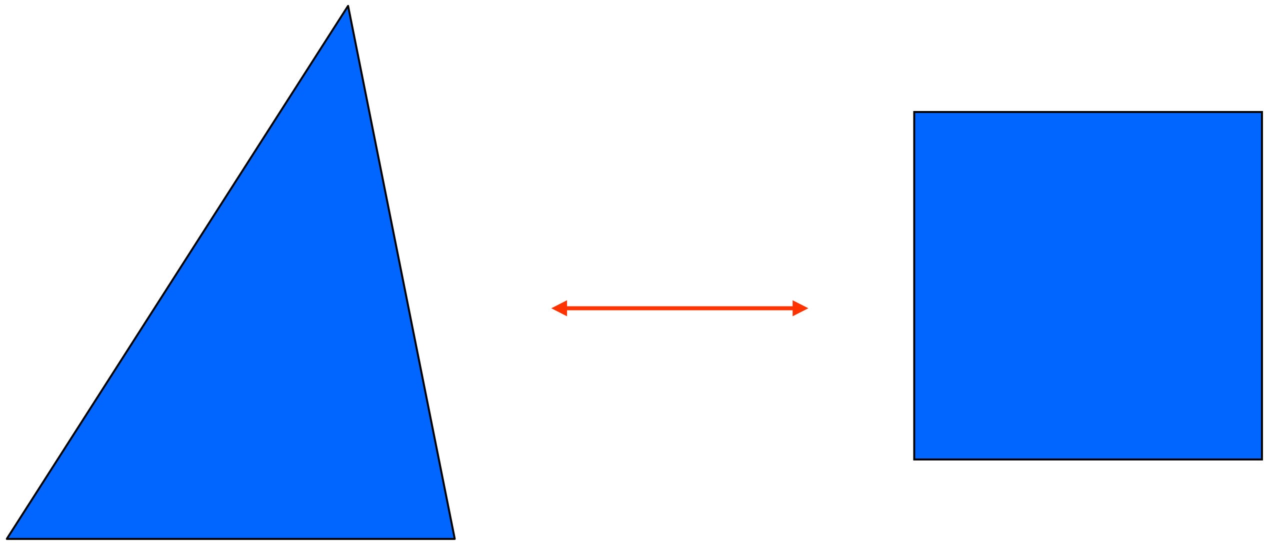
Clase 18

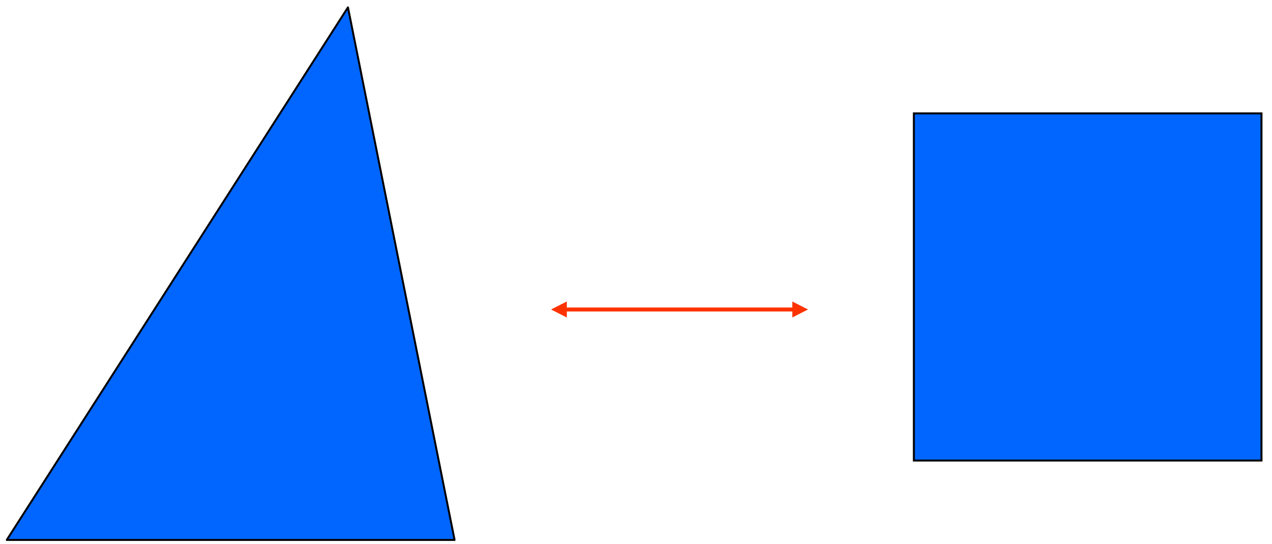
Invariantes

¿Qué es el área?



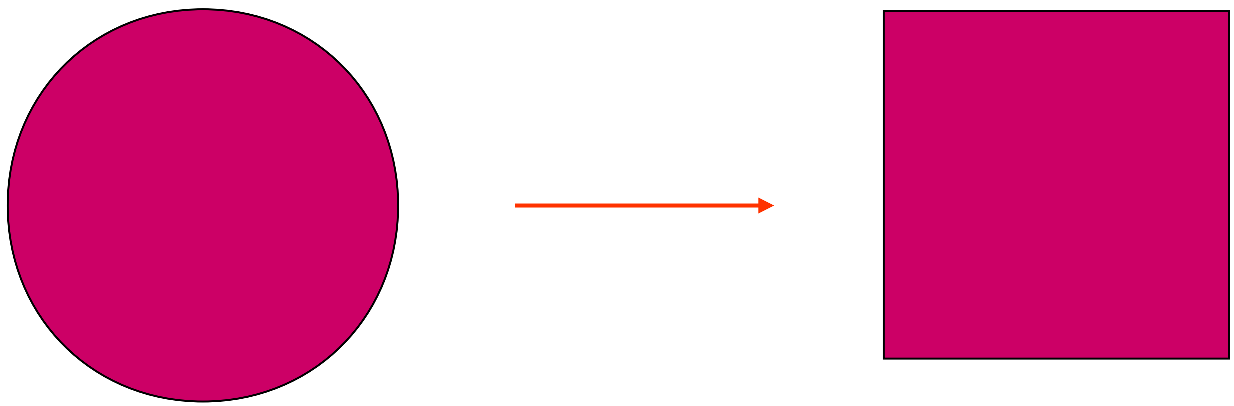
Dadas dos figuras planas con la misma área ¿será posible recortar una en pedazos y usarlos para armar la otra?

Teorema: Dados dos polígonos con la misma área, siempre se puede recortar uno para armar el otro.

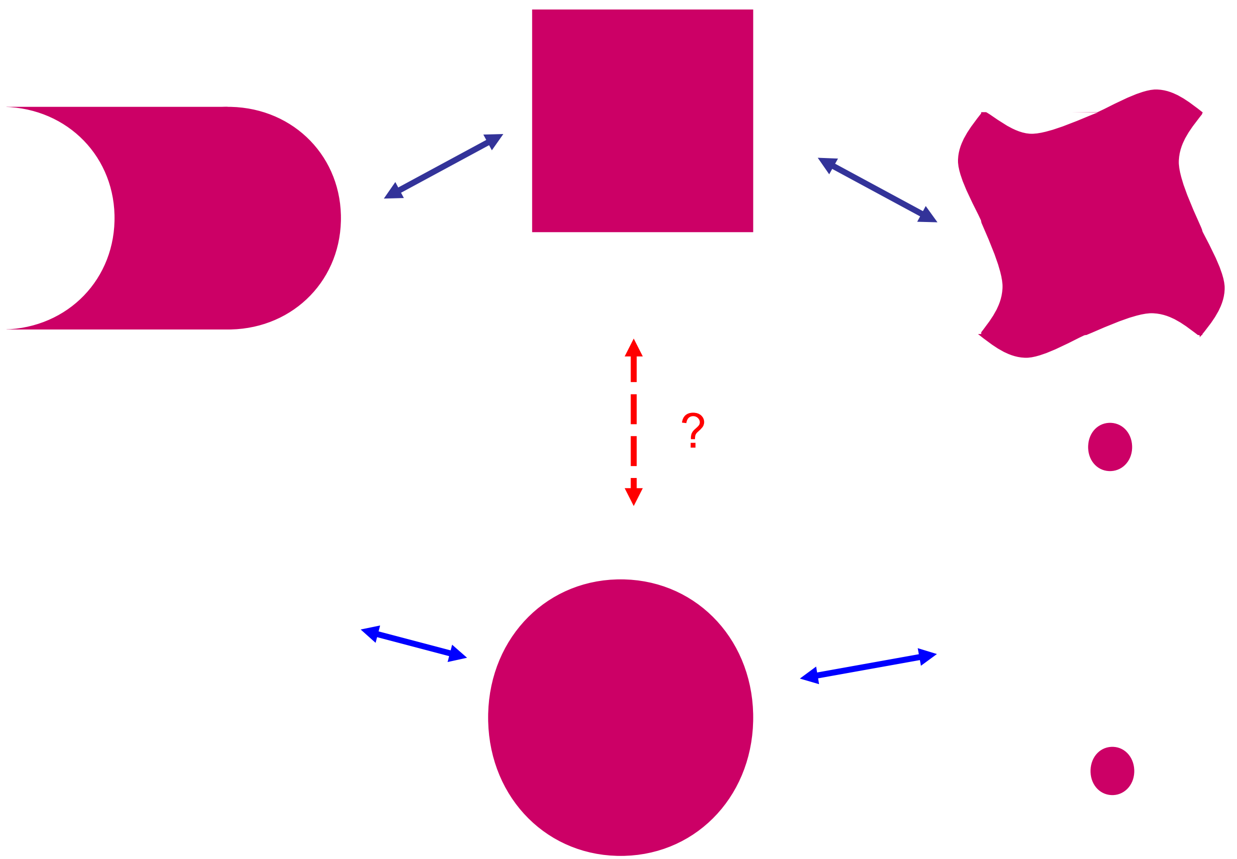


Dem. Tarea.

¿Qué es el área?



Dadas dos figuras con la misma área
¿es posible recortar una para armar la otra?



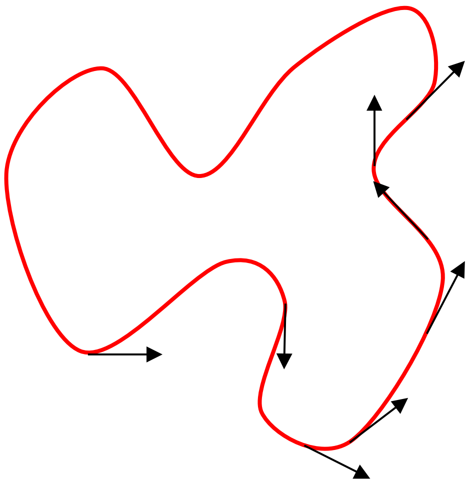
Afirmación: Es imposible recortar una figura suave (sin esquinas) para obtener un polígono.

Teorema: Es imposible recortar una figura suave (sin esquinas) para obtener un polígono.

Para demostrar esto hay que hallar algo que no cambie al cortar y volver a pegar la figura: un *invariante de disección*.

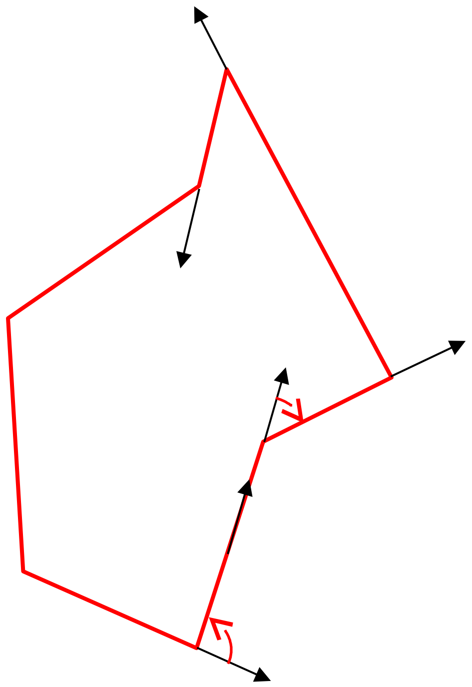
Un ejemplo de un invariante así es el área, pero necesitamos uno que distinga figuras suaves de figuras con esquinas.

Para dar el invariante, tomemos un vector tangente a una curva y veamos como cambia su dirección al recorrer la curva:



Contornos suaves

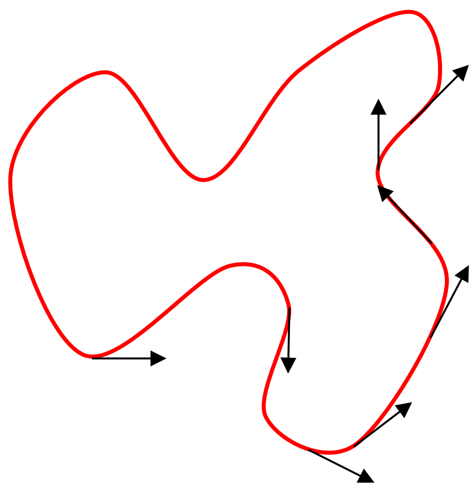
La dirección del vector tangente va cambiando paulatinamente



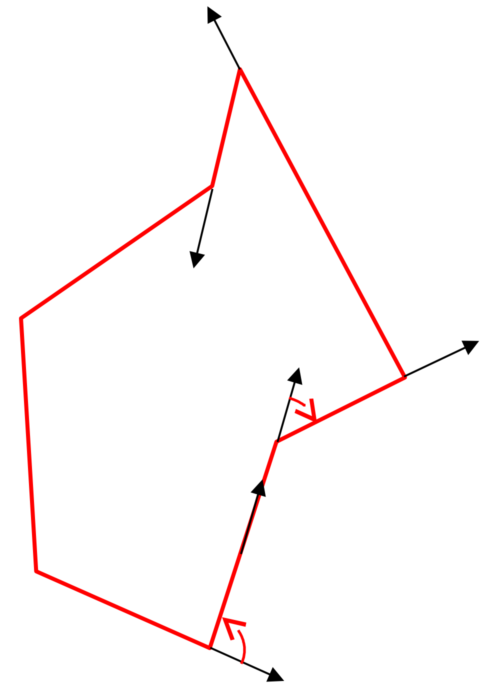
Polígonos

La dirección del vector tangente cambia bruscamente en las esquinas

Calculemos el ángulo **α**(c) que gira el vector tangente al recorrer toda la curva, pensando que un giro en una dirección cancela un giro igual en la dirección opuesta.



α(c) = 2π

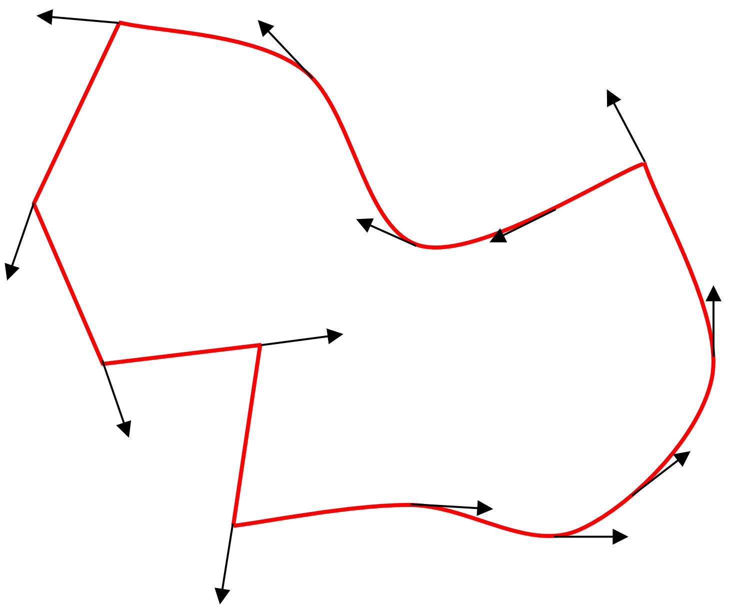


α(c) = 2π

α(c) se calcula recorriendo la curva **c** en sentido inverso a las manecillas del reloj.

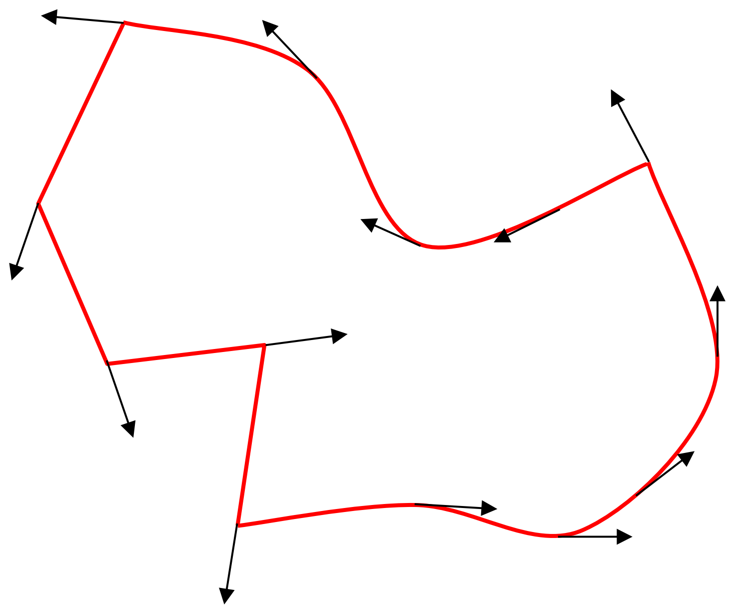
Al recorrer una curva cerrada el vector tangente vuelve finalmente a su posición original, así que $\alpha(c)$ es un múltiplo de 2π.

Teorema. Si c es una curva *simple* cerrada entonces $\alpha(c) = 2\pi$.



Así que $\alpha(c)$ es un invariante, pero no sirve porque es igual para todas las curvas.

El ángulo que gira el vector tangente al recorrer la curva es la suma de los giros en los lados suaves con los giros en las esquinas.



