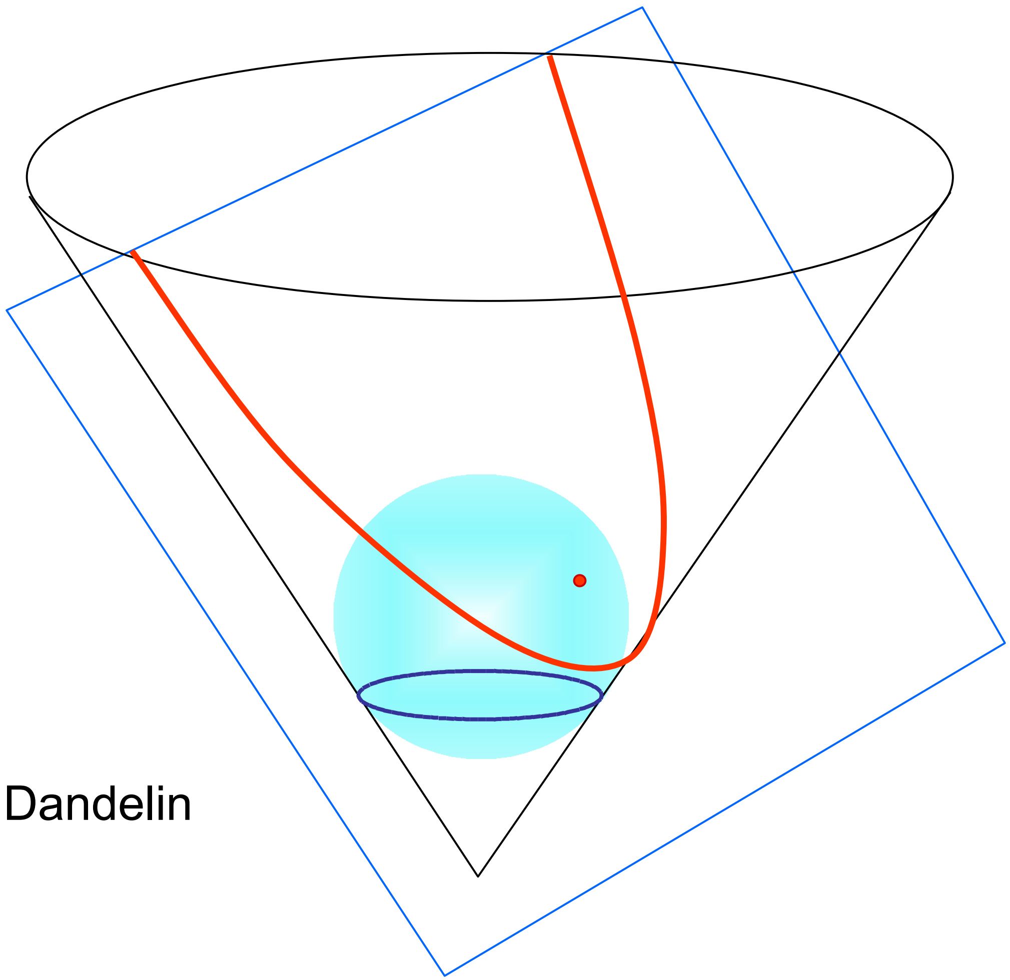




Cónicas

Demostración.

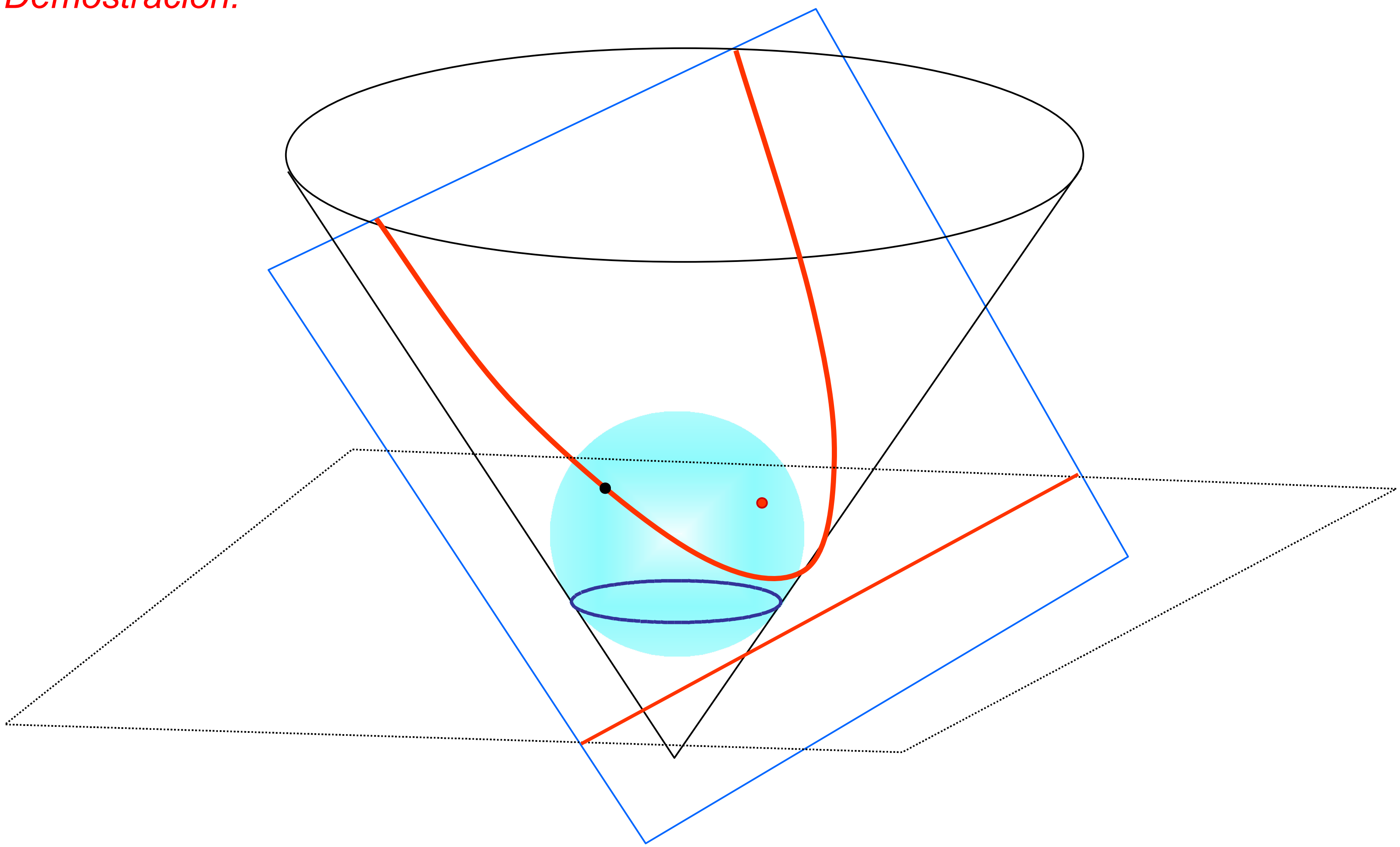




Esfera de Dandelin

Cónicas

Demostración.

