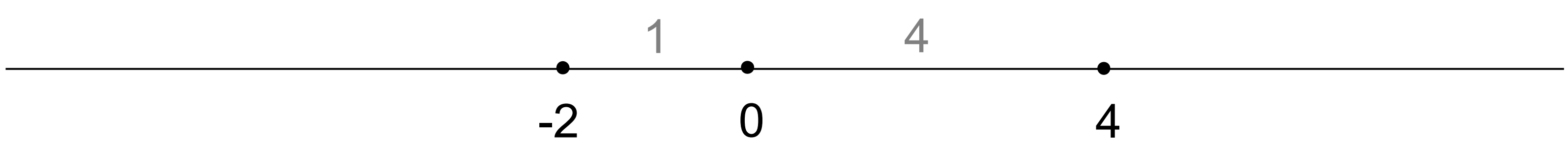
Clase 9

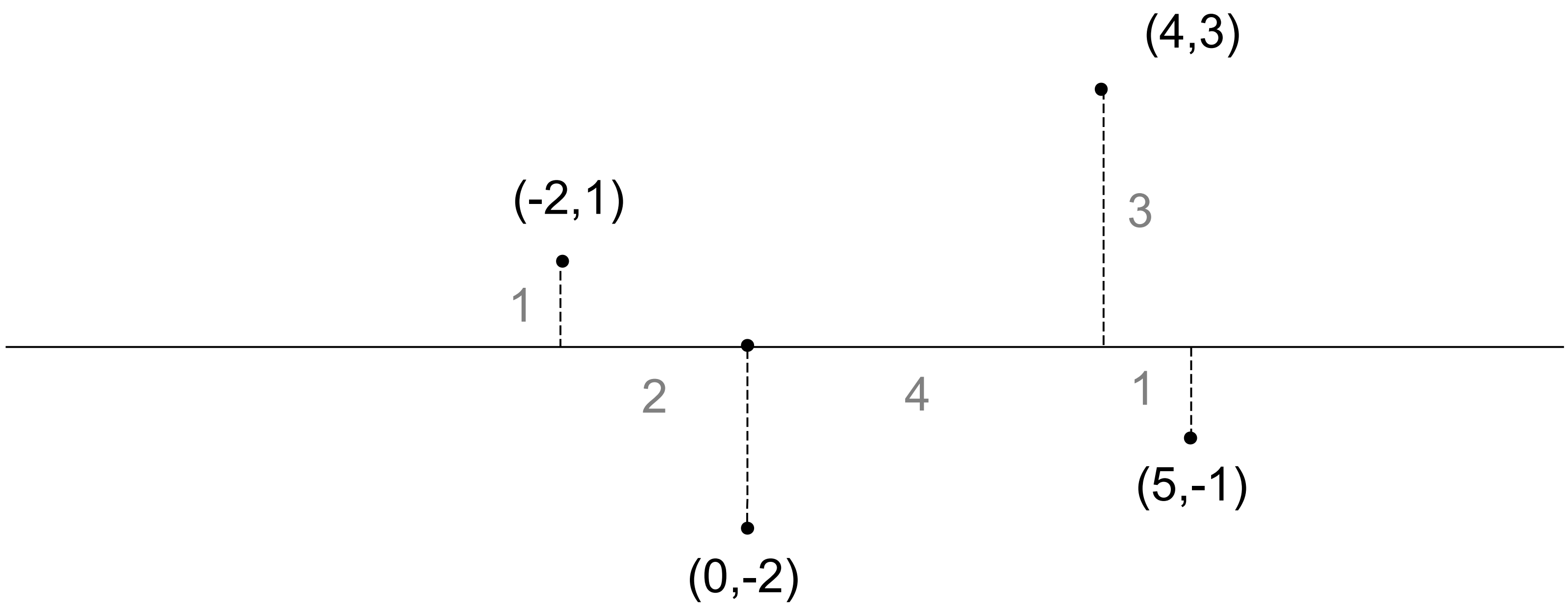
Coordenadas y ecuaciones

Coordenadas Rectangulares
(Descartes 1637)