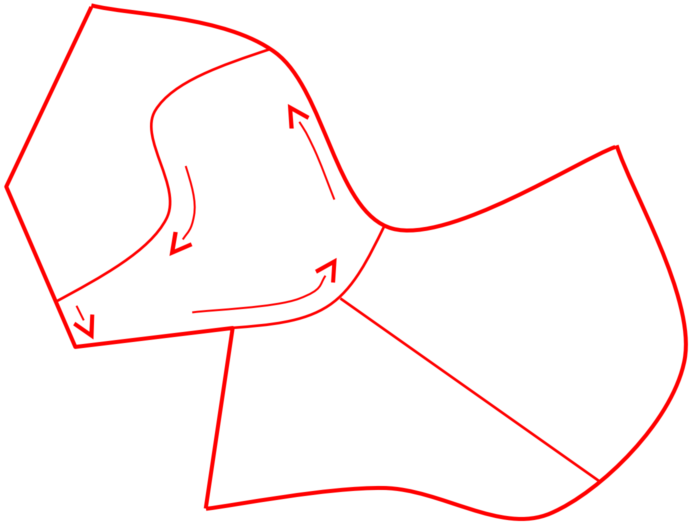
g(c) giro neto en los lados suaves

e(c) giro neto en las esquinas

$\alpha(c) = g(c) + e(c)$

Teorema. $g(c)$ y $e(c)$ son invariantes bajo disecciones

$\alpha(c) = 2\pi$

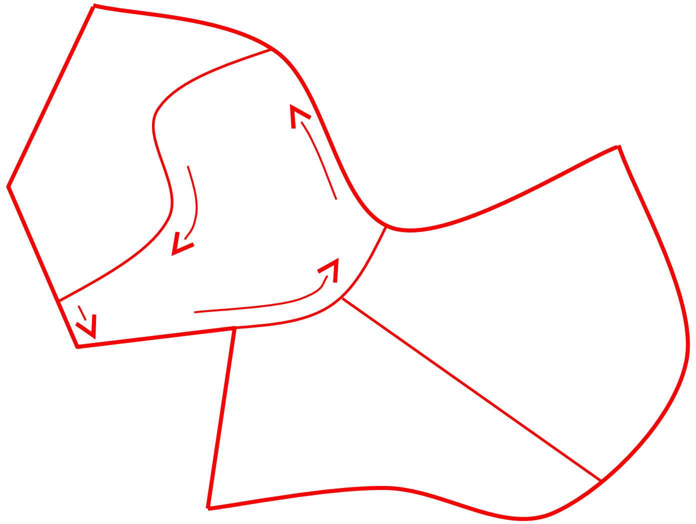


$\sum \alpha(c_i) = 2n\,\pi$

Teorema. g(c) y e(c) son invariantes bajo disecciones

Dem. Dividamos a la figura c en pedazos c_1, c_2,…, c_n y sumemos los giros en cada uno.

$\alpha(c) = 2\pi$

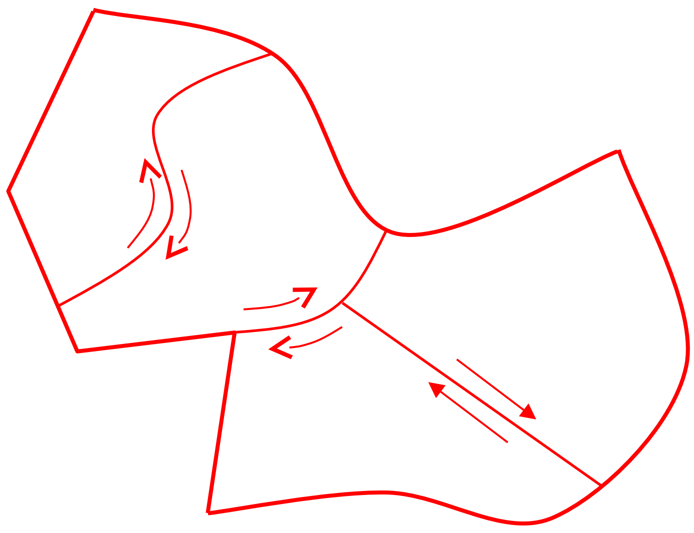


$\sum\alpha(c_i) = 2n\ \pi$

Teorema. g(c) y e(c) son invariantes bajo disecciones

Dem. Dividamos a la figura c en pedazos c_1, c_2,…, c_n y sumemos los giros en cada uno.

$\alpha(c) = 2\pi$



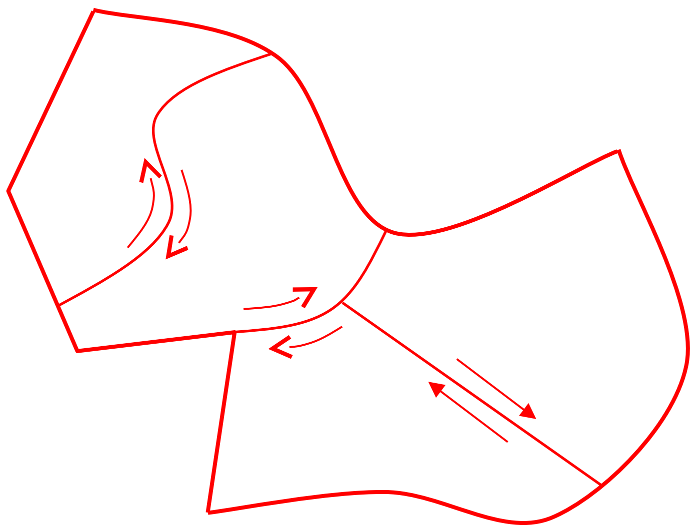
$\sum\alpha(c_i) = 2n\,\pi$

$g(c) = \sum g(c_i)$. (los giros calculados en los lados comunes se cancelan)

Teorema. g(c) y e(c) son invariantes bajo disecciones

Dem. (cont.)

$\alpha(c) = 2\pi$



$\sum\alpha(c_i) = 2n\,\pi$

$g(c) = \sum g(c_i)$.   (los giros calculados en los lados comunes se cancelan)

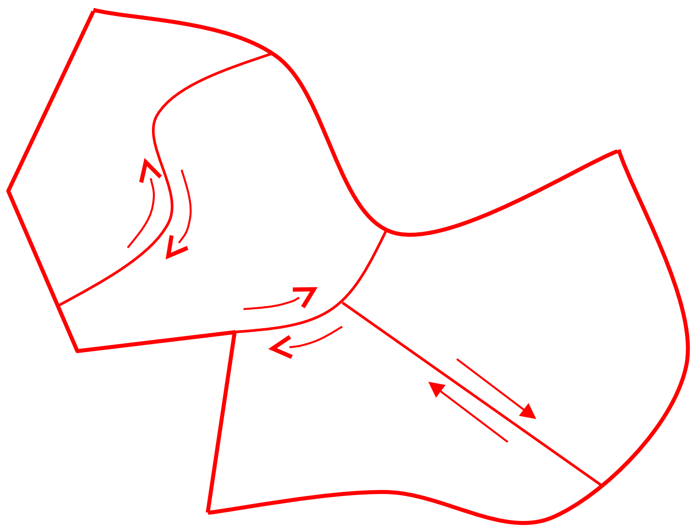
Así que

$$\sum e(c_i) = \sum a(c_i) - \sum g(c_i) = 2n\pi - g(c) = 2(n-1)\pi + a(c) - g(c) = 2(n-1)\pi + e(c)$$

Teorema. g(c) y e(c) son invariantes bajo disecciones

Dem. (cont.)

$\alpha(c) = 2\pi$



$\sum\alpha(c_i) = 2n\,\pi$

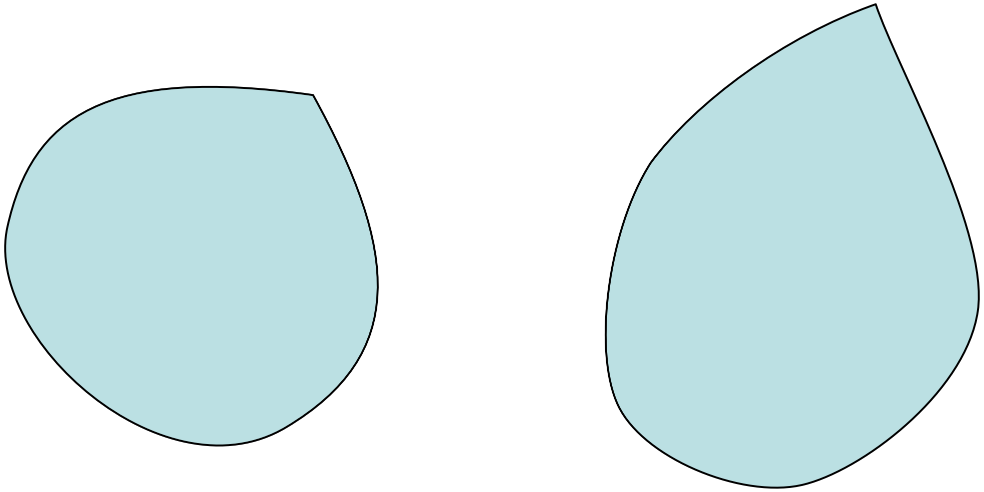
$g(c) = \sum g(c_i)$.   (los giros calculados en los lados comunes se cancelan)

Así que si usamos los mismos pedazos para armar otra figura c’ entonces

$g(c') = \sum g(c_i) = g(c)$

Y como $g(c') + e(c') = \alpha(c') = 2\pi = \alpha(c) = g(c) + e(c)$ entonces $e(c') = e(c)$

Corolario: Hay una infinidad de clases de disección de figuras planas.



Para cada $0<\alpha<2\pi$ existen figuras con $e(c) = \alpha$

3 dimensiones

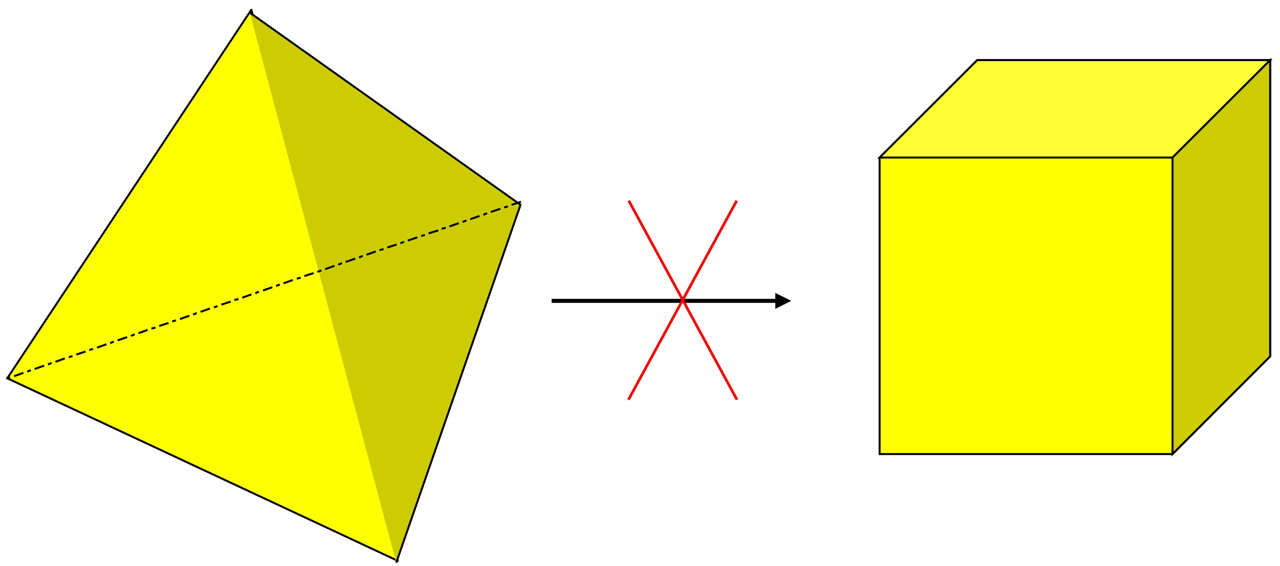
3er Problema de Hilbert: Dados 2 poliedros con el mismo volumen ¿será posible recortar uno para armar el otro?

3 dimensiones

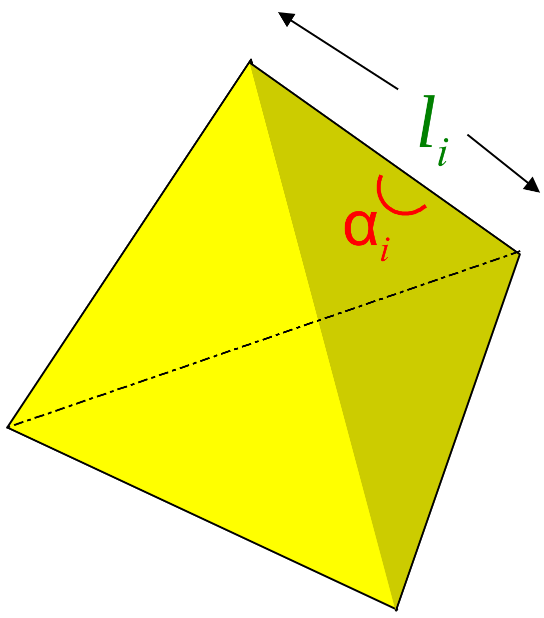
3er Problema de Hilbert: Dados 2 poliedros con el mismo volumen ¿será posible recortar uno para armar el otro?

Respuesta: (Max Dehn,1903) No!

Es imposible, por ejemplo, recortar un tetraedro regular en pedazos y usar estos para armar un cubo.



Idea de la prueba: Hay que hallar algo de los poliedros que no cambie al recortar y volver a armar las piezas, y que sea distinto para el cubo y el tetraedro.

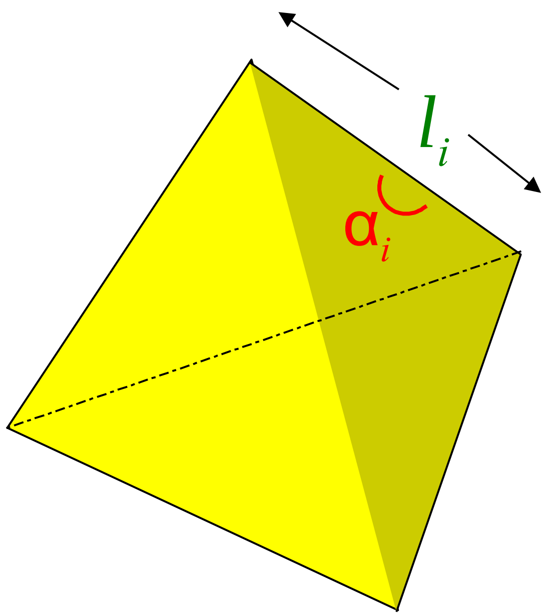


l_i longitud de la arista i

α_i ángulo diédrico en la arista i

Asociemos a cada arista del poliedro el "número" $l_i \otimes \alpha_i$

Asociemos al poliedro la “suma” de los “números” que corresponden a todas sus aristas: $\Sigma\, l_i \otimes \alpha_i$



l_i longitud de la arista i

α_i ángulo diédrico en la arista i

Queremos que el "numero" $\Sigma\, l_i \otimes \alpha_i$ sea invariante bajo disecciones. Al partir un poliedro en dos, una arista puede partirse en 2 aristas cuyas longitudes suman la longitud original o también pueden quedar 2 aristas de la longitud original cuyos ángulos suman el ángulo original.

Así que la "suma" de los "números" debe cumplir con lo siguiente:

$$l \otimes \alpha + l' \otimes \alpha = (l+l') \otimes \alpha$$

$$l \otimes \alpha + l \otimes \beta = l \otimes (\alpha + \beta)$$

Al cortar el poliedro aparecen además pares de nuevas aristas de la misma longitud cuyos ángulos suman π, así que la "suma" de los "números" debe cumplir:

$$l \otimes \alpha + l \otimes \pi\text{-}\alpha = 0$$

Hay un conjunto de “números” con estas propiedades: el *producto tensorial* $R \otimes R/\pi$ (los reales con los reales módulo π)

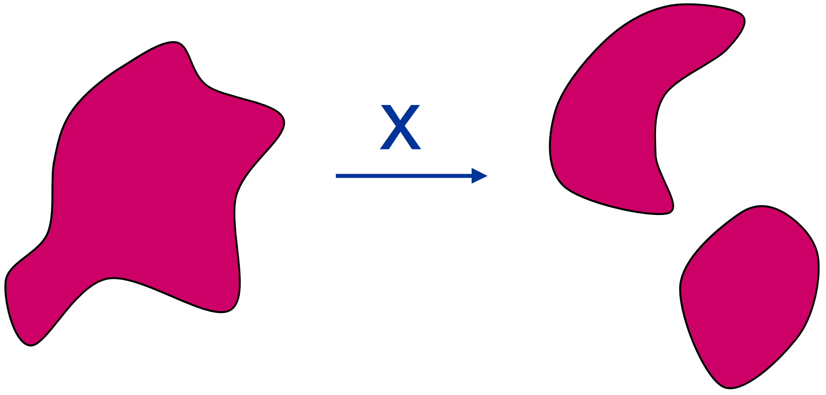
Teorema. El “número” $\Sigma\, l_i \otimes \alpha_i$ en $R \otimes R/\pi$ es un invariante por disecciones.

Para mostrar que un cubo no puede cortarse y pegarse para obtener un tetraedro basta que mostrar que $12 \otimes \pi/2 \neq 6 \otimes \arccos^{-1}(1/3)$

TAREA 18

1. ¿Puedes mostrar que si dos triángulos tienen la misma área, entonces se puede recortar uno y usar los pedazos para armar el otro?