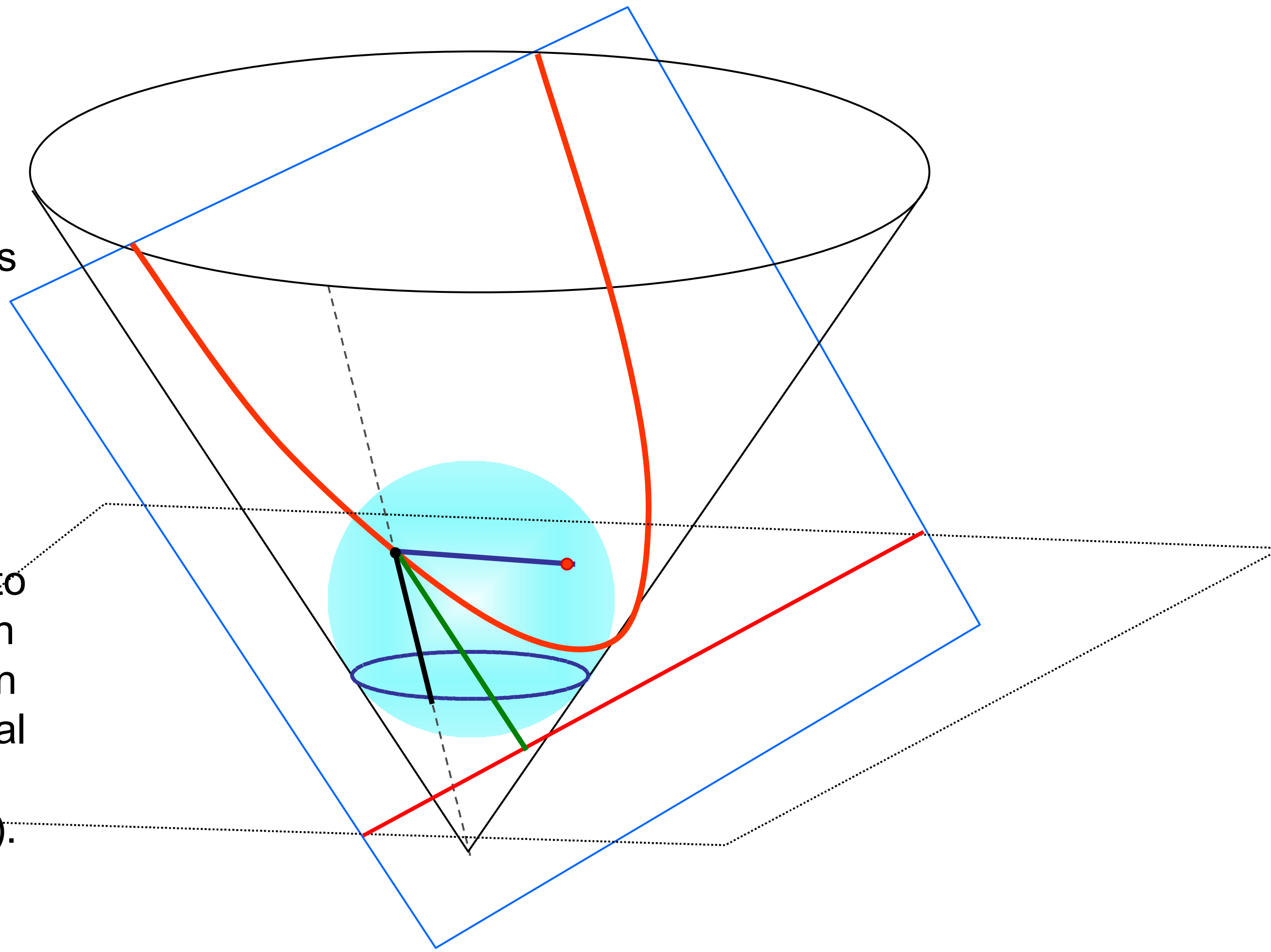


Cónicas

Demostración.

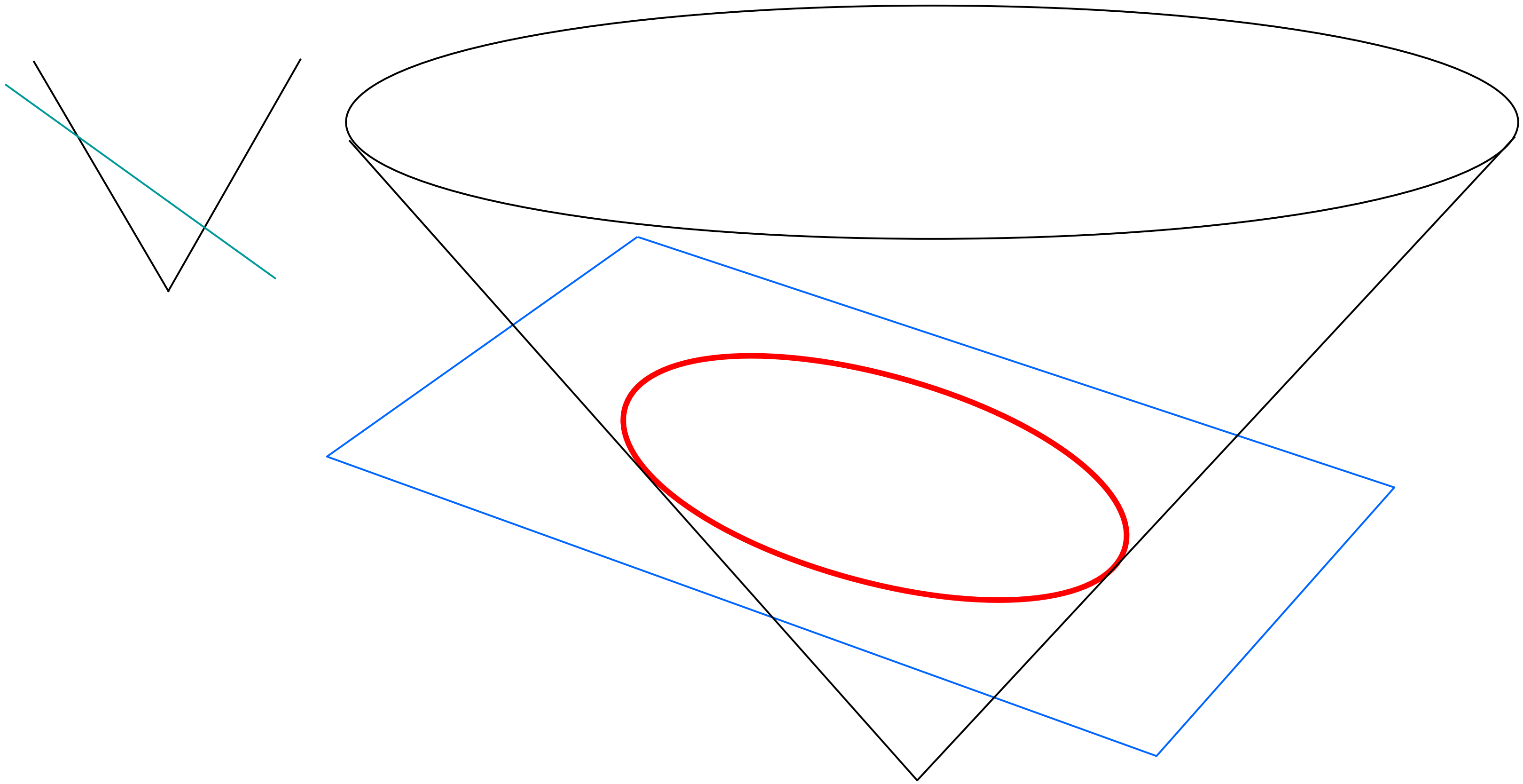
El segmento azul y el negro son iguales porque son tangentes a la esfera desde el mismo punto.

El segmento negro es igual al segmento verde porque tienen la misma inclinación respecto a la vertical (la inclinación del cono y la del plano).