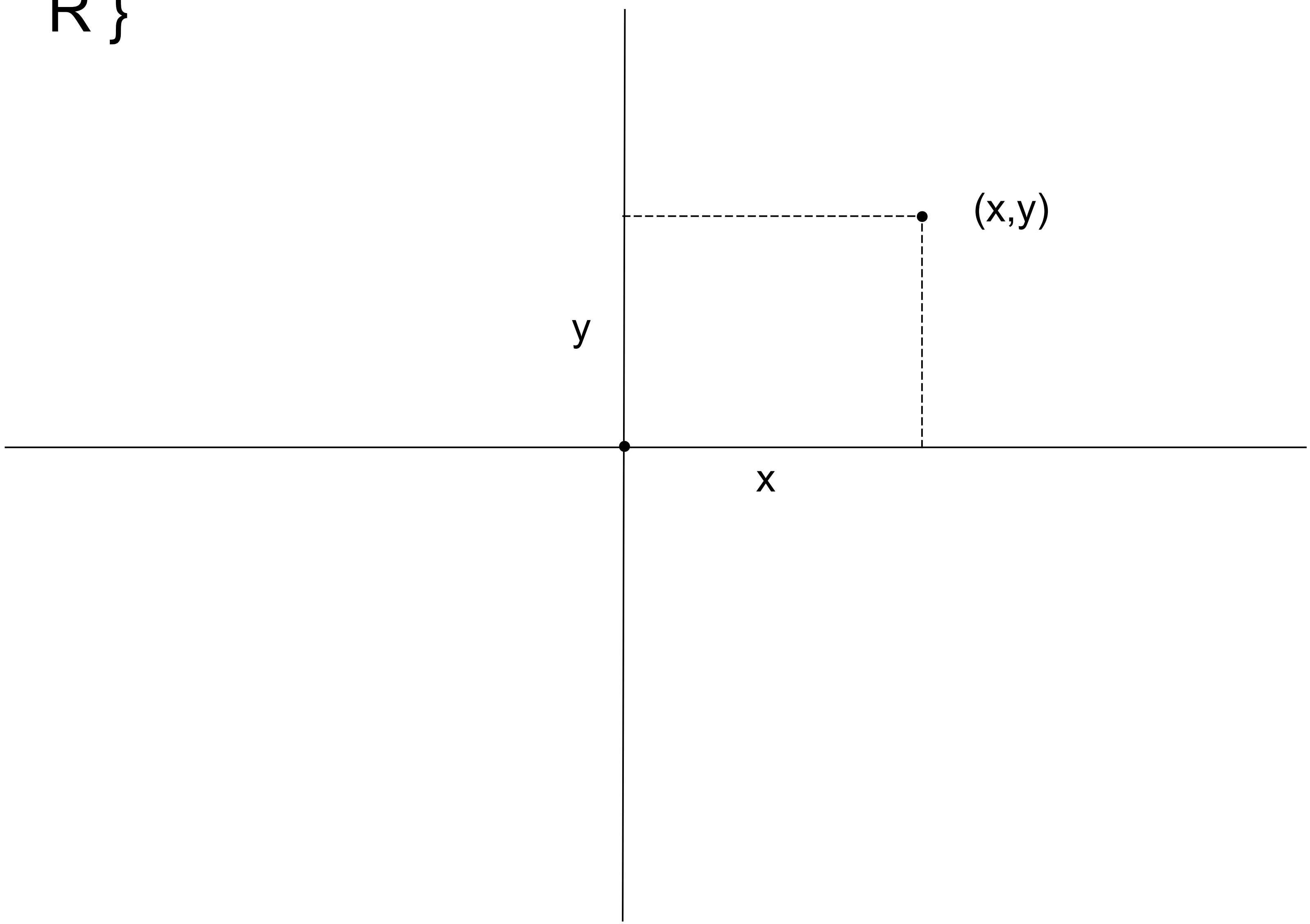
A cada punto de una recta se le puede asociar *un número real positivo o negativo* dependiendo de su distancia a un punto fijo (el origen).