2. Demuestra que no es posible cortar una figura sin esquinas y usar los pedazos para armar dos figuras sin esquinas.



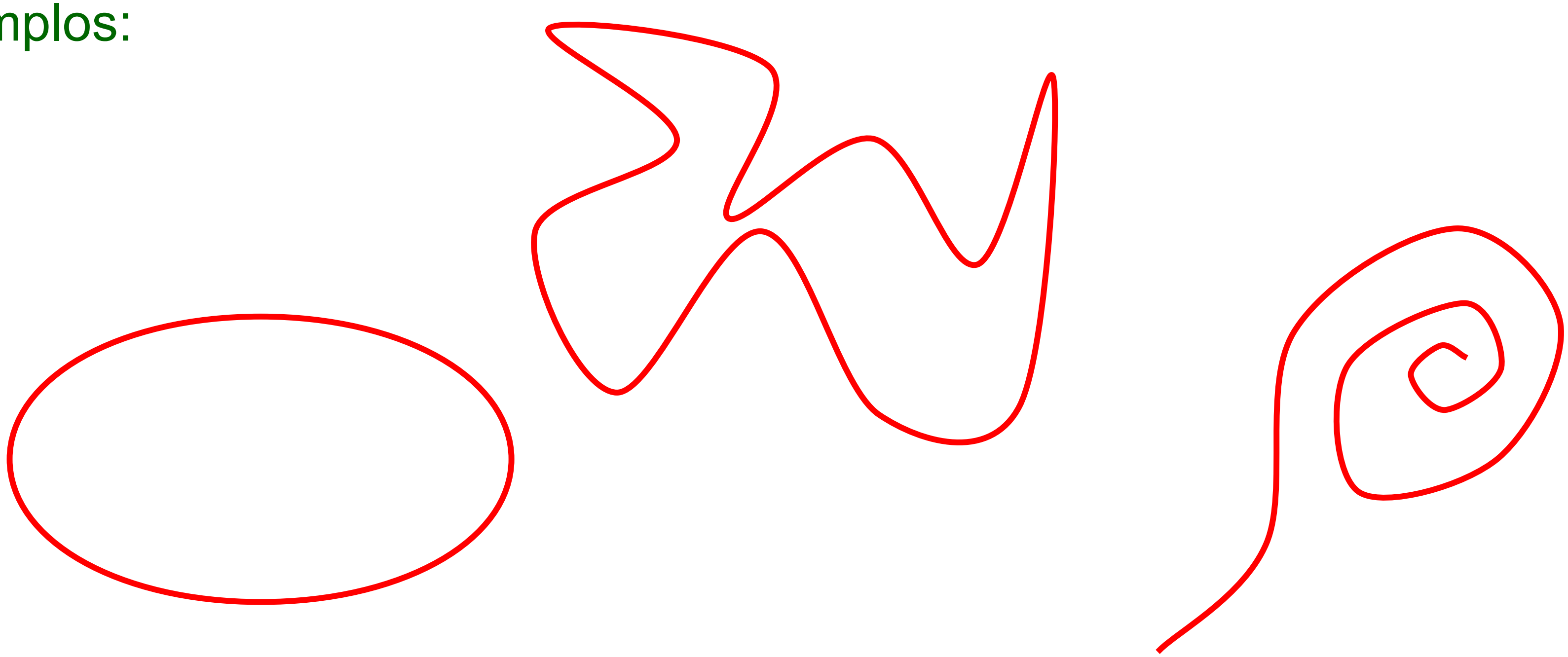
Clase 19

Curvas

¿Qué es una curva?

Las curvas son objetos geométricos de una dimensión, que localmente se parecen a una línea recta.

Ejemplos:



¿Qué es una curva?

Las curvas son objetos geométricos de una dimensión, que localmente se parecen a una línea recta.

Ejemplos: Muchos conjuntos del plano definidos por ecuaciones

$x^2+2xy+3y^3=4$

$x^4+4y^2+2x=1$

Curvas Parametrizadas

Una *curva parametrizada* en el plano está dada por una función diferenciable $\alpha: I \to R^2$

Ejemplos:

- $\alpha(t) = (t,t^3)$
- $\alpha(t) = (2 \cos t, 3 \text{ sen } t)$
- $\alpha(t) = (\cos 2t, \text{sen } 3t)$

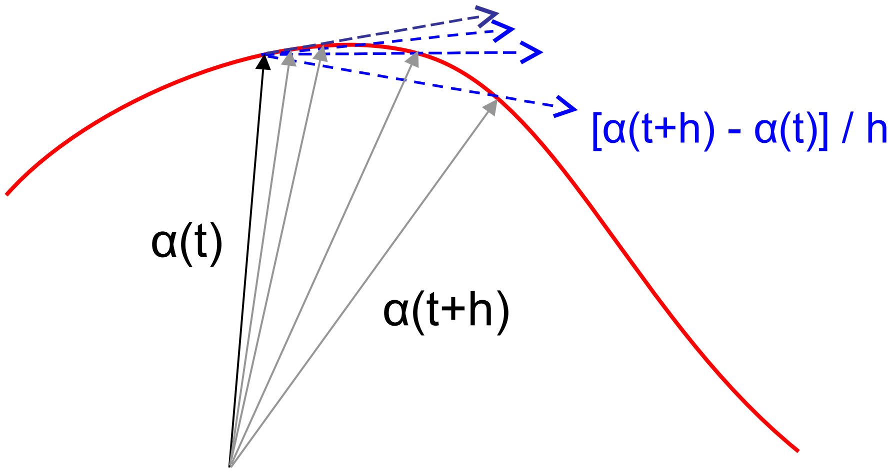
Observación. Una misma curva puede tener muchas parametrizaciones distintas.

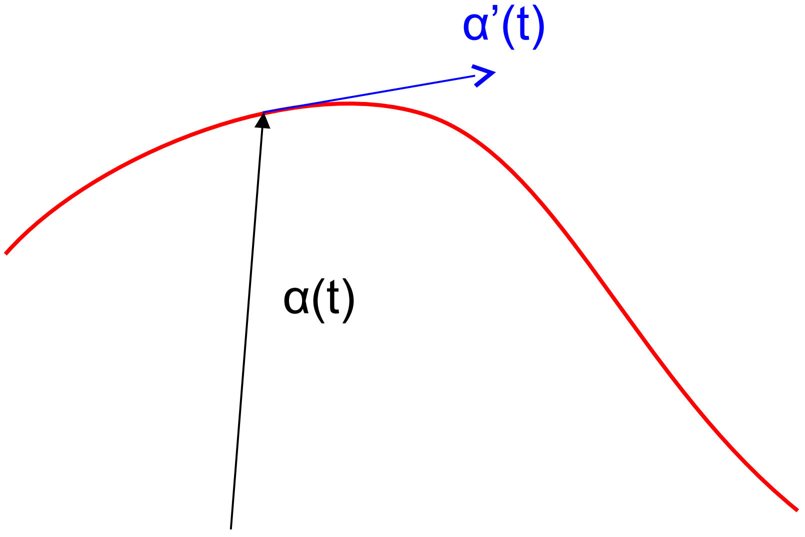
Derivadas y vectores tangentes

Si $\alpha(t)$ es una curva parametrizada, su derivada

$$\alpha'(t) = \lim_{h \to 0} [\alpha(t+h) - \alpha(t)] / h$$

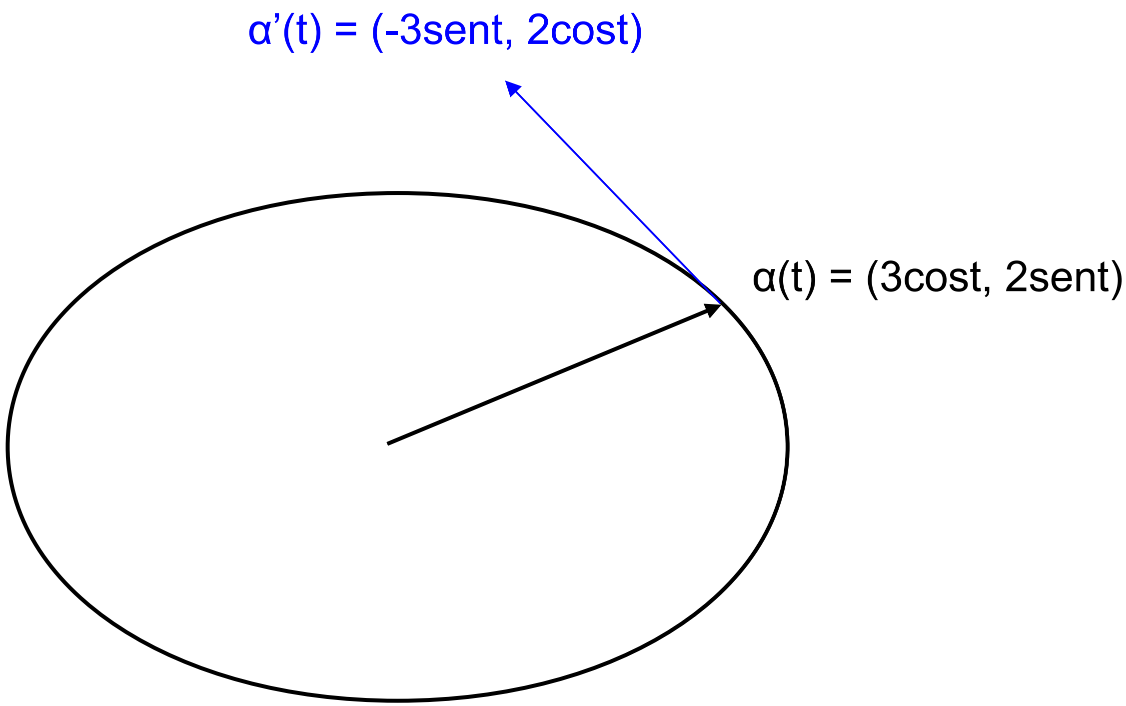
es un vector tangente a la curva en el punto $\alpha(t)$.





Derivadas y vectores tangentes

Ejemplo:



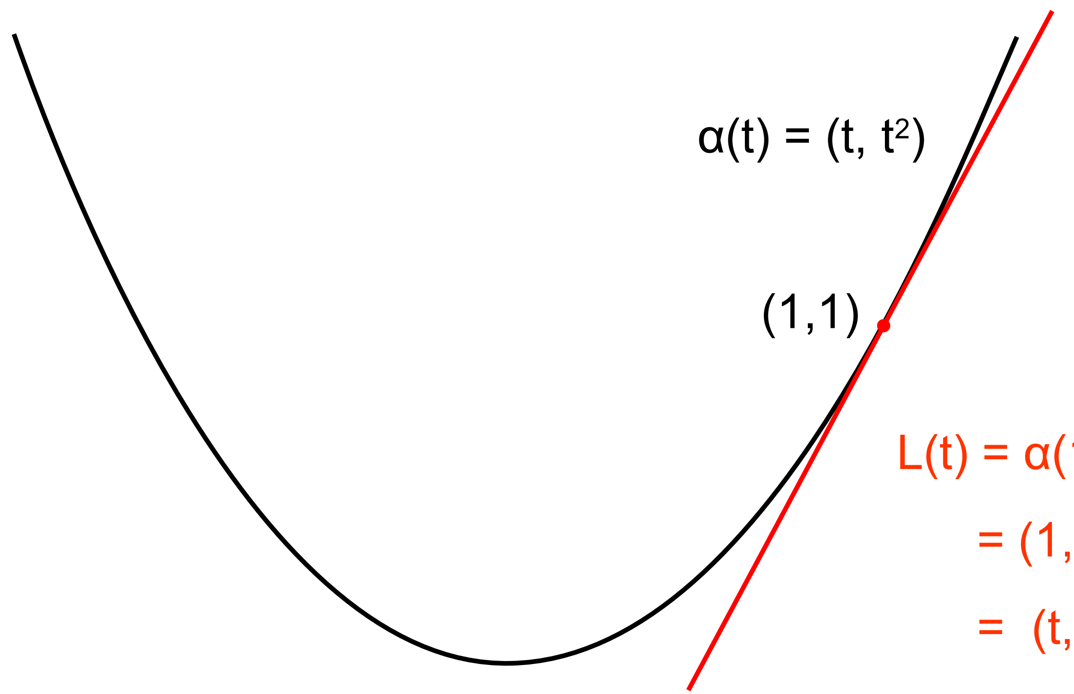
Si $\alpha(t)$ describe la posición de un punto en movimiento en el instante t entonces $\alpha'(t)$ da la velocidad del punto en ese instante.

Diferenciales y rectas tangentes

La diferencial de una función en un punto es la mejor aproximación lineal a la variación de la función cerca del punto.

En el caso de una curva $\alpha(t)$ la diferencial parametriza la recta tangente a la curva en el punto.

Ejemplo:



$$L(t) = \alpha(1) + t\,\alpha'(1)$$
$$= (1,1) + (t-1)(1,2)$$
$$= (t, 2t-1)$$

Curvas regulares

Una curva parametrizada $\alpha(t)$ es *regular* si $\alpha'(t)$ no se anula en ningún punto.

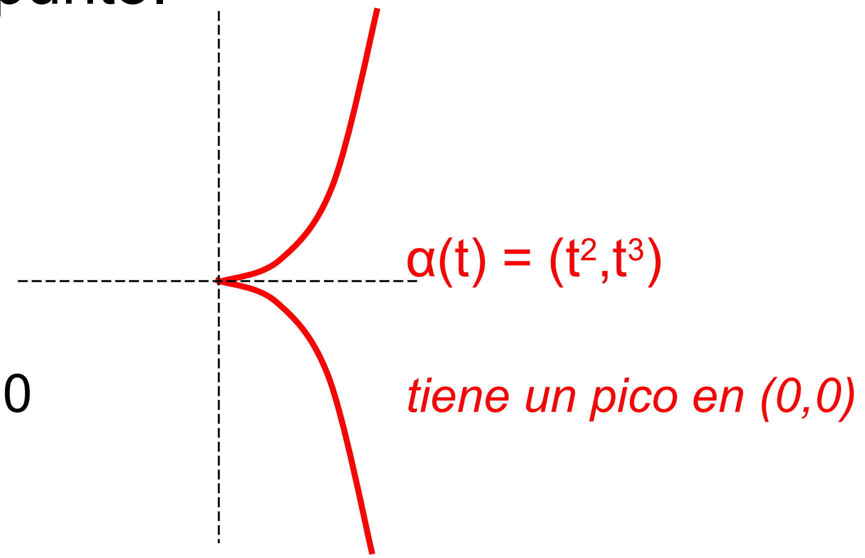
Ejemplo:

$\alpha(t) = (t^2,t^3)$

$\alpha'(t) = (2t,3t^2)$

$\alpha'(0) = (0,0)$.

$\alpha(t)$ *no es regular* en t=0

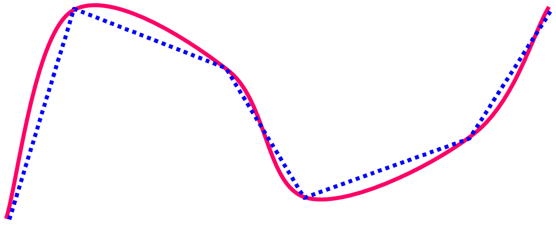


Una curva es *suave* si tiene una tangente bien definida en cada punto (no tiene picos).

Teorema. Las curvas regulares son suaves.

Longitud de una curva

La *longitud* de una curva parametrizada α(t) es el supremo de las longitudes de todas las poligonales que aproximan a α(t)

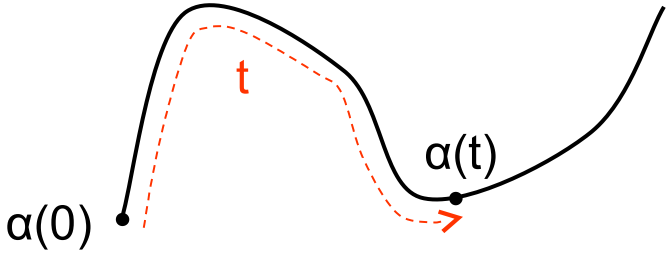


Teorema. La longitud de una curva diferenciable $\alpha: [a,b] \to R^2$ es:

$$\int_a^b |\alpha'(t)|\, dt$$

Longitud de arco

Si $|\alpha'(t)|=1$ entonces el parámetro t mide la longitud de la curva α desde 0 hasta t.



Curvas definidas por ecuaciones

Teorema. El conjunto de soluciones de la ecuación $f(x,y) = c$ es una curva suave siempre que f sea diferenciable y su gradiente $\nabla f=(f_x,f_y)$ no se anule en el conjunto.

Ejemplo.

El conjunto $x^2 + y^2 + y^3 = c$ es una curva suave para cada valor de c excepto c=0 y c=20/27 ,ya que el gradiente $(2x,2y+3y^2)$ solo se anula en los puntos (0,0) y (0,2/3).

Este teorema es consecuencia del *teorema de la función implicita* del calculo diferencial.

TAREA 19

1. Encuentra una curva parametrizada suave que pase por los puntos (0,0,0),(1,0,0),(1,1,0) y (1,1,1).

2. ¿Es suave la curva dada por la ecuación $x^2+y^3+xy=1$?

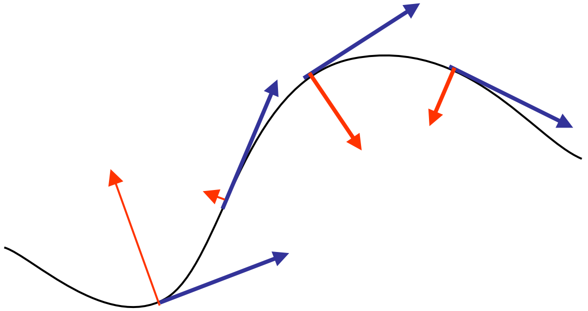
Clase 20

Curvatura de una curva

Vector normal a una curva

Si $\alpha(t)$ una curva regular entonces $\alpha'(t)$ es un vector tangente a la curva en cada punto.

Lema. Si $\alpha(t)$ se recorre con rapidez constante entonces $\alpha''(t)$ es un vector normal a la curva en cada punto.



Dem. si $|\alpha'(t)|=c$ entonces $\alpha'(t)\cdot\alpha'(t)=c^2$ para cada t. Derivando queda $\alpha''(t)\cdot\alpha'(t)+\alpha'(t)\cdot\alpha''(t)=0$ asi que $\alpha''(t)\cdot\alpha'(t)=0$ por tanto $\alpha''(t)$ es perpendicular a $\alpha'(t)$.