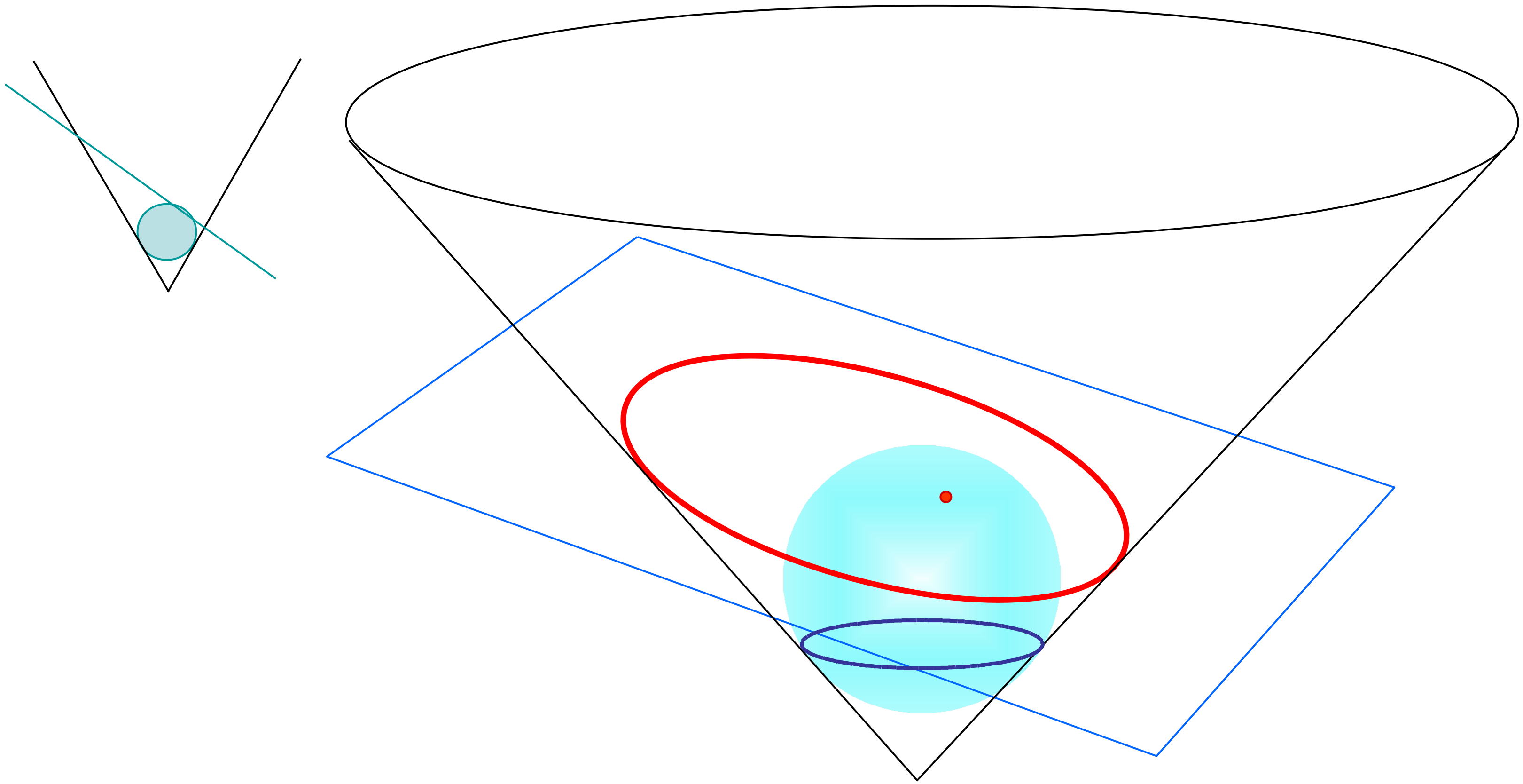


Cónicas

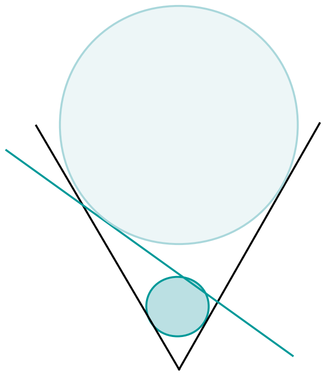
Al cortar un cono con un plano de menor inclinación se obtiene una elipse.