Curvatura de una curva

Si $\alpha(t)$ es una curva con $|\alpha'(t)|=1$ entonces se define la *curvatura* de α como $k(t)= |\alpha''(t)|$.

Ejemplo. La curvatura de un círculo.

$\alpha(t)=(r\operatorname{sen}t, r\cos t)$ describe un círculo de radio r recorrido con rapidez $|\alpha'(t)| =$

$= |(r\cos t,-r\operatorname{sen}t)| = r$.

Podemos reparametrizar el círculo haciendo $\beta(t)=(r\operatorname{sen}(t/r), r\cos(t/r))$ y ahora $|\beta'(t)|=|(\cos(t/r),-\operatorname{sen}(t/r)|=1$ por lo tanto la curvatura del circulo de radio r es

$|\beta''(t)|=|(-1/r \operatorname{sen}(t/r),-1/r \cos(t/r)| = 1/r$

Para fines prácticos se necesita una fórmula para la curvatura para curvas recorridas con rapidez variable.

Curvatura de una curva

Lema. La curvatura de una curva $\alpha(t)$ esta dada por $k(t) = \alpha''(t)\cdot n(t) / |\alpha'(t)|^2$, donde $n(t)$ es un vector unitario normal a la curva.

Dem. Podemos escribir $\alpha(t) = \beta(\lambda(t))$ donde β es una reparametrización con rapidez constante 1 y $\lambda(t)$ es la distancia recorrida en la curva desde 0 hasta t.

Entonces

$\alpha'(t) = \beta'(\lambda(t))\, \lambda'(t)$ así que $|\alpha'(t)| = \lambda'(t)$

$\alpha''(t) = \beta''(\lambda(t))\, \lambda'^2(t) + \beta'(\lambda(t))\, \lambda''(t)$

Así que $\alpha''(t)$ tiene una componente normal a la curva y una componente tangencial.

La curvatura de α en t es la curvatura de β en $\lambda(t)$ que es $|\beta''(\lambda(t))|$.

Podemos recuperar $\beta''(\lambda(t))$ a partir de $\alpha''(t)$ haciendo producto punto con $n(t)$:

$\alpha''(t) \cdot n(t) = n(t)\cdot\beta''(\lambda(t))\, \lambda'^2(t) + n(t)\cdot \beta'(\lambda(t))\, \lambda''(t) = |\beta''(\lambda(t))|\, \lambda'^2(t) = |\beta''(\lambda(t))|\, |\alpha'(t)|^2$

Curvatura de una curva

Ejemplo. Calcular la curvatura de la curva $\alpha(t)=(t,t^2)$

$\alpha'(t) = (1,2t)$ $\qquad\qquad$ $|\alpha'(t)| = \sqrt{1+4t^2}$

$\alpha''(t) = (0,2)$

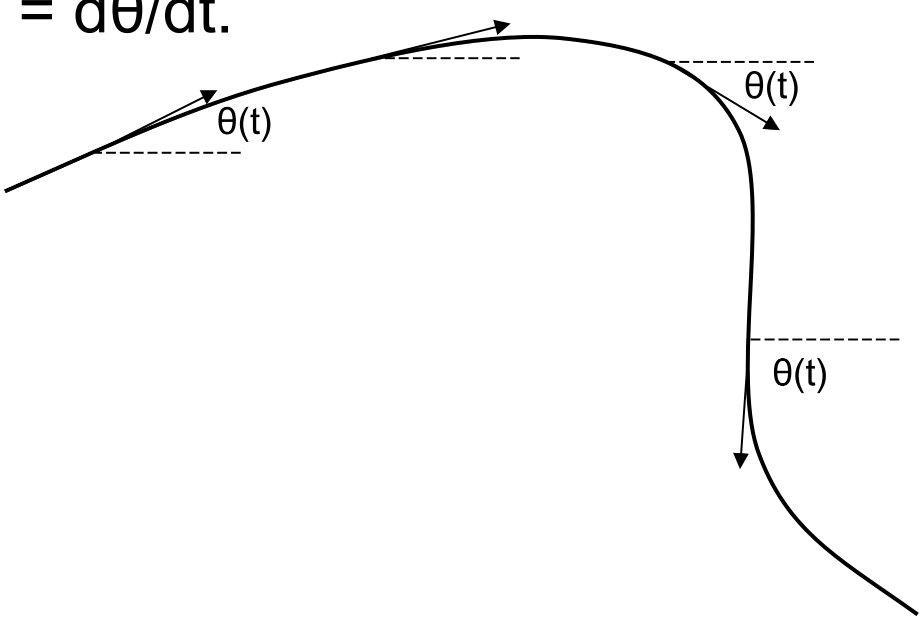
$n(t) = 1/\sqrt{1+4t^2}\,(2t,-1)$ $\qquad$ (un vector unitario perpendicular a $\alpha'(t)$)

$k(\alpha(t)) = \alpha''(t)\cdot n(t) / |\alpha'(t)|^2 = (0,2) \cdot 1/\sqrt{1+4t^2}\,(2t,-1) / 1+4t^2 = -2 / (1+4t^2)^{3/2}$

Curvatura de una curva

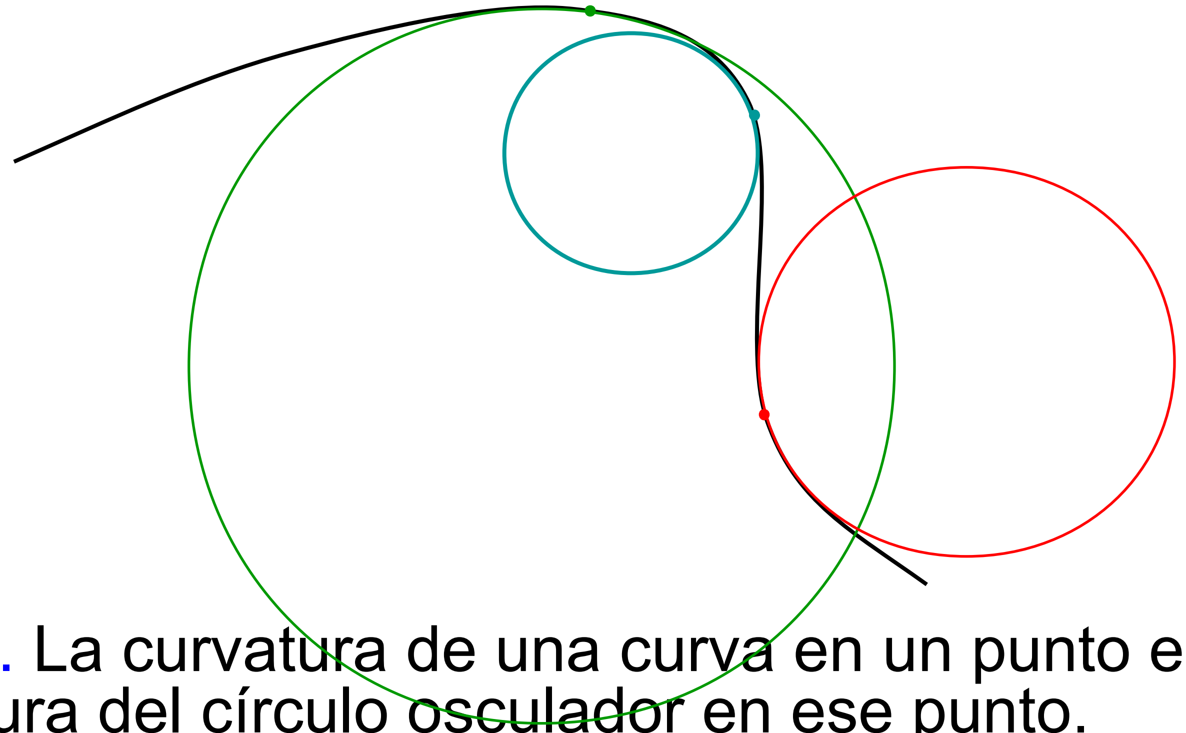
La curvatura de una curva parametrizada mide que tan rápido cambia la dirección de la curva.

Teorema. Si $\alpha(t)$ es una curva parametrizada con $|\alpha'(t)|=1$ y $\theta(t)$ es el ángulo que forma $\alpha'(t)$ con una dirección fija, entonces $k(t) = d\theta/dt$.



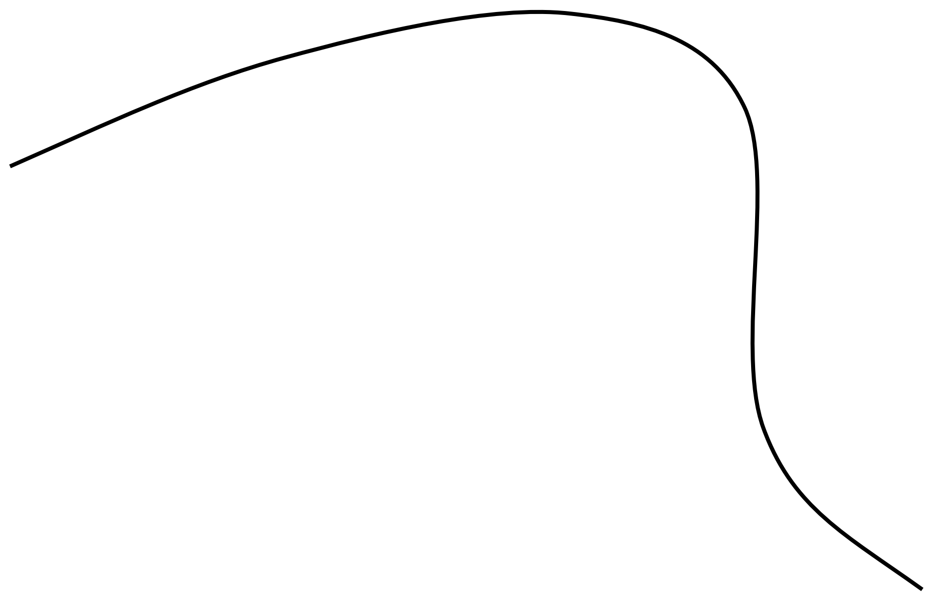
Círculo osculador

El *círculo osculador* de una curva es el círculo que aproxima mejor a la curva en cada punto.



Teorema. La curvatura de una curva en un punto es la curvatura del círculo osculador en ese punto.

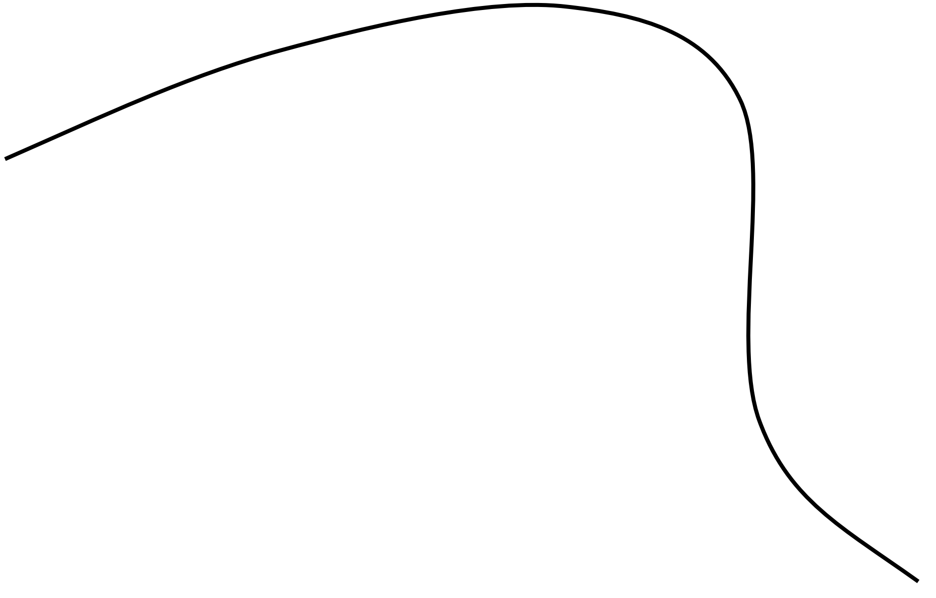
Curvatura y forma



¿Qué determina la forma de una curva en el plano?

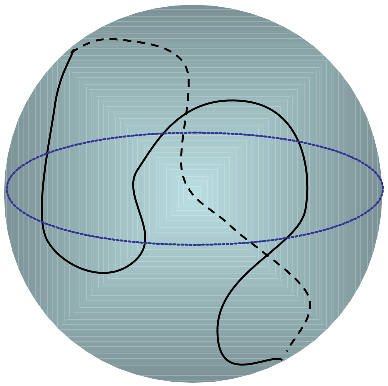
Curvatura y forma

Teorema. La forma de una curva regular en el plano está determinada por la función que da su curvatura en cada punto.



TAREA 20

1. Muestra que una curva parametrizada está en la superficie de una esfera centrada en el origen si y solo si para cada t el vector de posición $\alpha(t)$ es perpendicular al vector tangente $\alpha'(t)$.



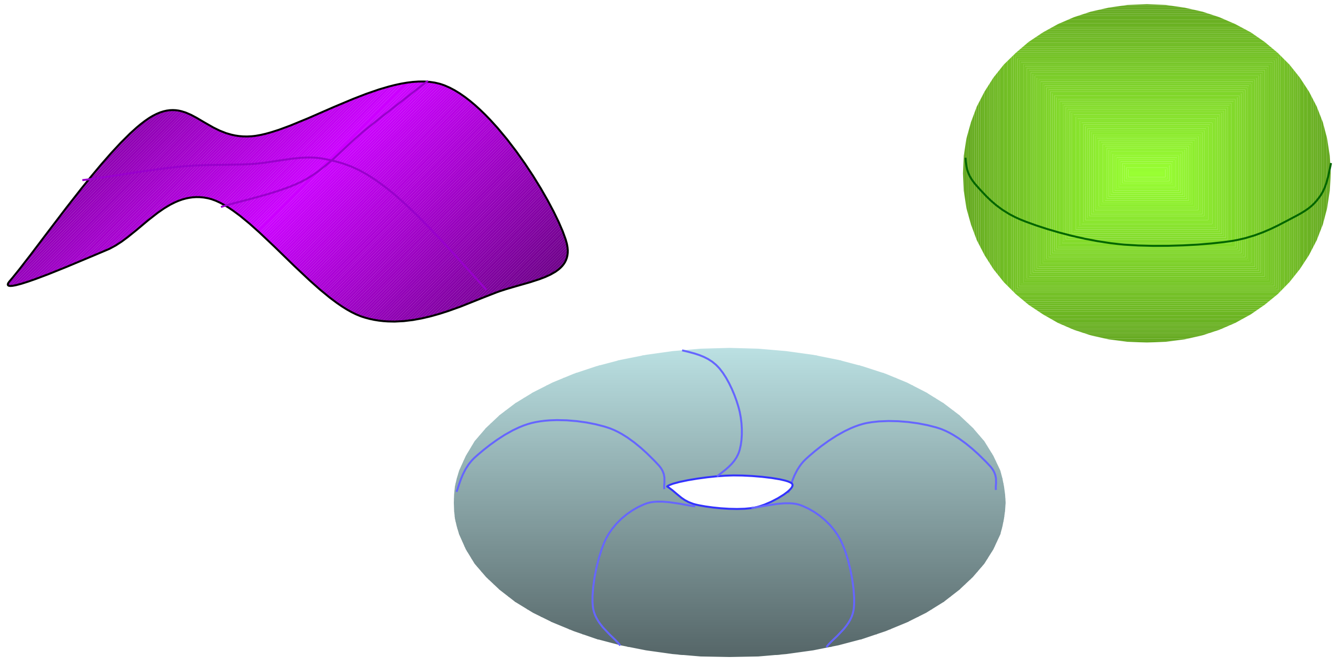
2. Calcula la curvatura de la elipse $ax^2+by^2 = 1$ en cada punto (x,y).

Clase 21

Superficies

¿Qué es una superficie?

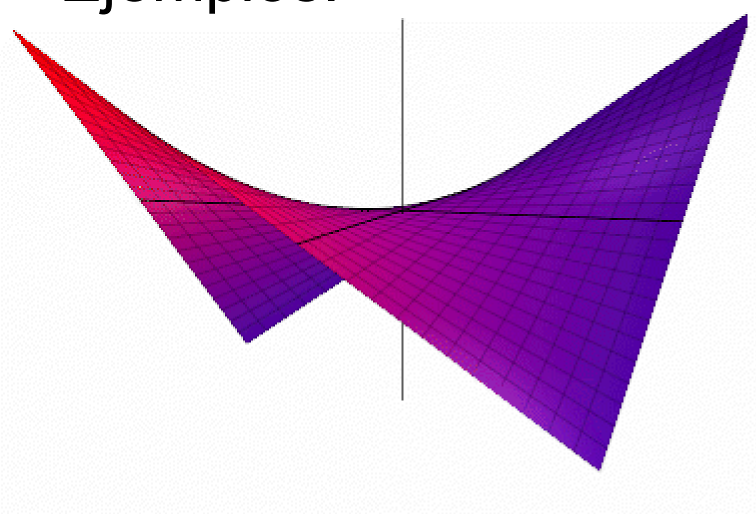
La superficies son objetos geométricos de dos dimensiones que *locamente* se parecen a un plano, aunque quizás muy deformado.



Superficies parametrizadas

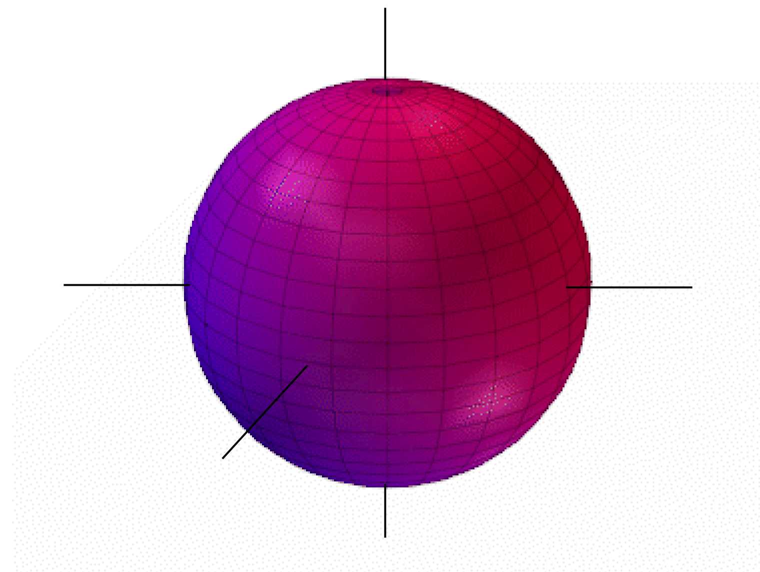
Una *superficie parametrizada* está dada por una función diferenciable $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Ejemplos.



Φ: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\Phi(x,y) = (x,y,xy)$



Φ: $[0,2\pi] \times [0,\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\Phi(x,y) = (\text{sen}x \,\text{sen}y, \cos x \,\text{sen}y, \cos y)$

Superficies regulares

Una superficie parametrizada es *regular* si la diferencial de Φ en cada punto es inyectiva (lo que equivale a que Φ_x y Φ_y sean vectores linealmente independientes en R^3, por lo que generan un plano)

Ejemplos.

$\Phi(x,y)=(x,y,xy)$

$\Phi_x = (1,0,y)$

$\Phi_y = (0,1,x)$

Es regular

(1,0,y) y (0,1,x) siempre son lin. indep.

$\Phi(x,y)=(x,y^2,xy)$

$\Phi_x = (1,0,2xy)$

$\Phi_y = (0,2y,x)$

No es regular en x=y=0

(1,0,0) y (0,0,0) son lin. dep.

Teorema. Las superficies regulares son suaves (no tienen picos ni arrugas).

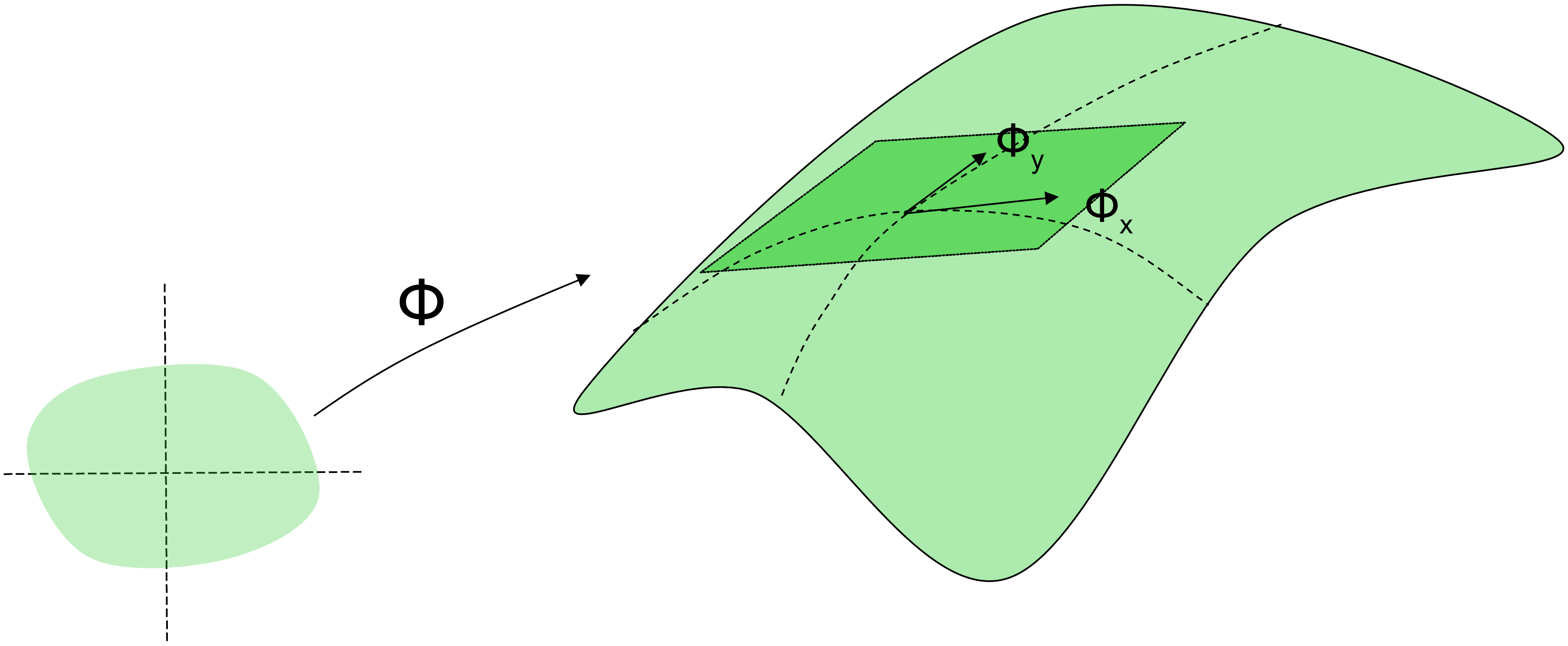
Superficies definidas por ecuaciones

Teorema. El conjunto de soluciones de una ecuación $f(x,y,z) = c$ en R^3 es una superficie suave siempre que f sea una función diferenciable cuyo gradiente $\nabla f = (f_x,f_y,f_z)$ no se anule en el conjunto.

Ejemplo. Las soluciones de $x^2+y^3+xz+z = c$ forman una superficie suave para cada $c\neq 9$ ya que $\nabla f =(2x+z,3y^2,x+1)$ solo se anula en $(-1,2,0)$.

Planos tangentes a la superficie

El *plano tangente* a una superficie regular en un punto es el plano generado por los vectores Φ_x y Φ_y en ese punto.



Planos tangentes a la superficie

Ejemplo 1. Hallar el plano tangente a la superficie $\Phi(x,y)=(x,y,xy)$ en el punto $(2,3,6)$.

$\Phi_x = (1,0,y)$

$\Phi_y = (0,1,x)$

El plano tangente en el punto $\Phi(2,3) = (2,3,6)$ esta dado por la diferencial de Φ en $(2,3)$:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \Phi(2,3)+(x-2)\Phi_x(2,3)+(y-3)\Phi_y(2,3) \\ &= (2,3,6)+(x-2)(1,0,3)+(y-3)(0,1,2) \\ &= (x,y,3x+2y+6) \end{aligned}$$

Primera forma fundamental

La deformación del plano que resulta al parametrizar una superficie S por medio de una función $\Phi : U \subset R^2 \to R^3$ puede medirse viendo como cambian las longitudes de los vectores al aplicarles la diferencial de Φ.

La imagen del vector (a,b) bajo la diferencial de Φ es el vector $a\Phi_x + b\Phi_y$, cuya norma es $a^2\, \Phi_x \cdot \Phi_x + ab\, \Phi_y \cdot \Phi_x + b^2\, \Phi_x \cdot \Phi_x$

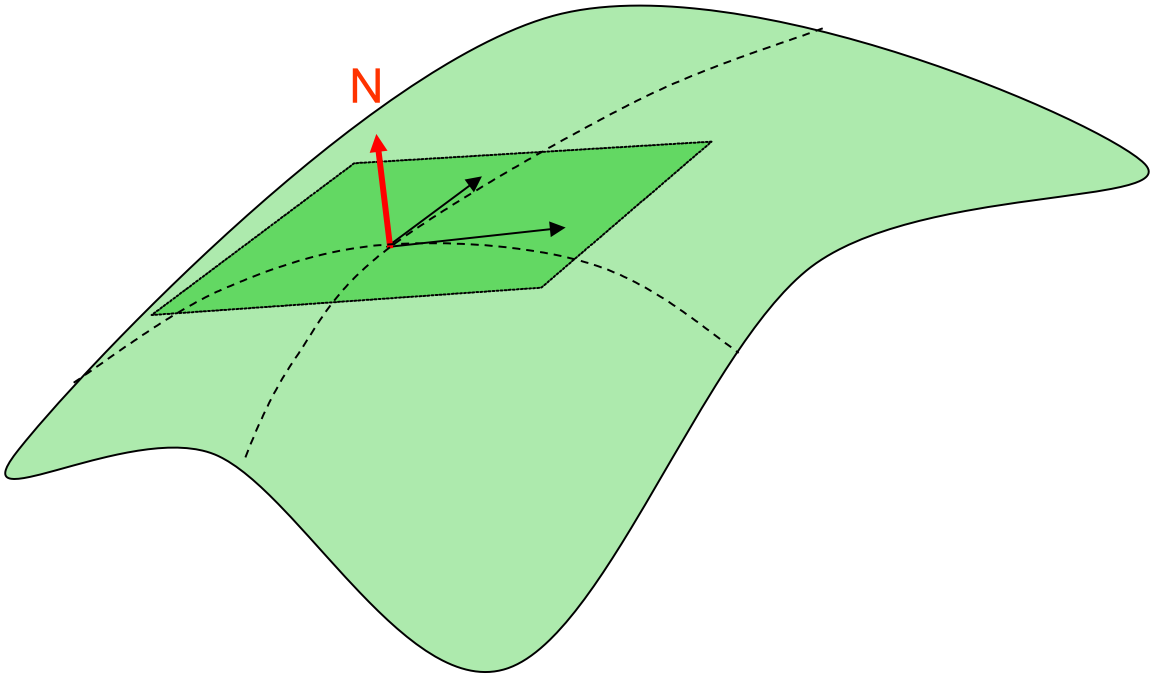
Así que la deformación del plano en cada punto esta dada por una forma cuadrática:

$$\begin{vmatrix} \Phi_x \cdot \Phi_x & \Phi_y \cdot \Phi_x \\ \Phi_x \cdot \Phi_y & \Phi_y \cdot \Phi_y \end{vmatrix}$$

Esta es la llamada *primera forma fundamental* de la superficie.

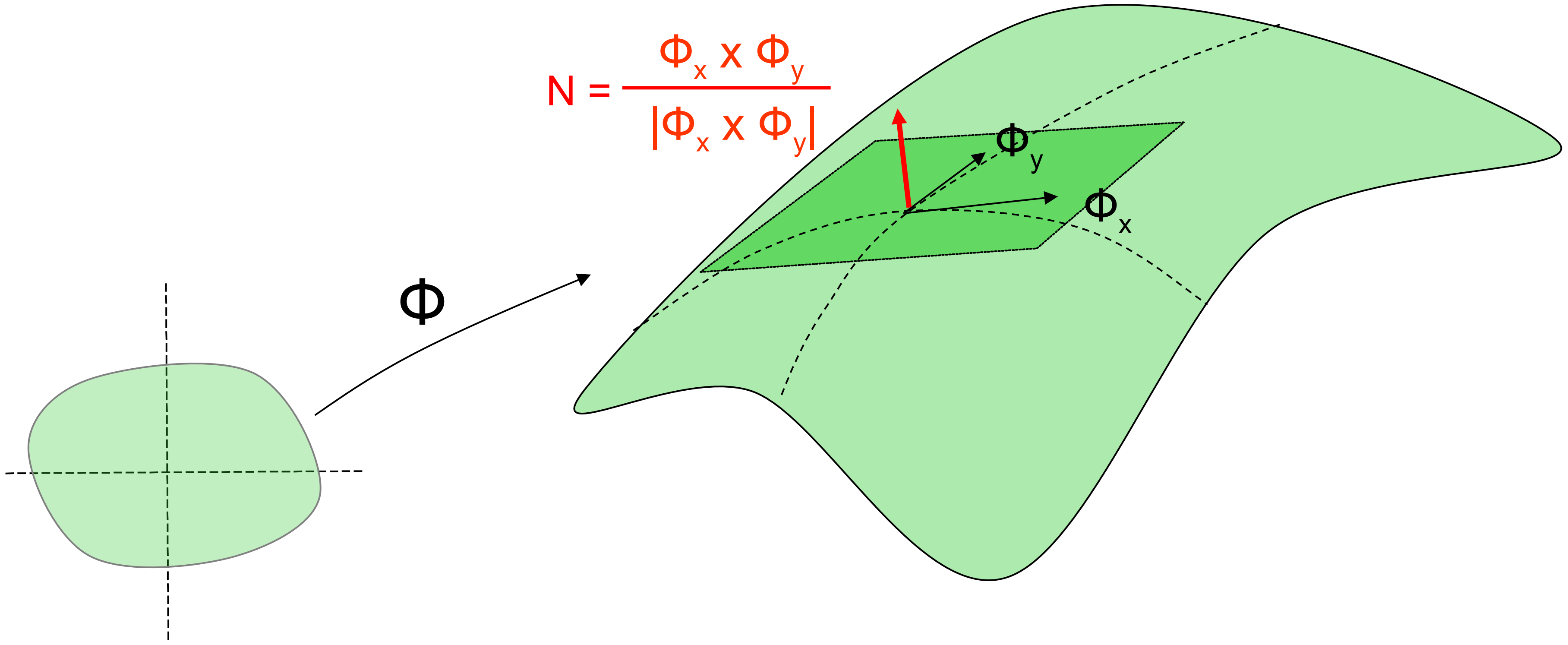
Vectores normales a la superficie

Un *vector normal* a la superficie es un vector unitario que es perpendicular al plano tangente en un punto.



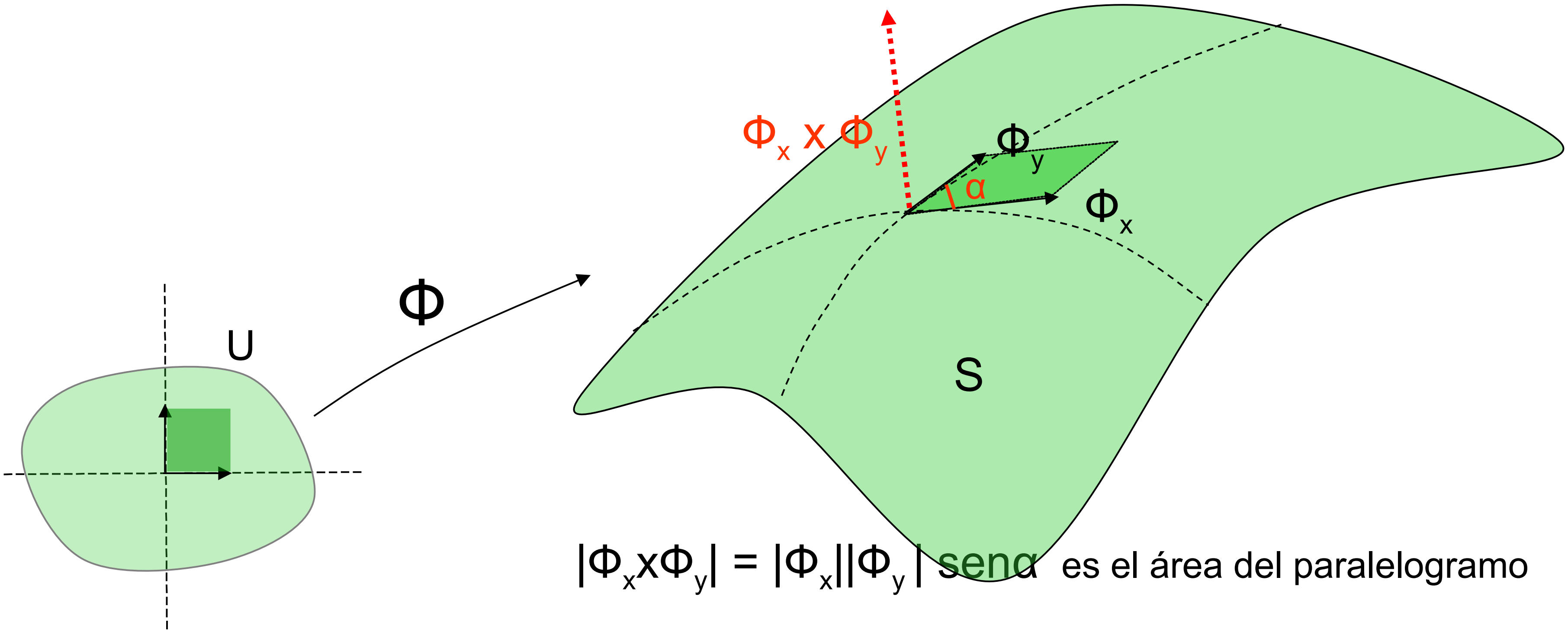
Vectores normales a la superficie

El vector normal a una superficie parametrizada puede hallarse a partir de Φ_x y Φ_y:



Área de una superficie

El área de una superficie parametrizada por $\Phi : U \subset R^2 \rightarrow R^3$ puede calcularse viendo como cambia el área de U al aplicarle Φ. Este “factor de dilatación” de Φ en cada punto de U se obtiene comparando el área de un cuadrado basado en el punto de U con el área de su imagen bajo la diferencial de Φ.