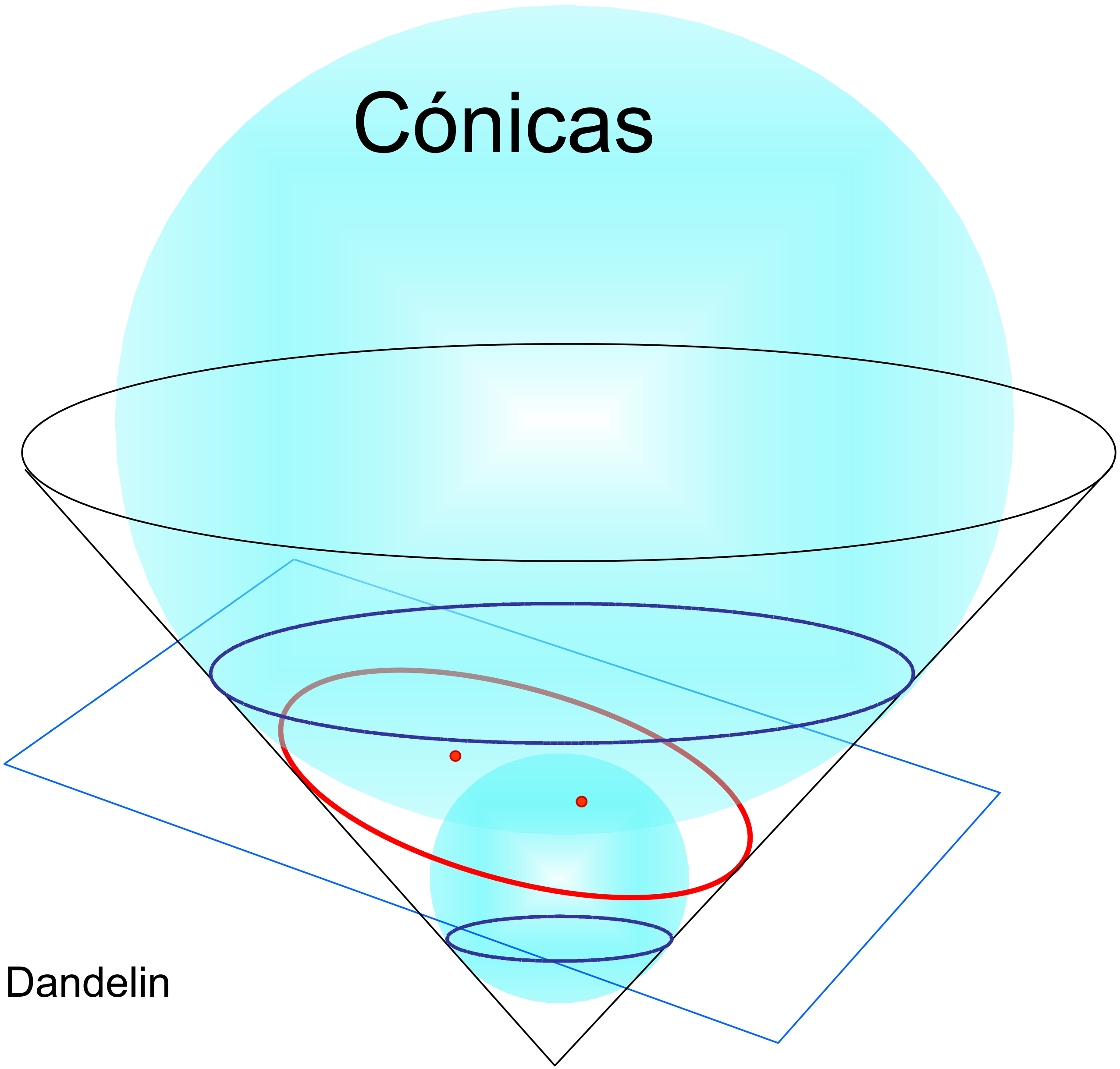


Cónicas



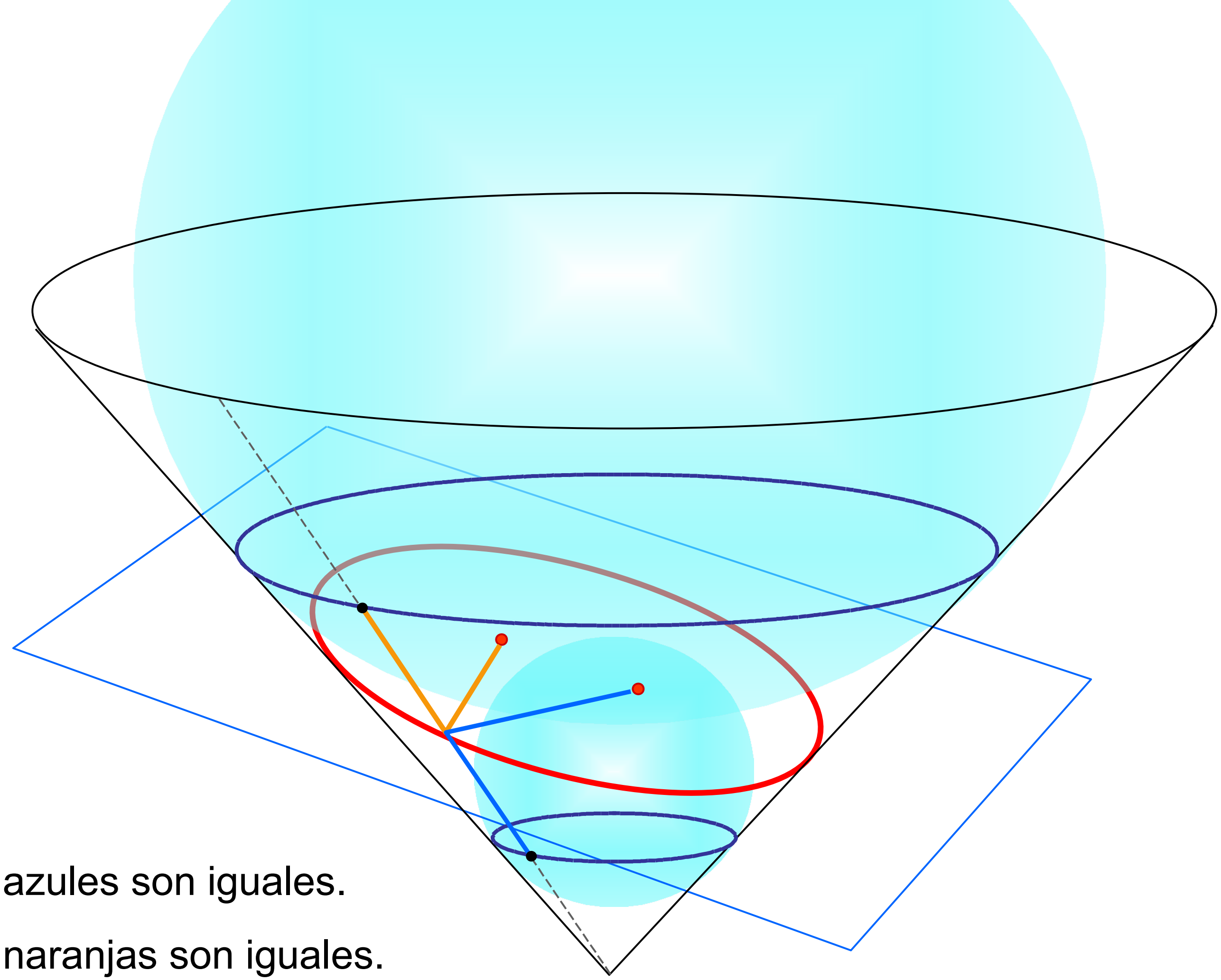
Cónicas





Esferas de Dandelin

Cónicas

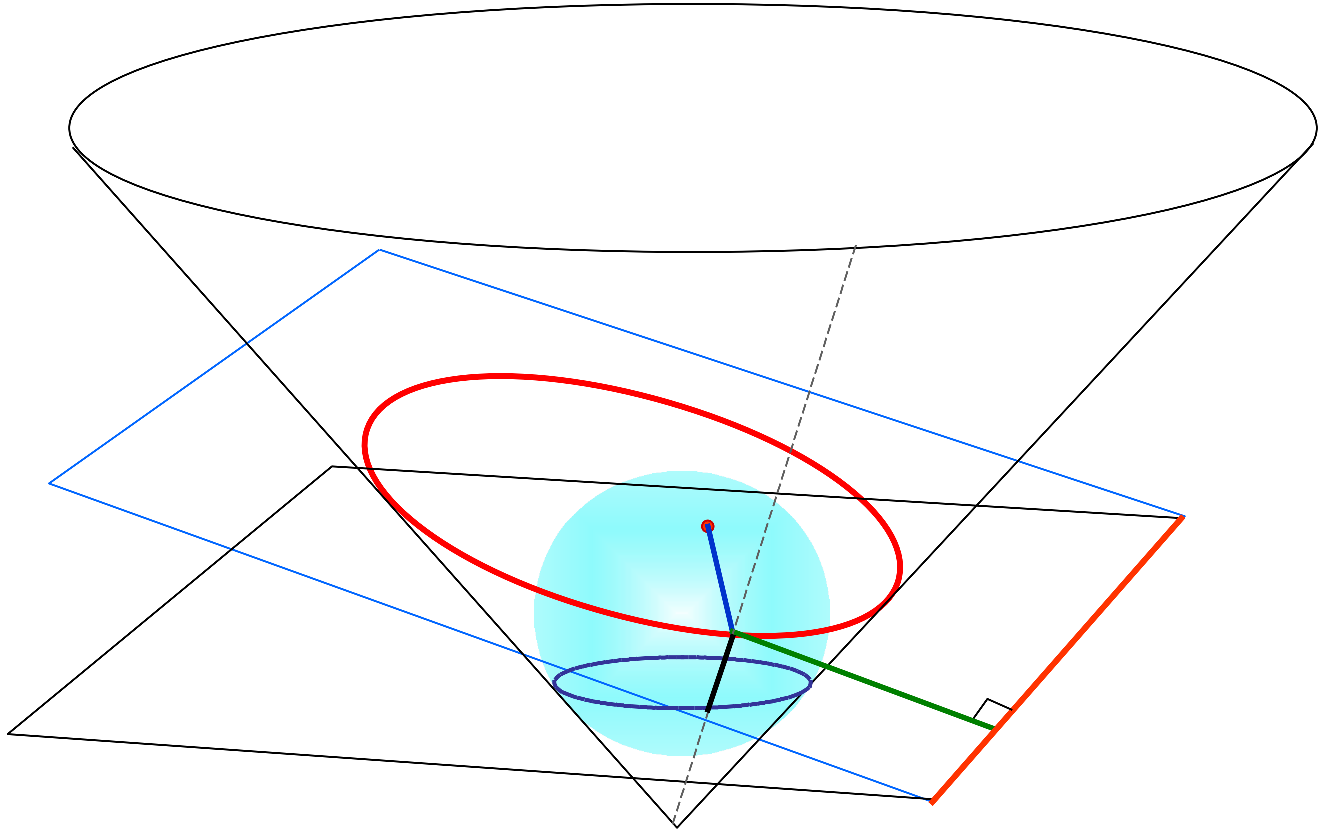


Los segmentos azules son iguales.

Los segmentos naranjas son iguales.

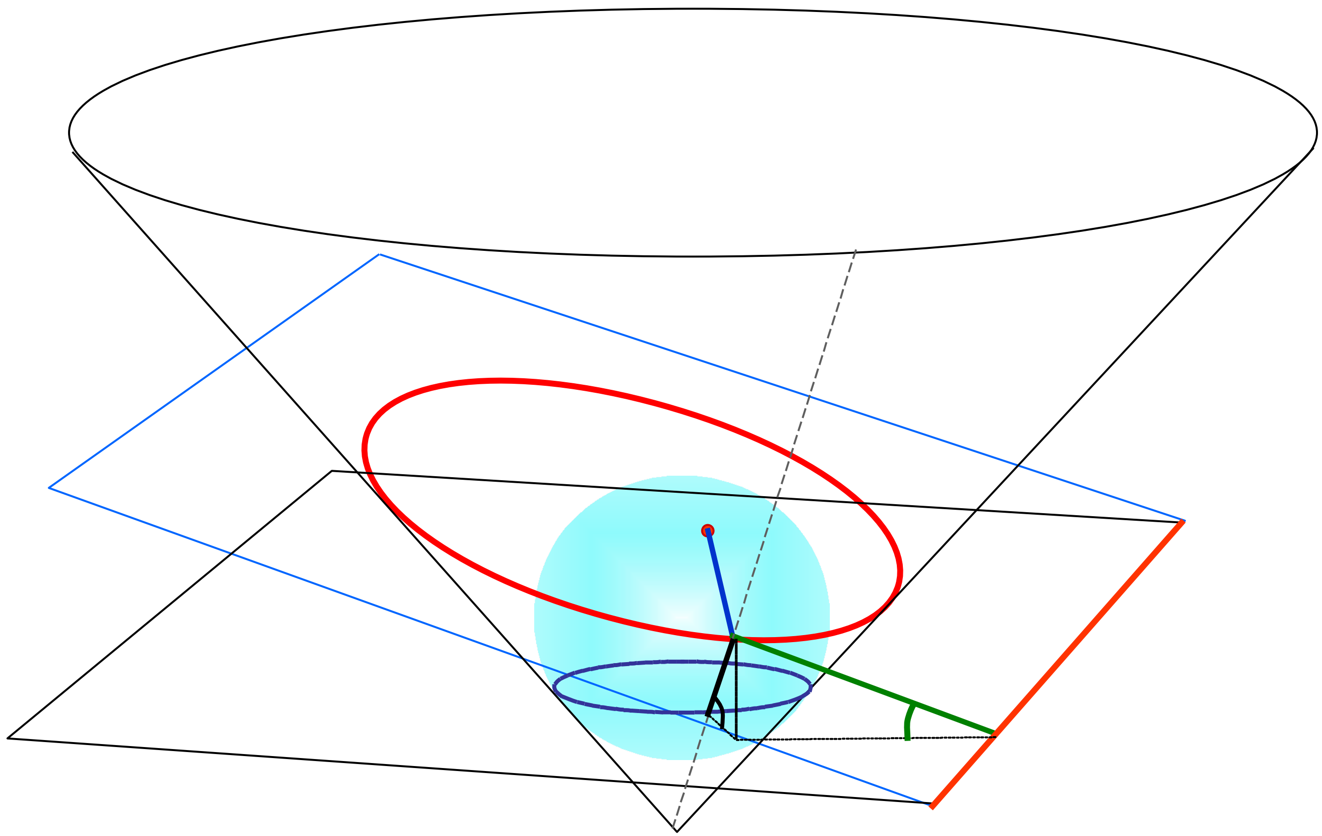
Así que la suma de las distancias de un punto de la curva a los puntos rojos es igual a la longitud del segmento de recta en el cono entre los dos círculos punteados.