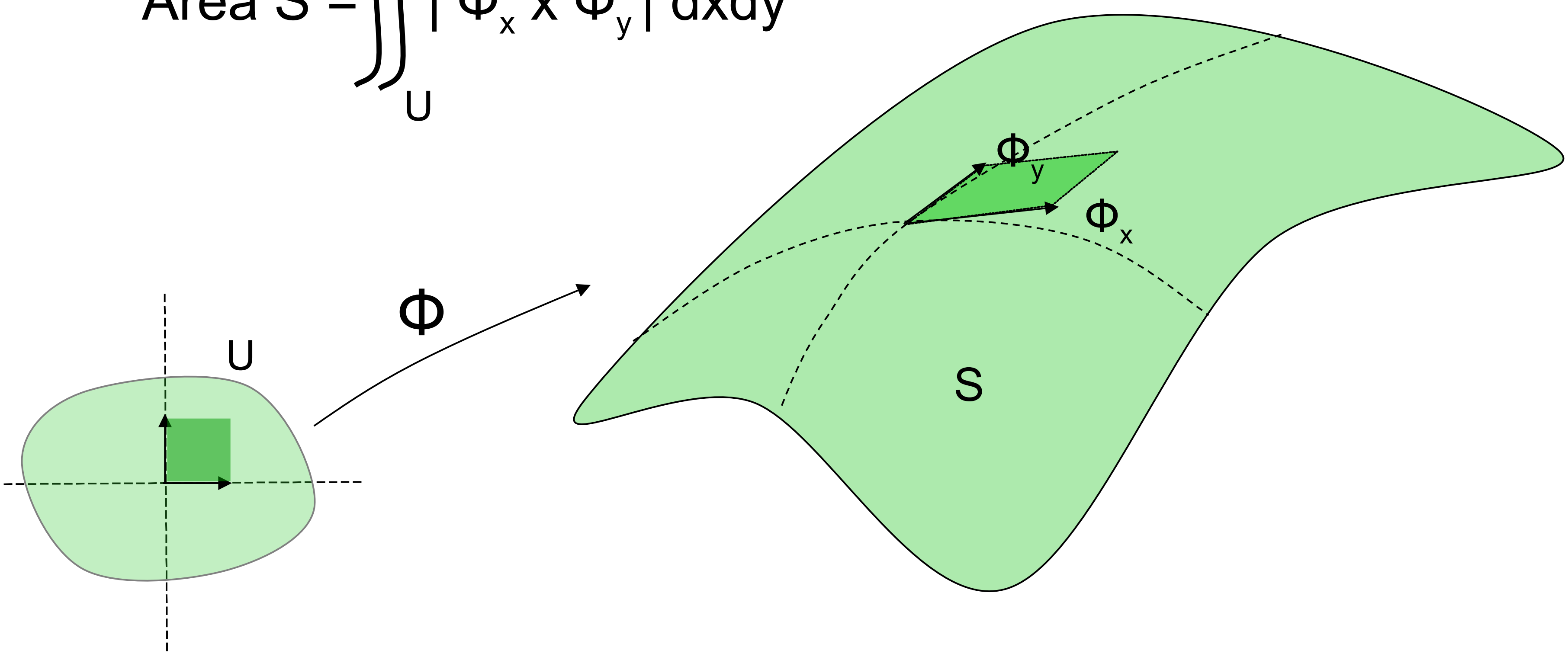


$|\Phi_x x \Phi_y| = |\Phi_x||\Phi_y|\,\text{sen}\alpha$ es el área del paralelogramo

Área de una superficie

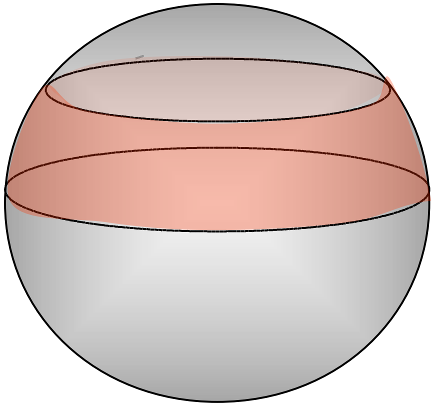
El área de una superficie S parametrizada por la función Φ puede calcularse como

$$\text{Area } S = \iint_U |\, \Phi_x \times \Phi_y \,|\, dxdy$$



Área de una superficie

Ejemplo. Área de la franja de una esfera comprendida entre dos paralelos:



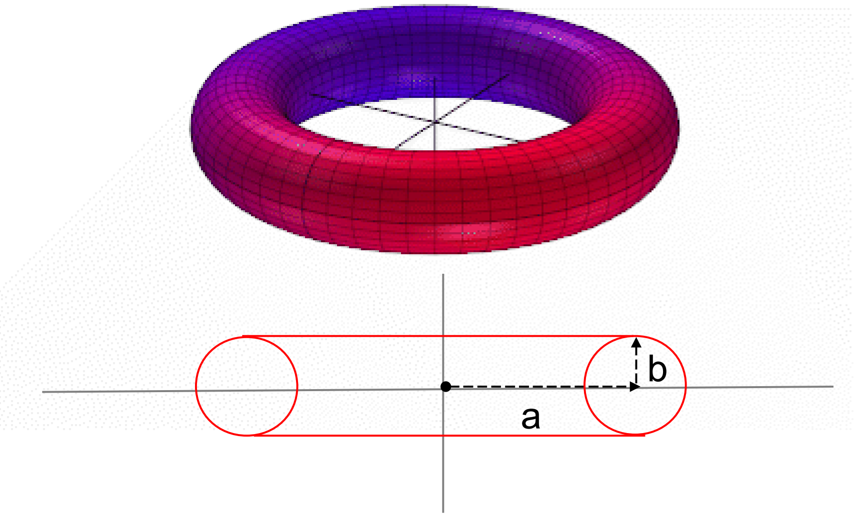
TAREA 21

1. Trata de imaginar la forma de la superficie $\Phi(x,y) = (x\cos y, x\operatorname{sen} y, y)$ Comprueba tu respuesta graficándola con la computadora.

2. Calcula el área de la superficie del toro:

   $\Phi : [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to R^3$

   $\Phi(x,y) = [(a+b\cos y) \cos x, (a+b\cos y) \operatorname{sen} x, b\operatorname{sen} y]$



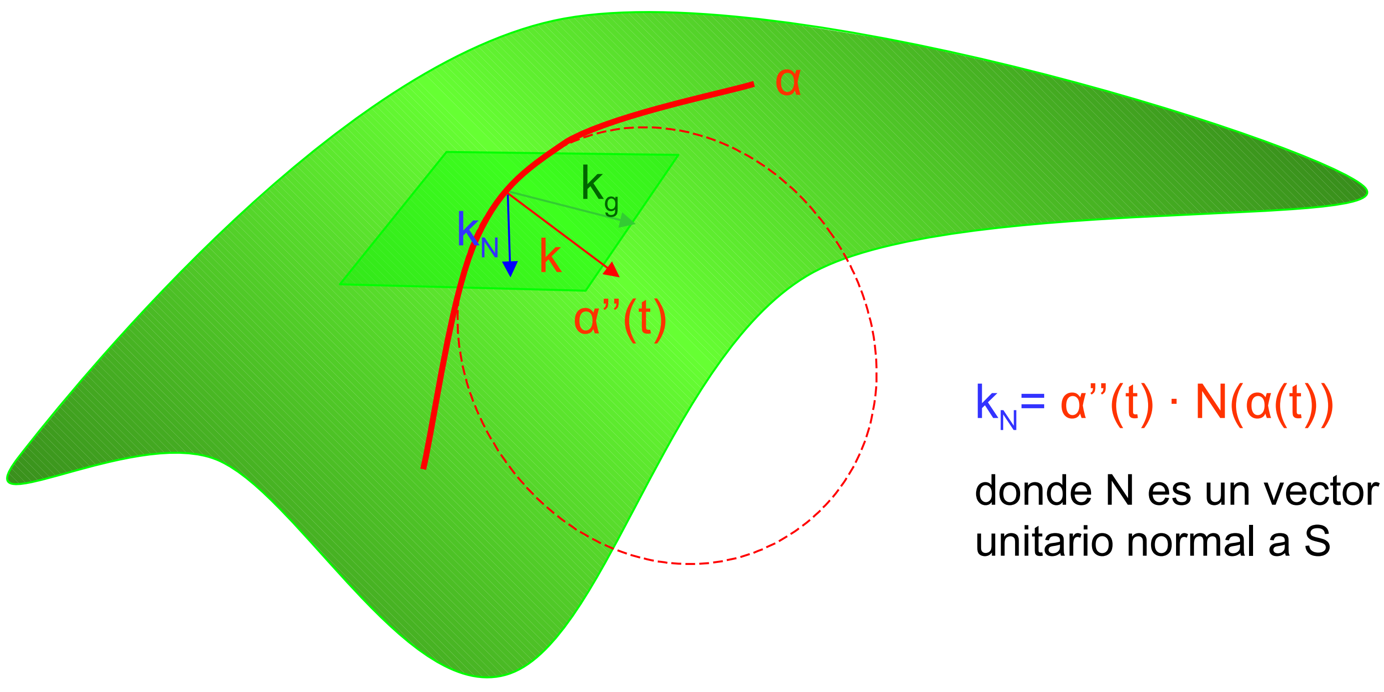
Clase 22

Curvatura en superficies

Curvatura normal y geodésica de una curva

Si $\alpha(t)$ es una curva en una superficie S, podemos calcular la curvatura de α independientemente de S: si $|\alpha'(t)|=1$ entonces $k=|\alpha''(t)|$.

También podemos escribir a $\alpha''(t)$ como la suma de un vector normal y un vector tangente a la superficie. La componente normal da la *curvatura normal* de la curva y la componente tangencial a S da su *curvatura geodésica*.



$k_N = \alpha''(t) \cdot N(\alpha(t))$

donde N es un vector unitario normal a S

Curvatura normal y geodésica de una curva

La curvatura normal de cualquier curva $\alpha(t)$ en S está dada por $k_N = \alpha''(t)\cdot N(\alpha(t)) / |\alpha'(t)|^2$

Ejemplo. Curvatura de un círculo de radio r en una esfera de radio 1.

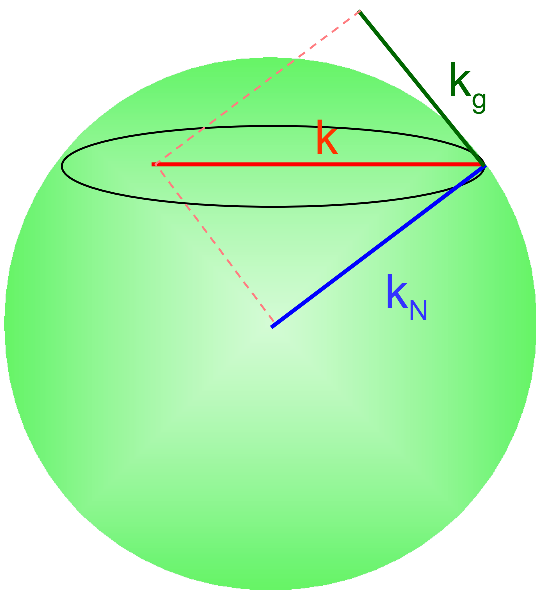
Parametrizar al círculo como $\alpha(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t, \sqrt{1-r^2})$

$\alpha'(t) = (-r\,\mathrm{sen}\,t, r\cos t, 0)$

$\alpha''(t) = (-r\cos t, - r\,\mathrm{sen}\,t, 0)$

$N(\alpha(t)) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t, \sqrt{1-r^2})$

$K_N = (-r\cos t, - r\,\mathrm{sen}\,t, 0) \cdot (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t, \sqrt{1-r^2})/r^2 = 1$



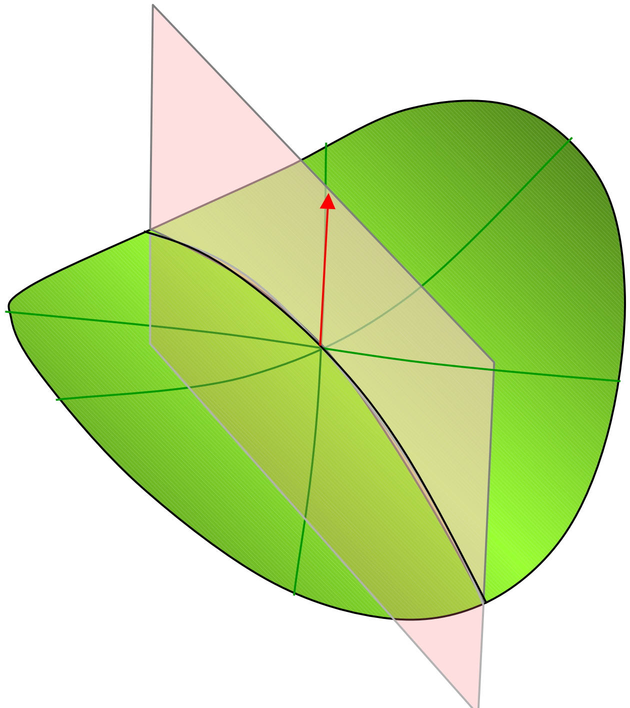
Curvatura: $k = 1/r$

Curvatura normal: $k_N = 1$

Curvatura geodésica: $k_g = \sqrt{1/r^2 - 1}$

Secciones normales

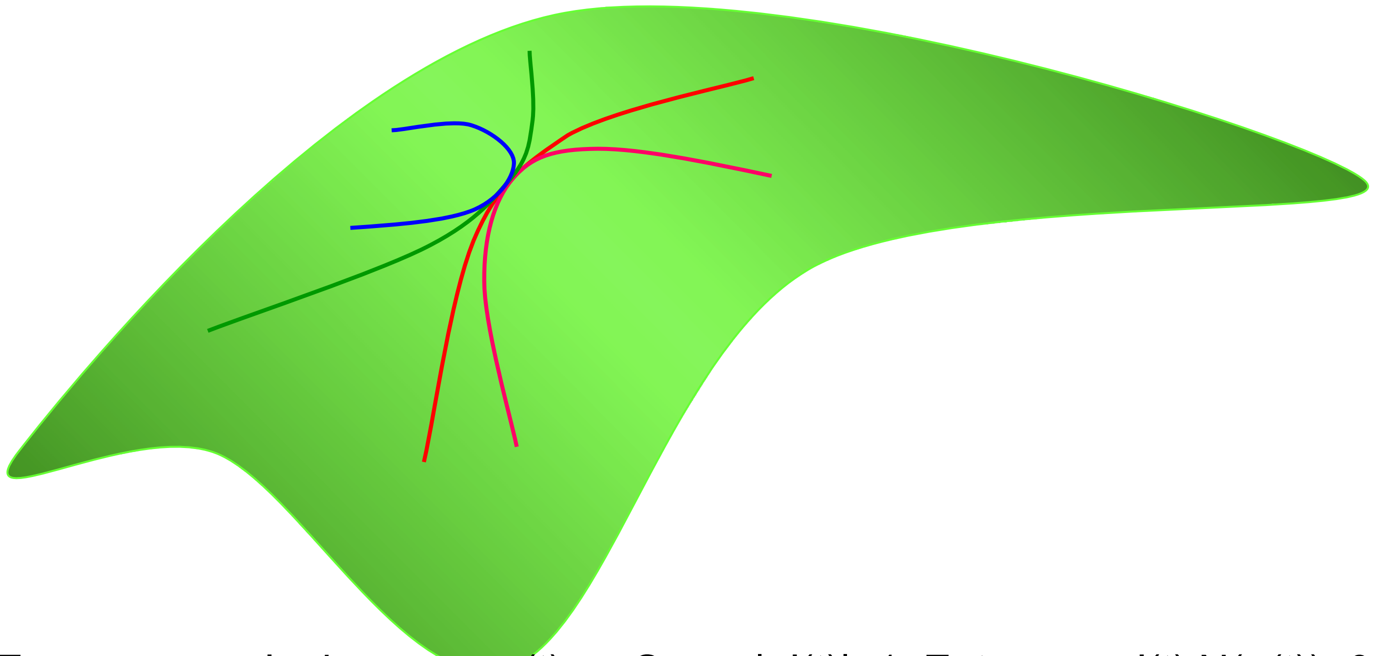
Dado un punto y una dirección en una superficie regular S, podemos tomar un plano P normal a S en esa dirección, y considerar la curva C = S∩P.



Como el vector normal a C es el vector normal a S, la curvatura de C es igual a su curvatura normal en ese punto.

Curvaturas normales en S

Teorema. La curvatura normal de una curva en S sólo depende de la dirección de la curva en el punto.

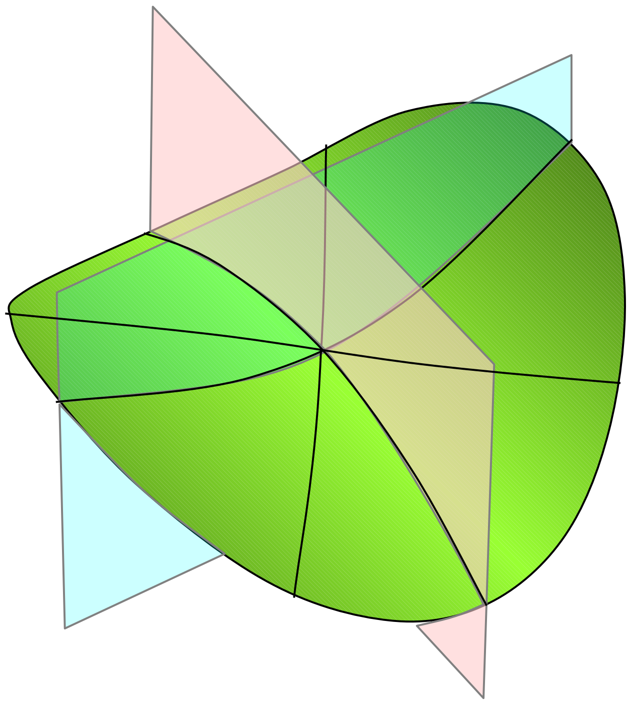


Dem. Tomemos cualquier curva $\alpha(t)$ en S con $|\alpha'(t)|=1$. Entonces $\alpha'(t)\cdot N(\alpha(t))=0$, por lo tanto derivando queda $\alpha''(t)\cdot N(\alpha(t))+ \alpha'(t)\cdot N(\alpha(t))'=0$.

Así que $k_N = \alpha''(t)\cdot N(t) = - \alpha'(t)\cdot N(\alpha(t))'$ pero la derivada $N(\alpha(t))'$ sólo depende de la dirección $\alpha'(t)$.

Curvaturas normales de S

Como la curvatura normal de una curva en S solo depende de su dirección, podemos hablar de la *curvatura normal de la superficie* en esa dirección.