Cónicas

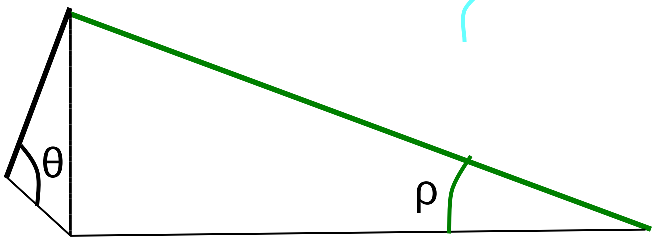


Tomemos un punto de la curva y el segmento verde que mide su distancia a la recta roja.
El segmento azul y el negro son iguales porque ambos son tangentes a la esfera.

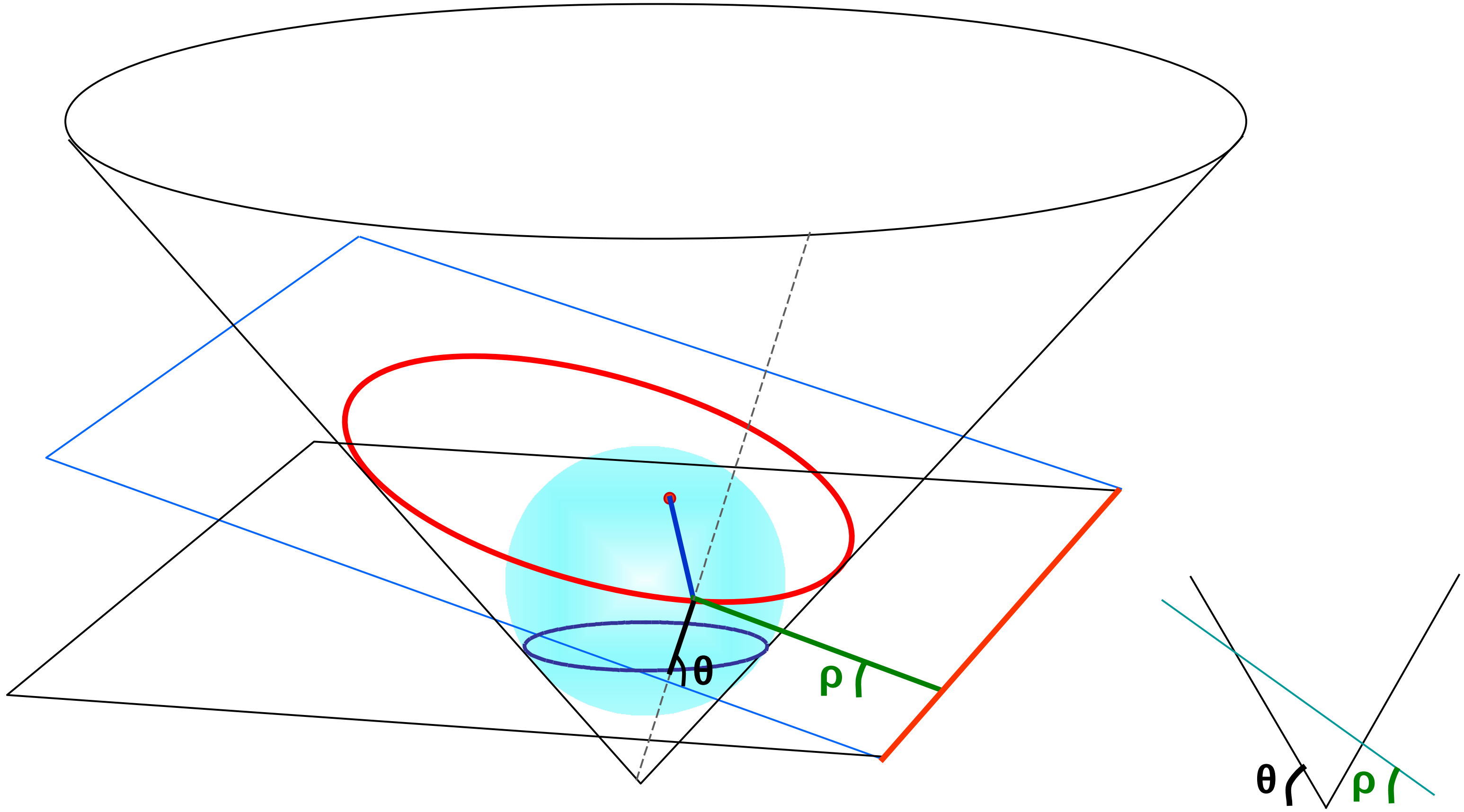
Cónicas



AZUL / **VERDE** = **NEGRO** / **VERDE** = sen ρ / sen θ



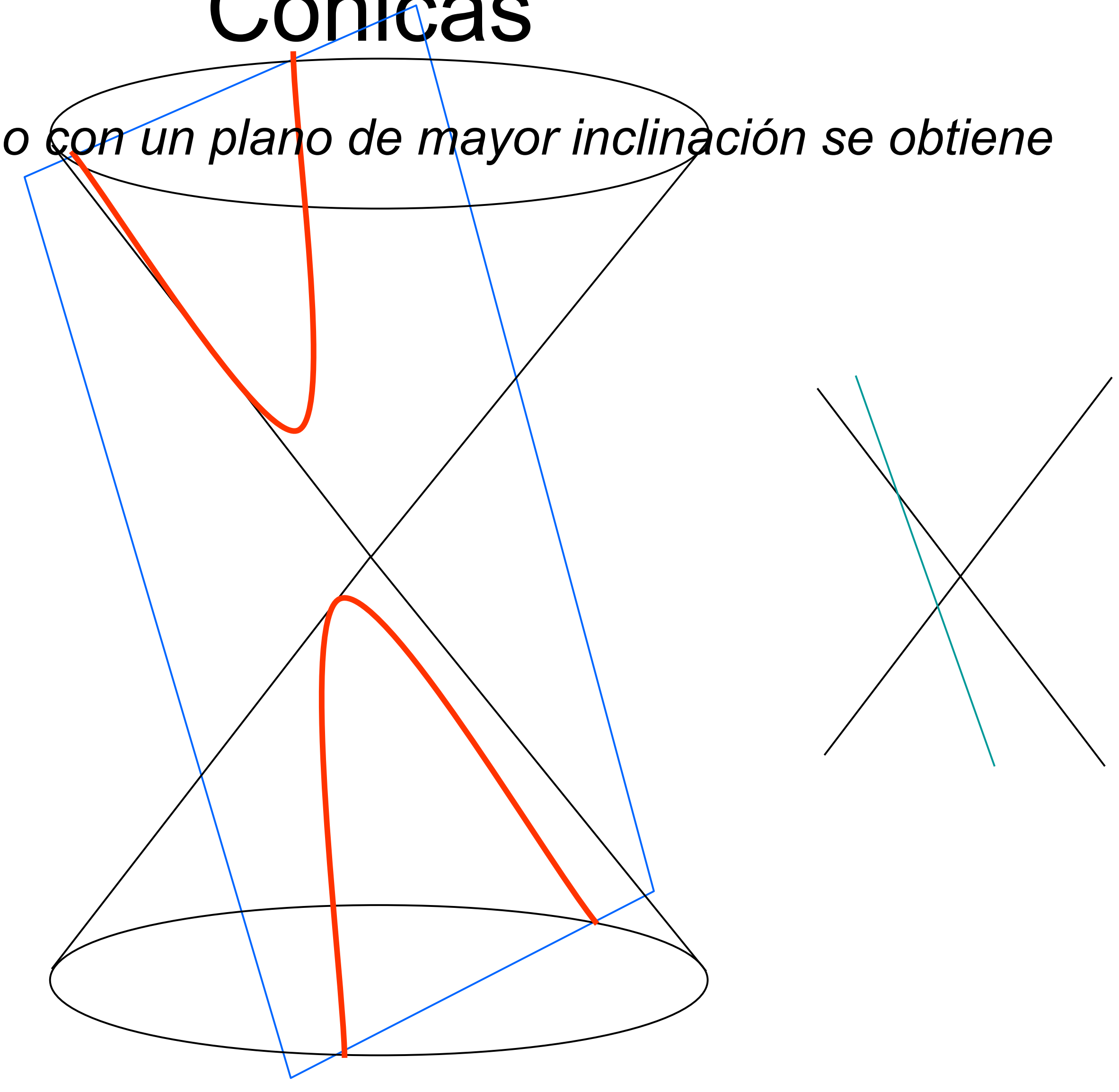
Cónicas



Corolario: La elipse tiene excentricidad sen **ρ** */sen* **θ** *donde* **ρ** *y* **θ** *son los ángulos de inclinación del plano y el cono respectivamente.*

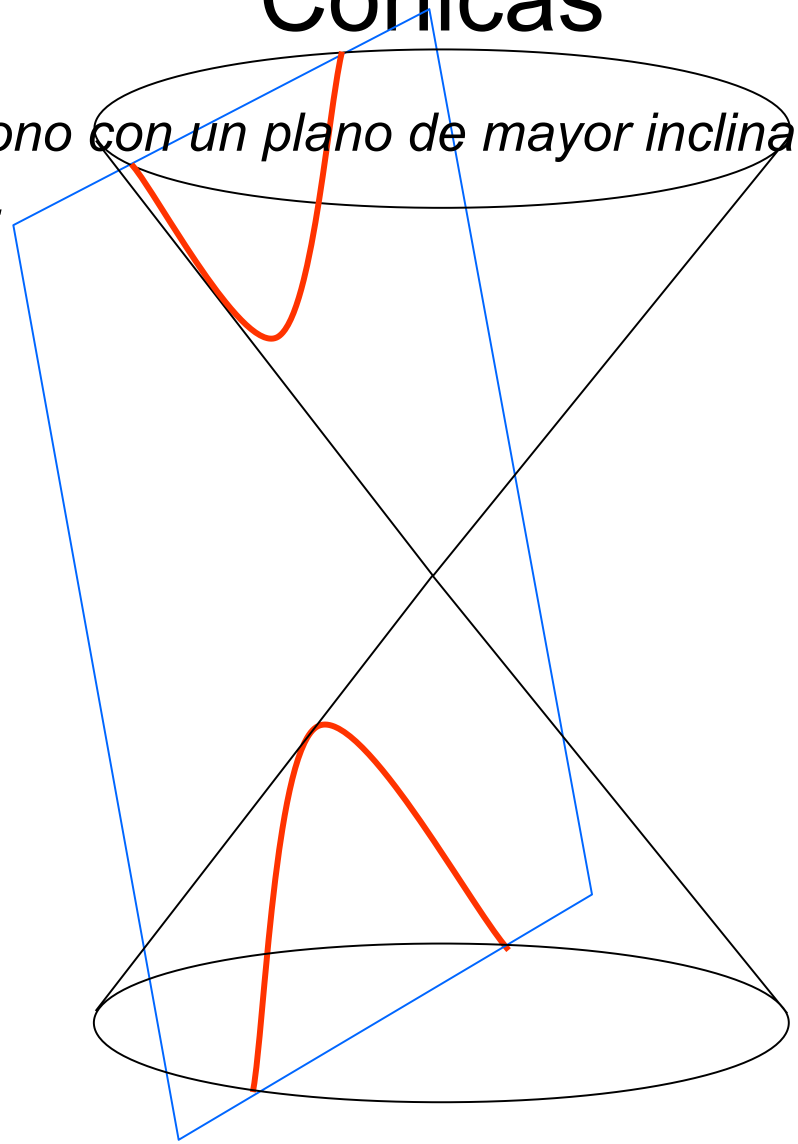
Cónicas

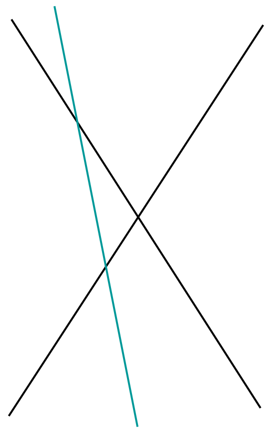
Al cortar un cono con un plano de mayor inclinación se obtiene una hipérbola.



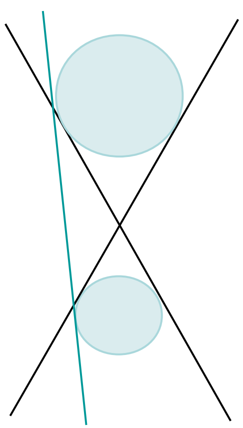
Cónicas

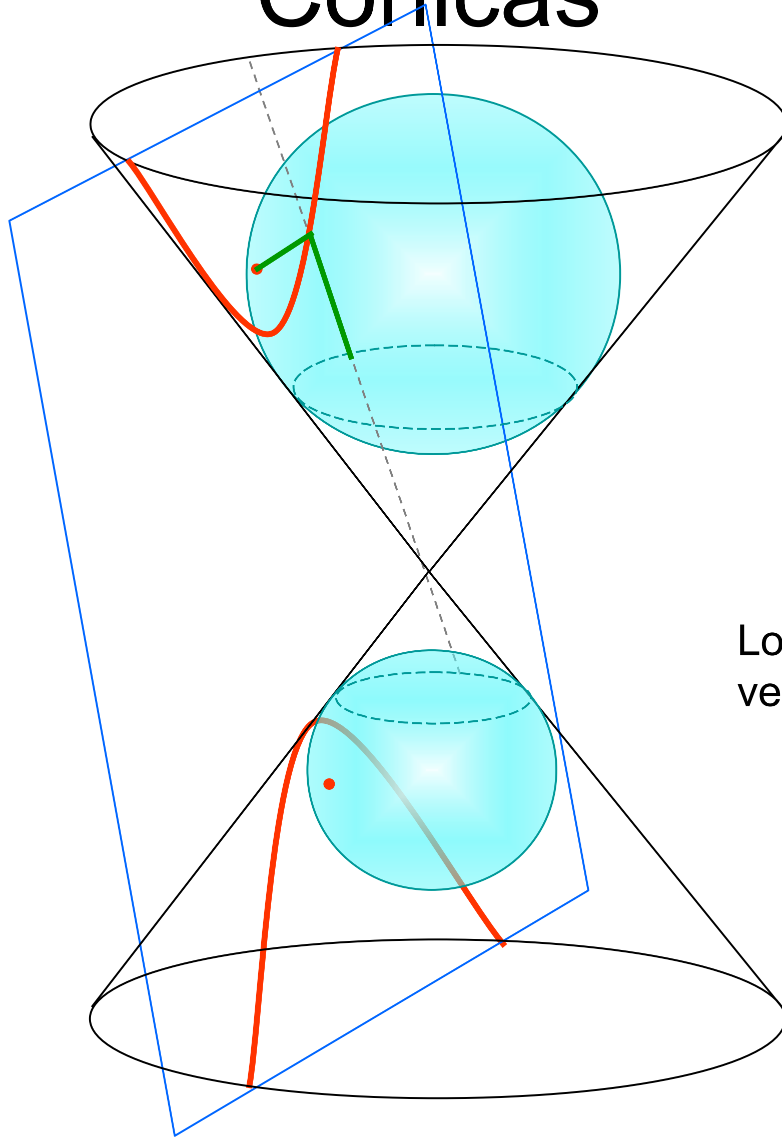
Al cortar un cono con un plano de mayor inclinación se obtiene una hipérbola.