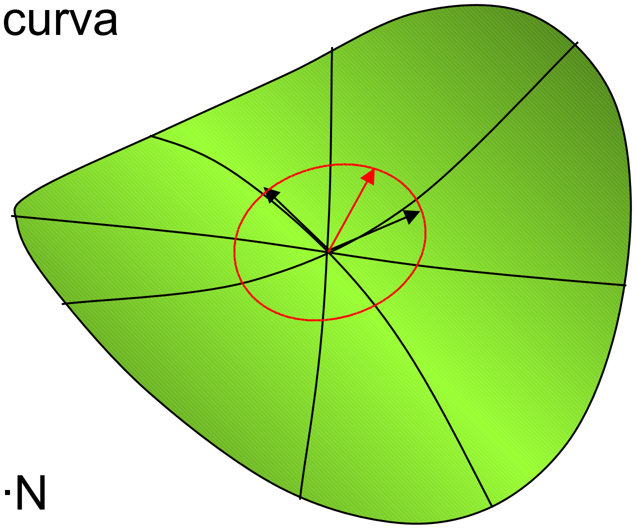


Observar que las curvaturas normales pueden ser positivas o negativas.

Curvaturas normales de S

Veamos como se relacionan las curvaturas normales de S en las distintas direcciones en un punto.

Si damos una parametrización Φ de S de modo que en ese punto Φ_x y Φ_y sean unitarios y perpendiculares y para cada vector unitario (a,b) consideramos la curva



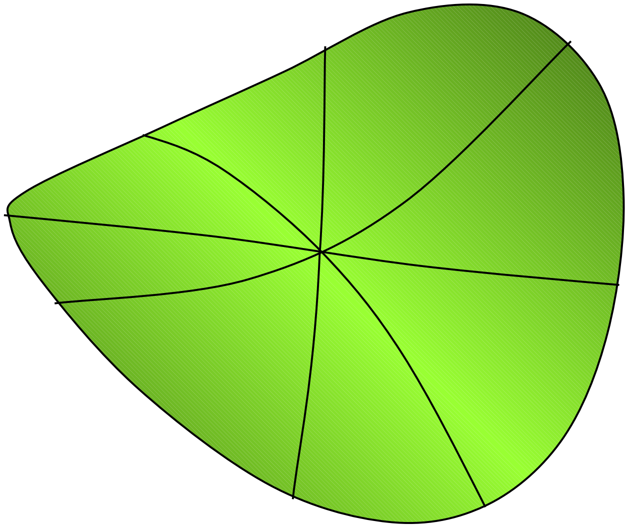
$\alpha(t) = \Phi(at,bt)$ entonces
$\alpha'(0) = a\Phi_x + b\Phi_y$
$\alpha''(0) = a^2\Phi_{xx} + 2ab\Phi_{xy} + b^2\Phi_{yy}$

entonces la curvatura normal de S en la dirección (a,b) es la curvatura normal de $\alpha(t)$ que es $k = \alpha''(0)\cdot N = a^2\Phi_{xx}\cdot N + 2ab\Phi_{xy}\cdot N + b^2\Phi_{yy}\cdot N$

Así que las curvaturas normales en cada punto de S están dadas por una forma cuadrática.

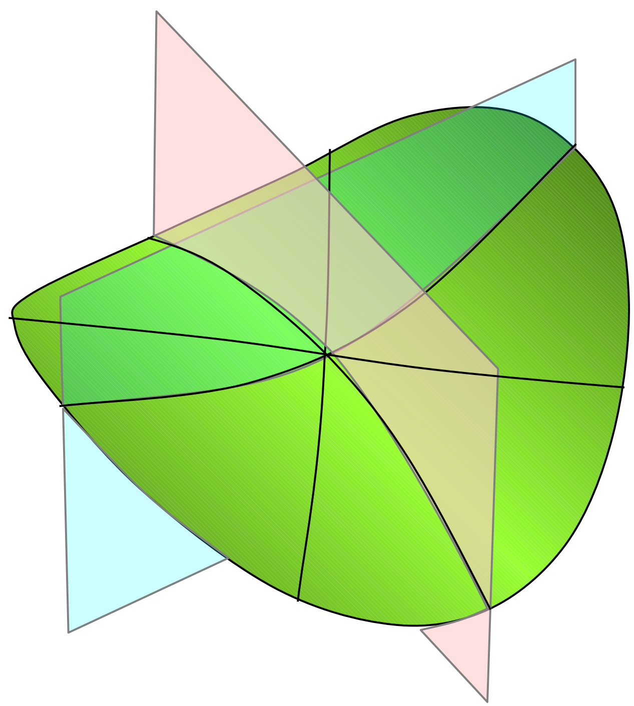
Curvaturas principales

Como las curvaturas normales de S en cada punto están dadas por una forma cuadrática, los valores máximo y mínimo de la curvatura normal en el punto son los valores propios de la matriz asociada. Estas son las *curvaturas principales* de S en el punto.



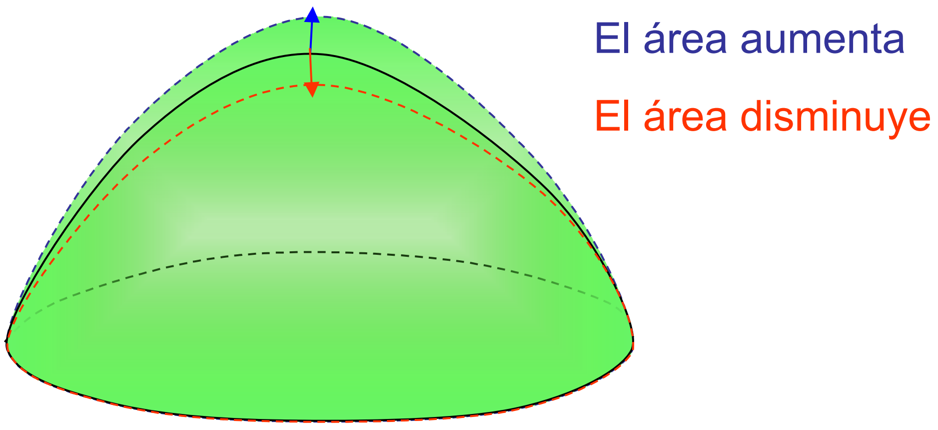
Curvatura media

La *curvatura media* en un punto de la superficie S es el promedio de todas las curvaturas normales en el punto y resulta ser igual al promedio de las dos curvaturas principales.



Superficies mínimales

Una superficie S es *mínimal* si ninguna perturbación local de S produce una superficie de área menor que S.

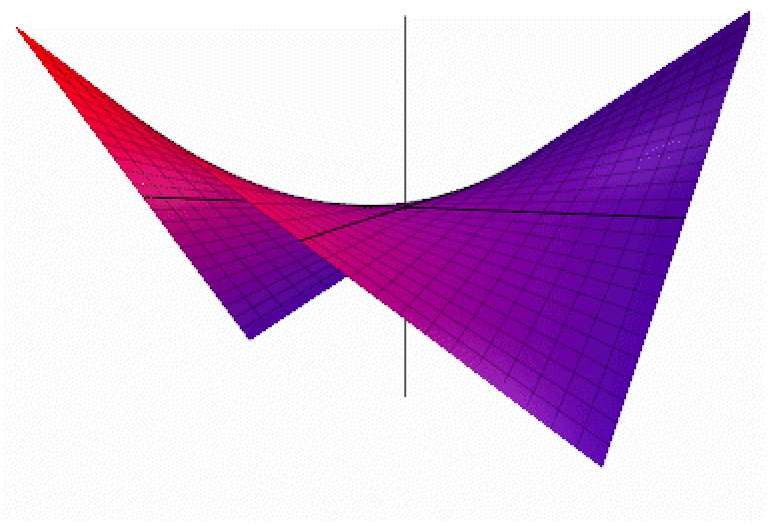


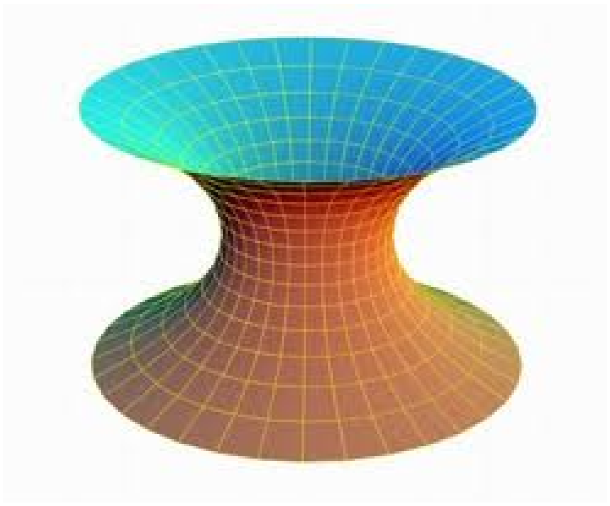
Una superficie convexa no puede ser mínimal

Superficies mínimales

Teorema. Una superficies S es mínimal si y sólo si su curvatura media es 0 en cada punto.

Idea dem. Si la curvatura media de S no es cero podemos obtener una superficie con menor área empujando a S hacia el lado donde la curvatura principal es mayor.

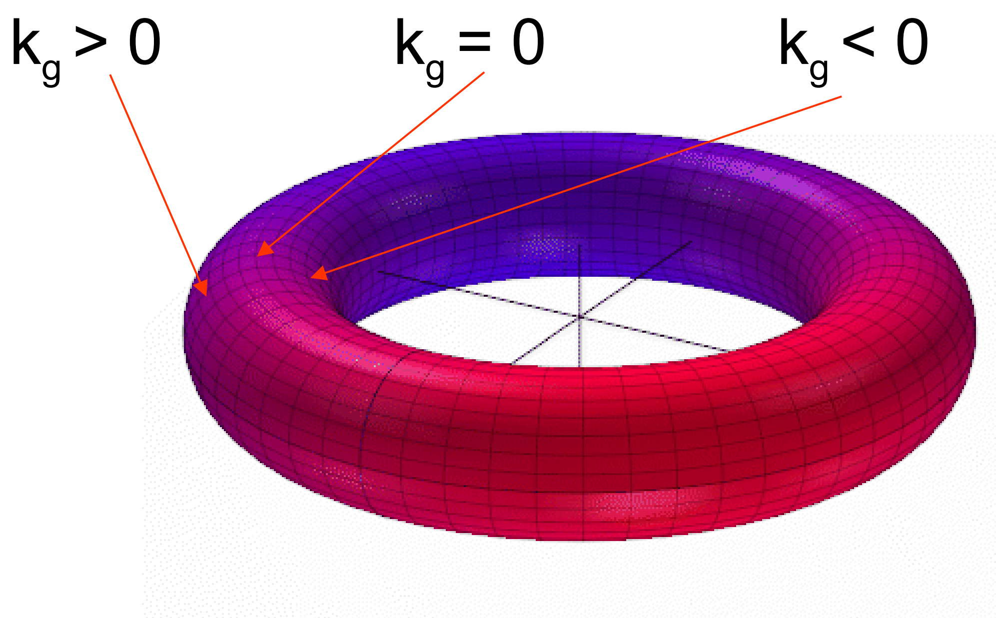




Superficies minimales

Curvatura gaussiana

La *curvatura gaussiana* en un punto de la superficie es el producto de las curvaturas principales en el punto.



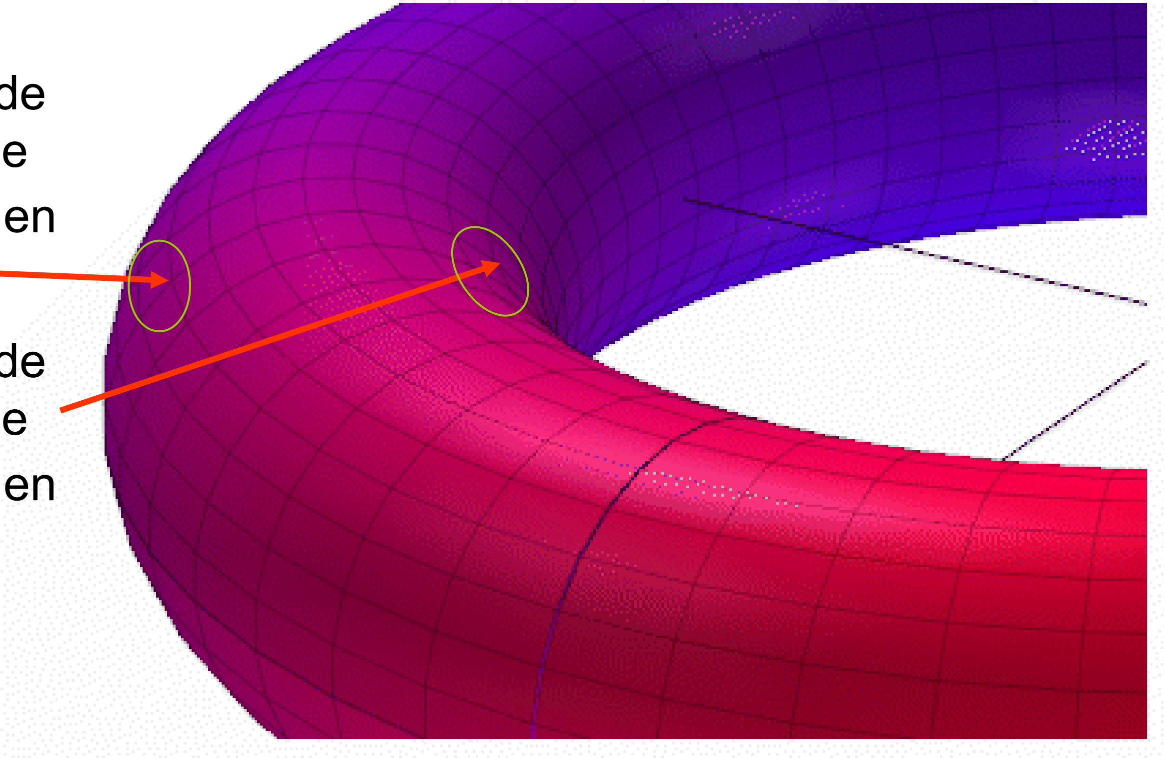
La curvatura gaussiana k_g es positiva en los puntos donde la superficie se curva hacia un solo lado del plano tangente y es negativa en los puntos donde se curva hacia los dos lados.

Curvatura gaussiana

La *curvatura gaussiana* en un punto de la superficie es el producto de las curvaturas principales en el punto.

En las regiones de S donde $k_g>0$ las circunferencias de los círculos de radio r miden menos que 2π r.

En las regiones de S donde $k_g<0$ las circunferencias de los círculos de radio r miden mas que 2π r.



TAREA 22

1. Las superficies minimales tienen curvatura gaussiana menor o igual a 0.

2. Si α es una curva en una superficie S con curvatura gaussiana positiva, la curvatura de α en cada punto es mayor o igual a la mínima de las curvaturas principales de S en el punto.

Clase 23

Geometría intrínseca de una superficie

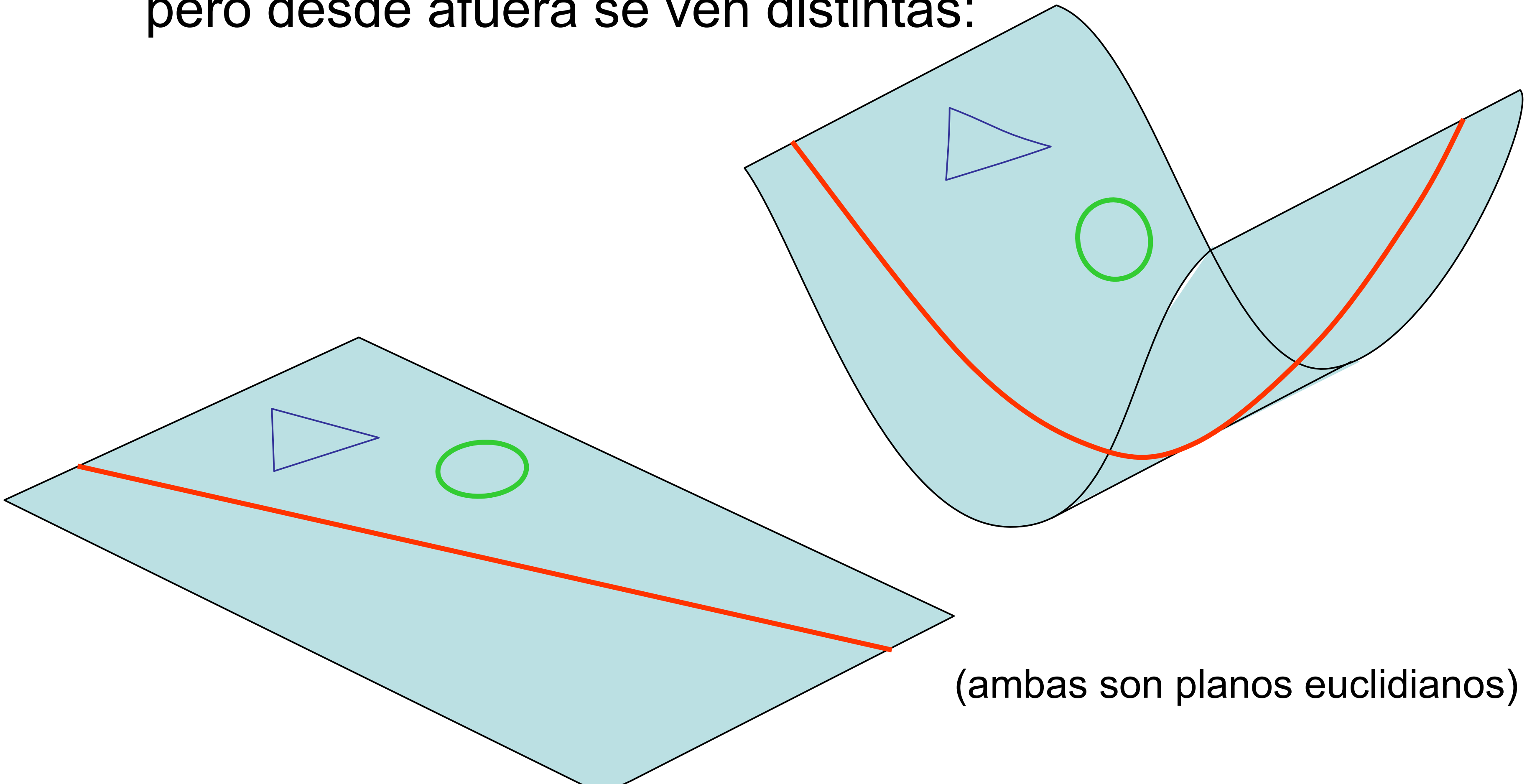
Geometría intrínseca

¿Qué cosas podemos medir *desde adentro* de la superficie (sin hacer ninguna referencia al espacio exterior)?

SI	NO
Longitud de curvas	Curvaturas normales
Ángulos entre curvas	Curvatura media
Áreas de regiones	

Geometría intrínseca

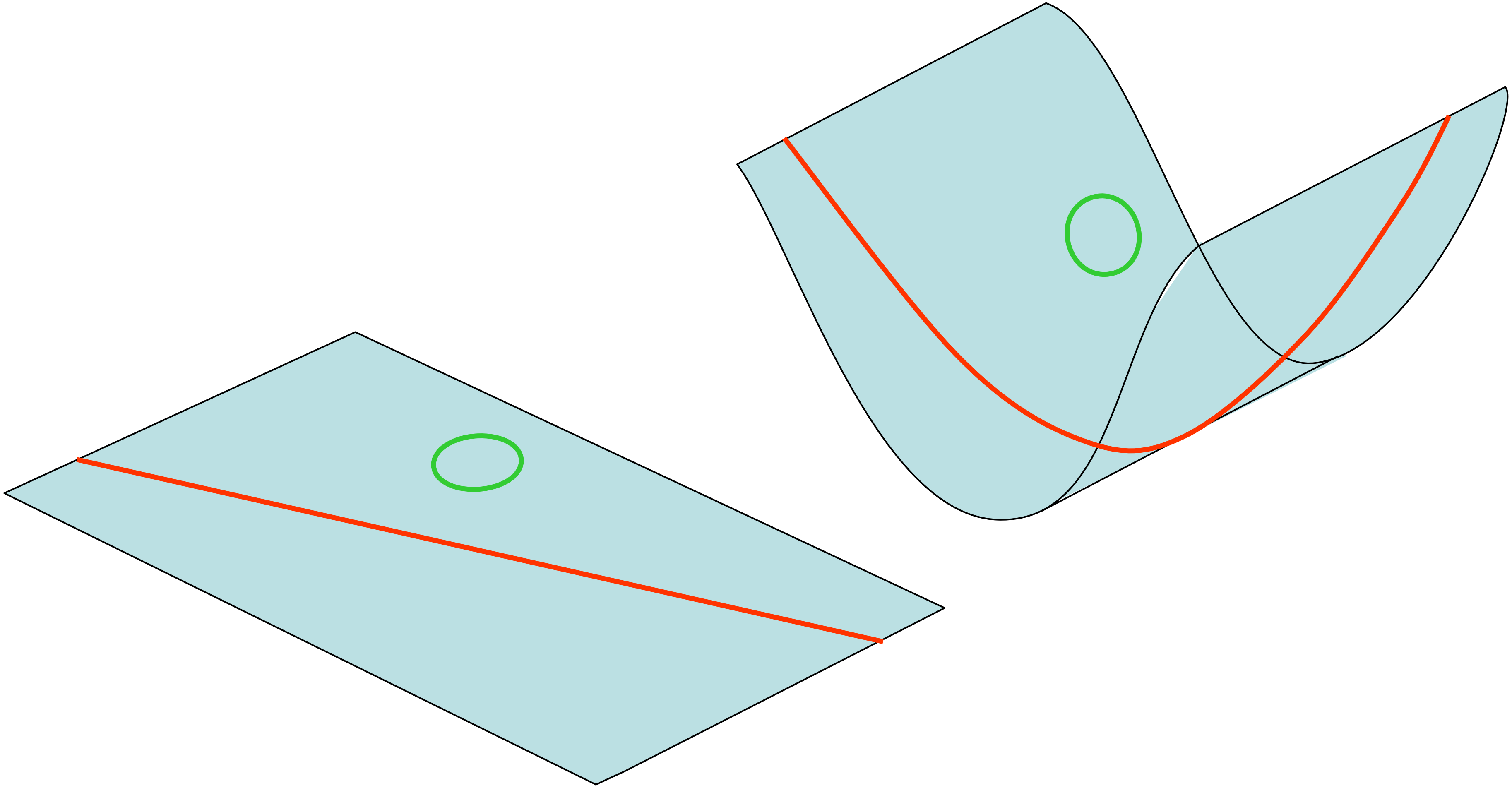
Hay superficies que vistas desde adentro son idénticas, pero desde afuera se ven distintas:



(ambas son planos euclidianos)

Geometría intrínseca

Lo que se ve *desde adentro* es la geometría *intrínseca*.



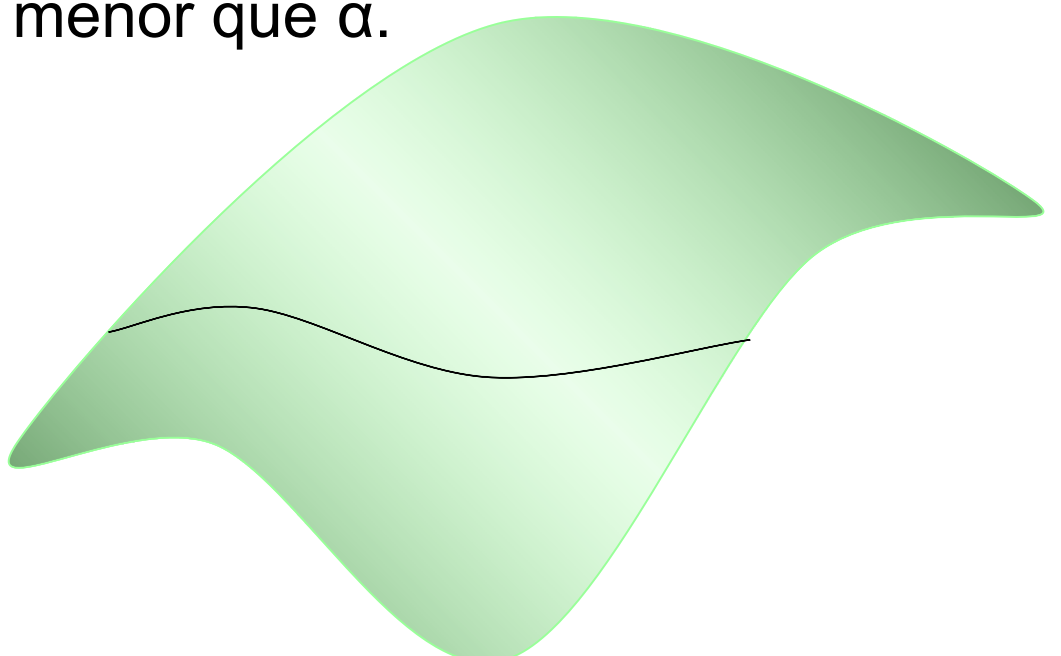
Curvatura Gaussiana

Teorema Egregio de Gauss. La curvatura gaussiana de una superficie es una propiedad geométrica intrínseca (puede calcularse sin mirar fuera de la superficie).

La curvatura gaussiana de una superficie está relacionada por ejemplo con los perímetros de los “círculos” en la superficie (las curvas formadas por puntos a la misma distancia de un punto fijo).

Geodésicas

Una curva α en una superficie S es una *geodésica* de S si ninguna perturbación local de α produce curvas en S de longitud menor que α.

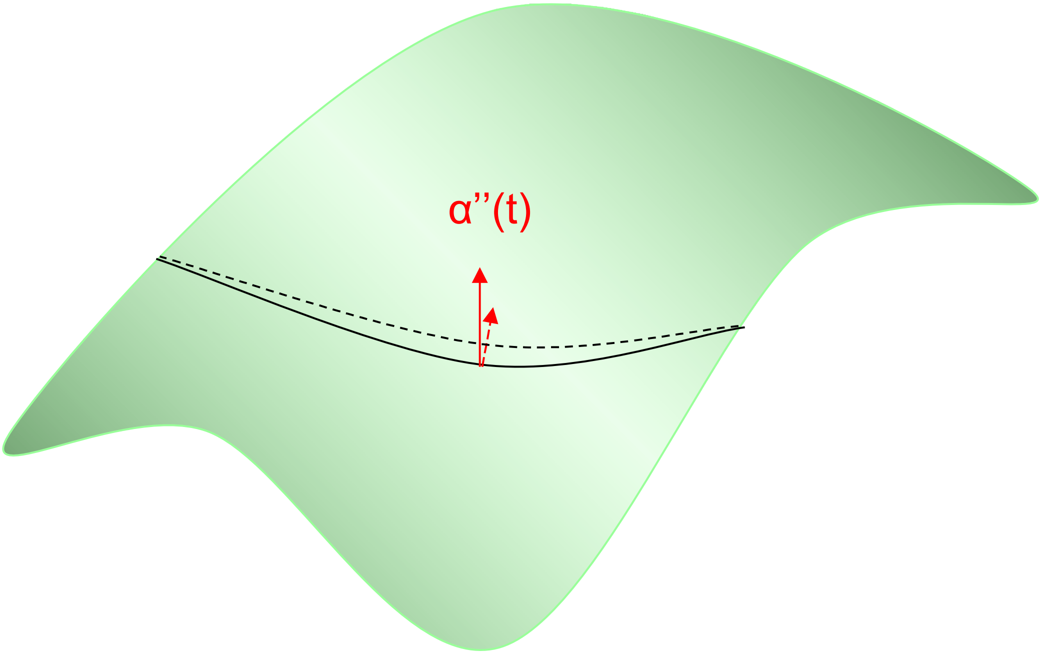


Las geodésicas son las trayectorias “mas rectas” en una superficie.

Geodésicas

Teorema. Las geodésicas en una superficie son las curvas con curvatura geodésica 0.

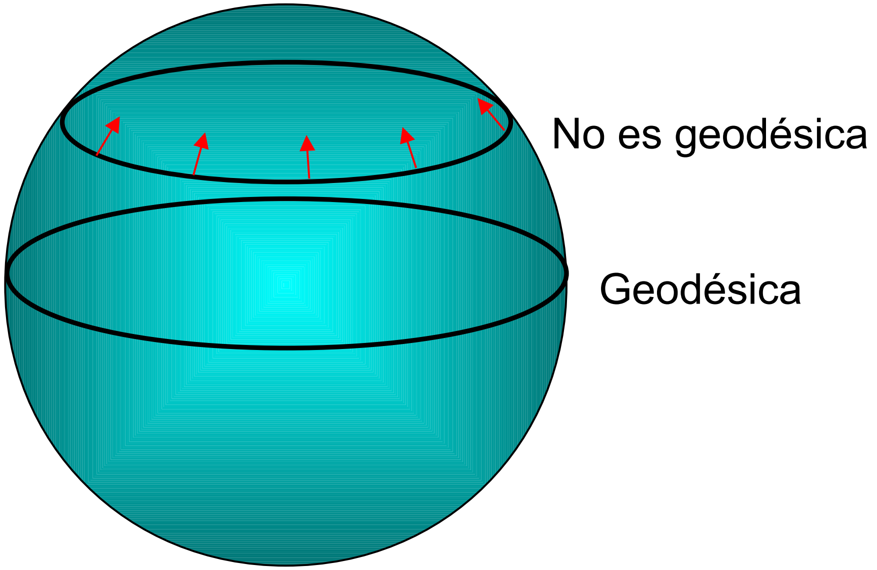
Idea dem. Si la curvatura geodésica de una curva $\alpha(t)$ en S no es 0, entonces $\alpha''(t)$ tiene una componente tangencial a S que apunta hacia un lado de la curva. Empujando a la curva en esa dirección obtendremos una curva de longitud menor.



Geodésicas

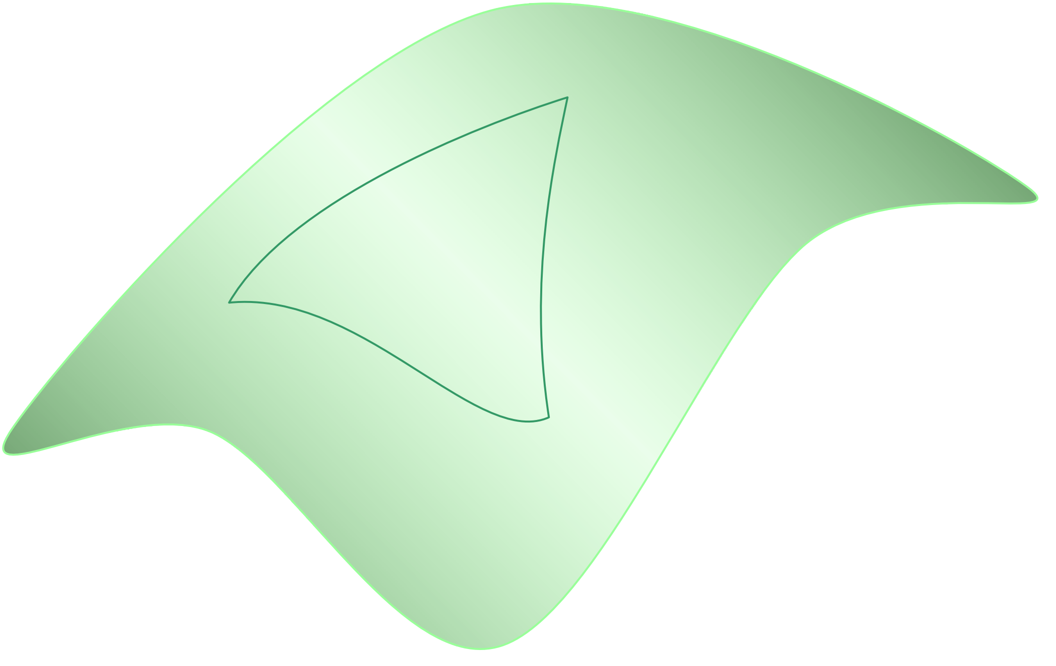
Teorema. Las geodésicas en una superficie son las curvas con curvatura geodésica 0.

Ejemplo. Las geodésicas en una esfera son los arcos de círculos máximos.



Triángulos geodésicos

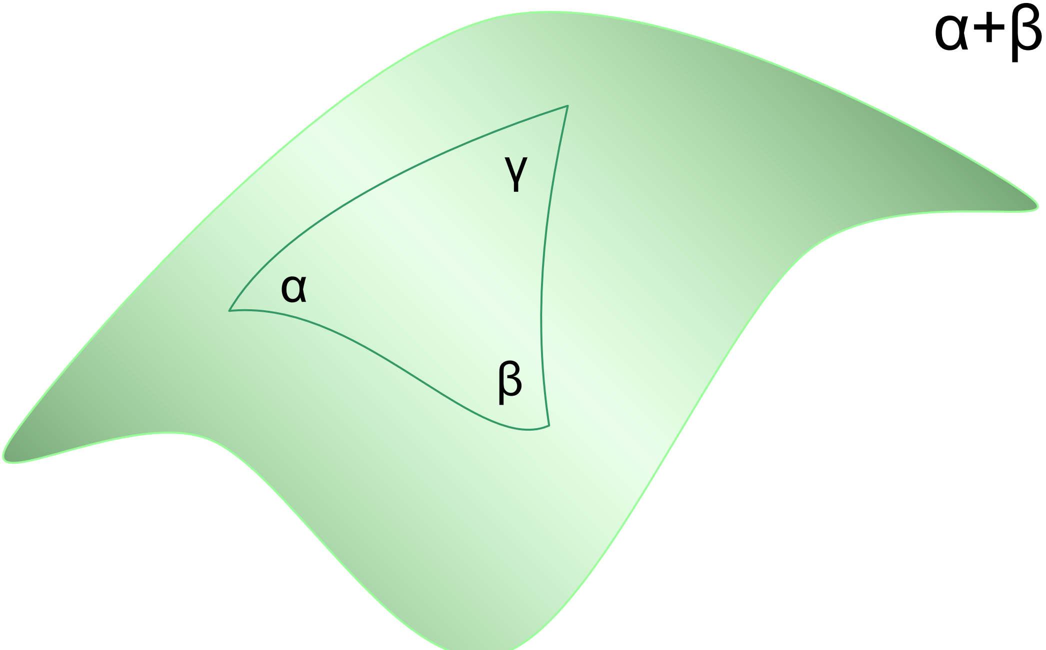
Un *triángulo geodésico* en una superficie S es un triángulo cuyos lados son geodésicas de S.



Triángulos geodésicos

Teorema (Gauss). La suma de sus ángulos internos de un triángulo geodésico está determinada por la curvatura gaussiana en el interior del triángulo:

$$\alpha+\beta+\gamma = \pi + \iint_T k_g$$



TAREA 23

1. Da una fórmula para la suma de los ángulos internos de un polígono geodésico en una superficie.

Funciones diferenciables

Una función $f:R^n \to R^m$ es *diferenciable* en un punto x_0 si existe una función lineal L que aproxima bien a la variación de f cerca de x_0, de modo que:

$\lim_{x \to x0} [f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)] / |x-x_0| = 0$

Tal función lineal L recibe el nombre de *diferencial* de f en x_0. Observar que si existe la diferencial es única.

Teorema. La función f es diferenciable en x si las derivadas parciales existen y son continuas en una vecindad de x. En este caso la diferencial de f está dada por la matriz de derivadas parciales de f.

Teorema de la función implícita

Teorema. Si $f(x,y)$ es una función diferenciable y $\partial f/\partial x \neq 0$ en un punto entonces existe una vecindad del punto en el que las soluciones de la ecuación $f(x,y) = c$ están dadas por $y=g(x)$ (*se puede despejar a y como función diferenciable de x*).