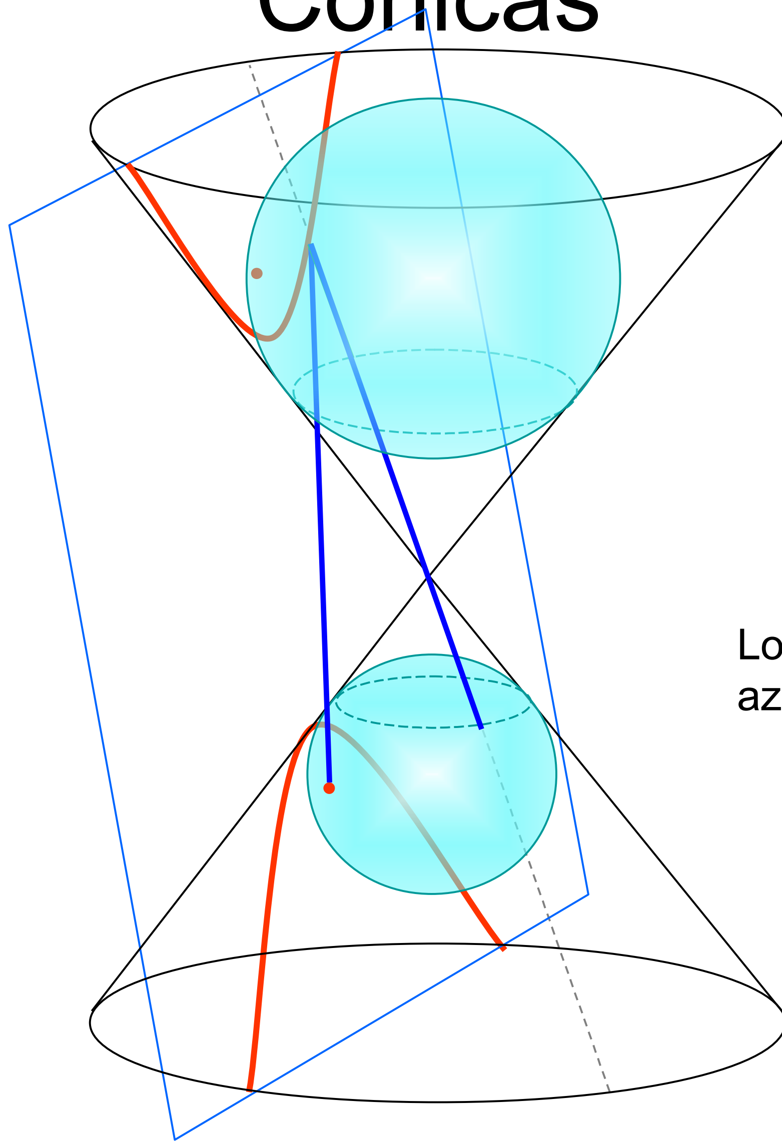
Cónicas





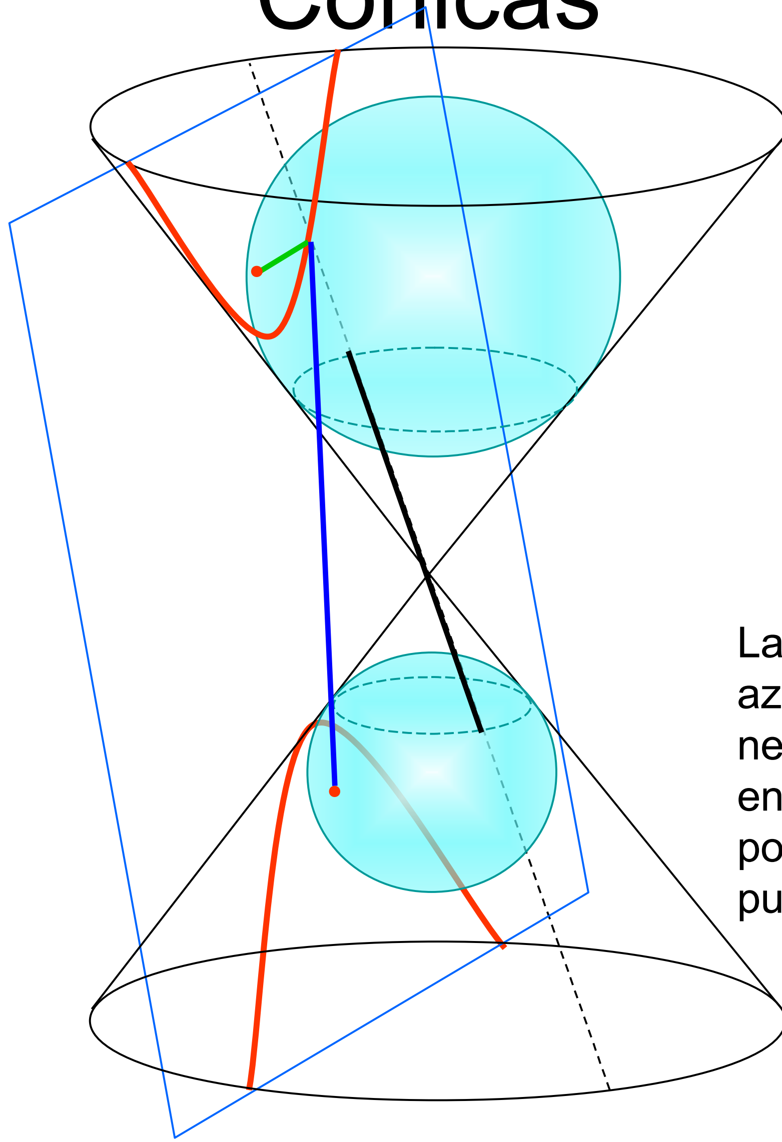
Los segmentos verdes son iguales.

Cónicas



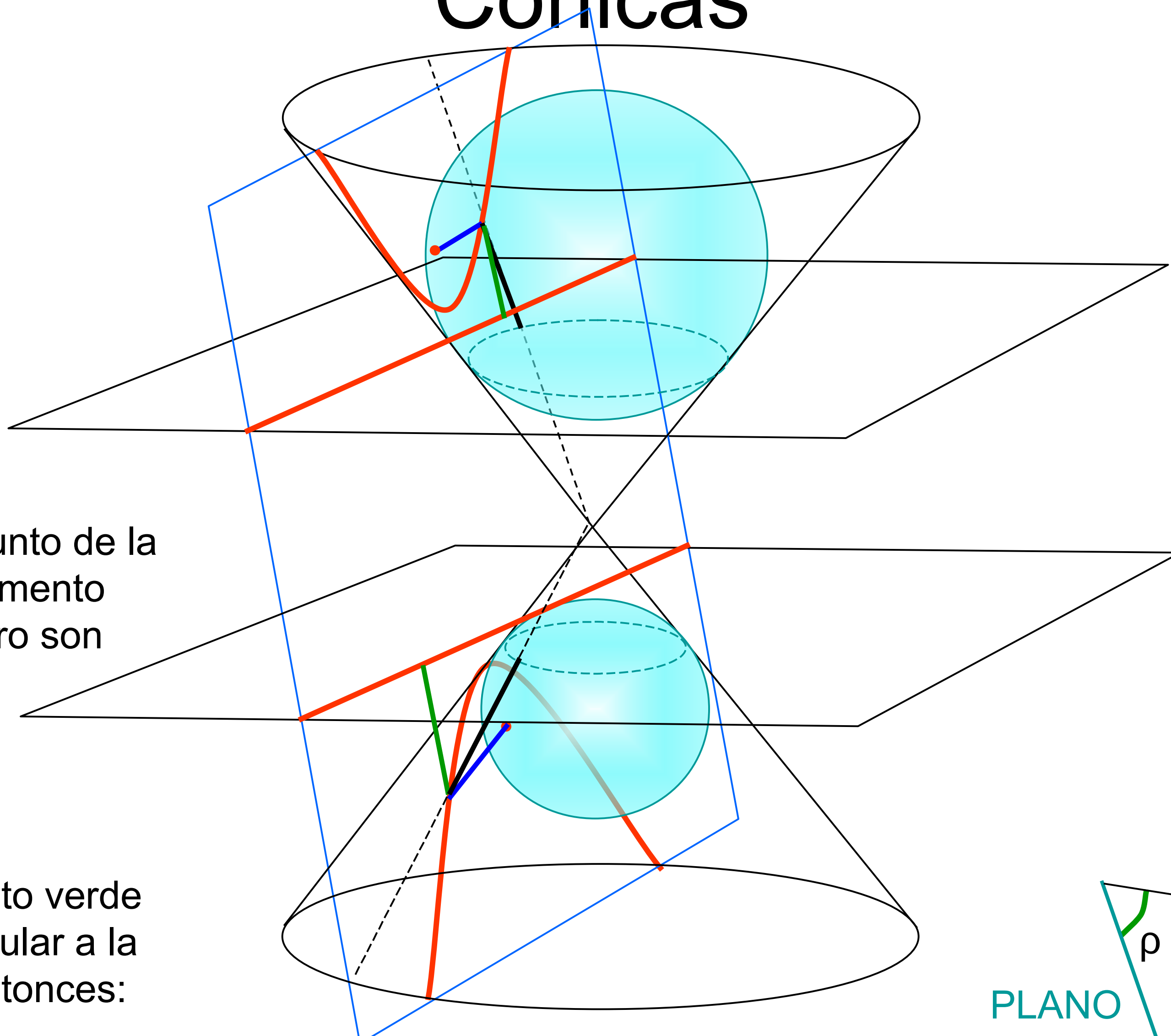
Los segmentos azules son iguales.

Cónicas



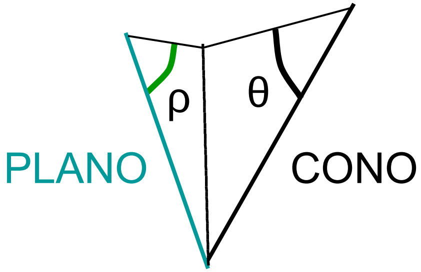
La diferencia entre el segmento azul y el verde es el segmento negro, que mide la separación entre los círculos en el cono (y por lo tanto no depende del punto de la curva).

Cónicas



Para cada punto de la curva, el segmento azul y el negro son iguales.

Si el segmento verde es perpendicular a la línea roja, entonces:



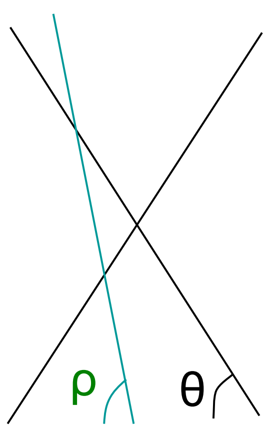
AZUL / **VERDE** = **NEGRO** / **VERDE** = sen ρ / sen θ

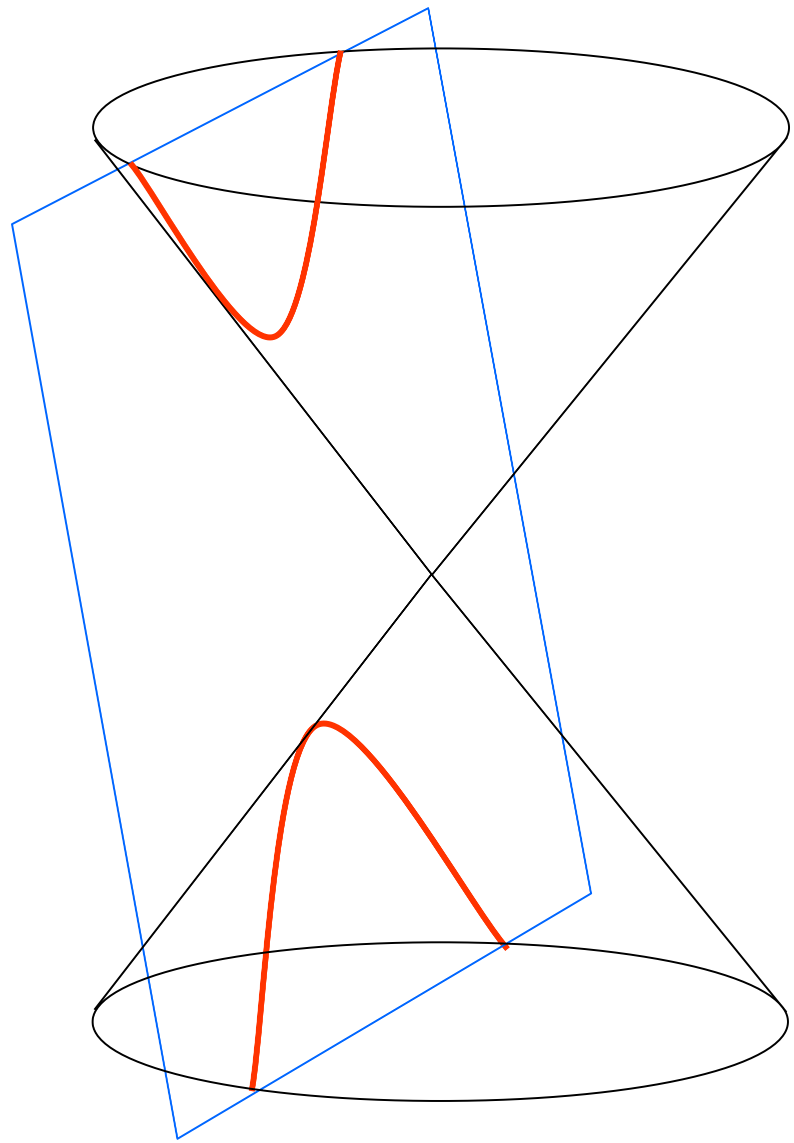
Cónicas

Corolario: La hipérbola tiene excentricidad

sen ρ / sen θ

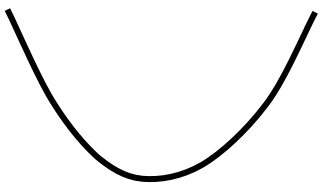
donde ρ y θ son los ángulos de inclinación del plano y el cono respectivamente.



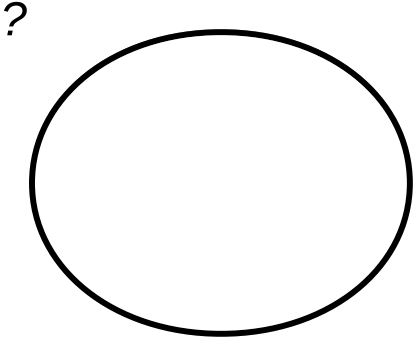


TAREA 7/8

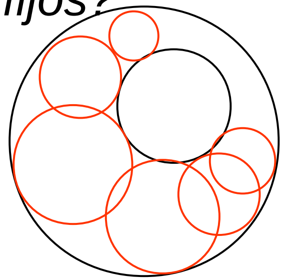
1. *El corte transversal de una antena parabólica se ve así. Localiza el foco.*



2. *Un cuarto elíptico mide 10m de largo y 8m de ancho ¿Cuánto suman las distancias de los puntos de la elipse a los focos?*



3. *¿Qué curva forman los centros de todos los círculos tangentes a dos círculos fijos?*



4. *¿Cómo demostrarías que dos cónicas con distinta excentricidad tienen distinta forma? (¿no podría pasar que dos curvas obtenidas de cortar distintos conos sean iguales pero sus focos y excentricidades no lo sean?)*