Coordenadas Rectangulares
(Descartes 1637)

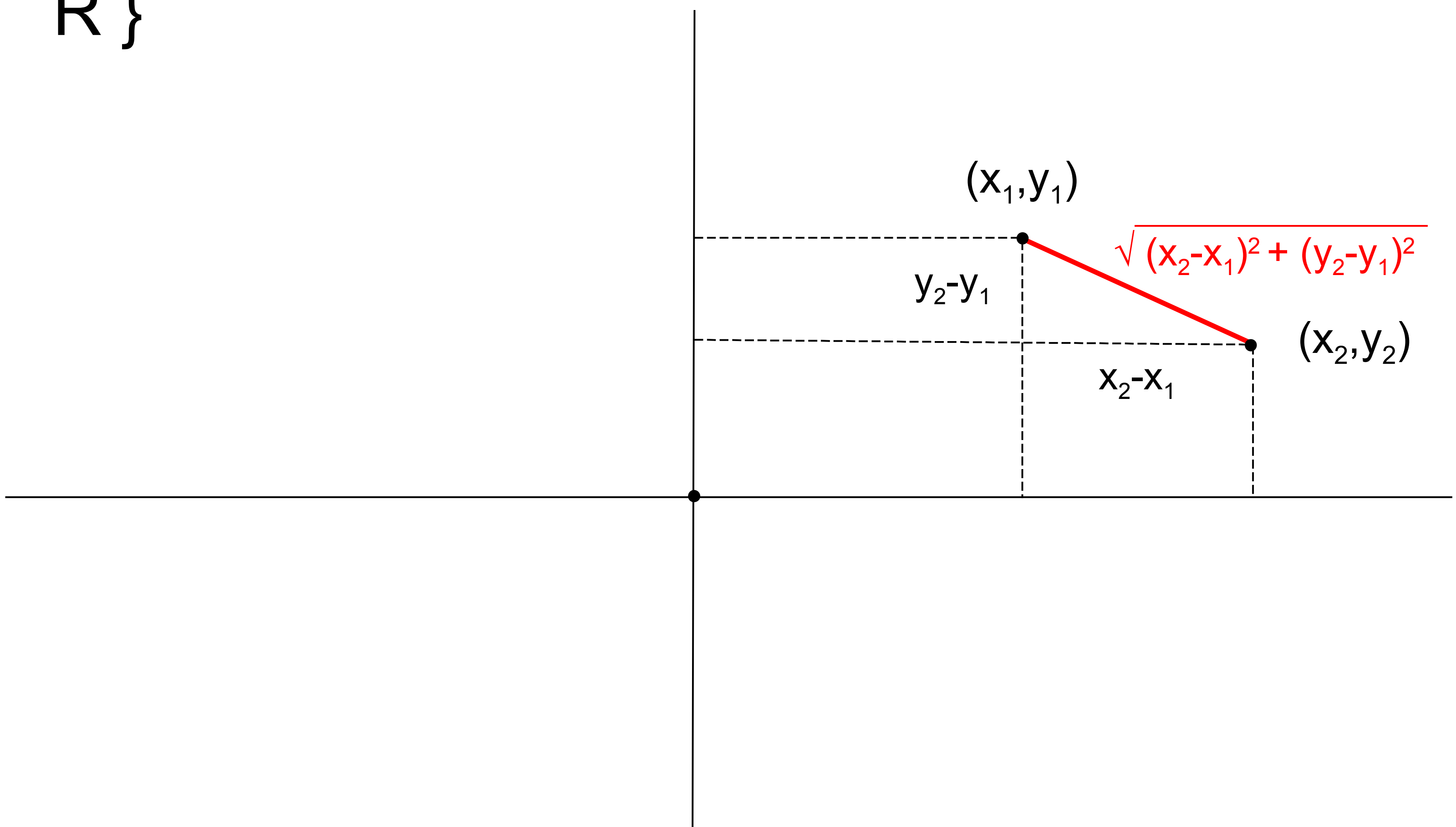


A cada punto del plano se le puede asociar *un par de números reales.*

EL PLANO CARTESIANO : { (x,y) / x,y ⌈ R }

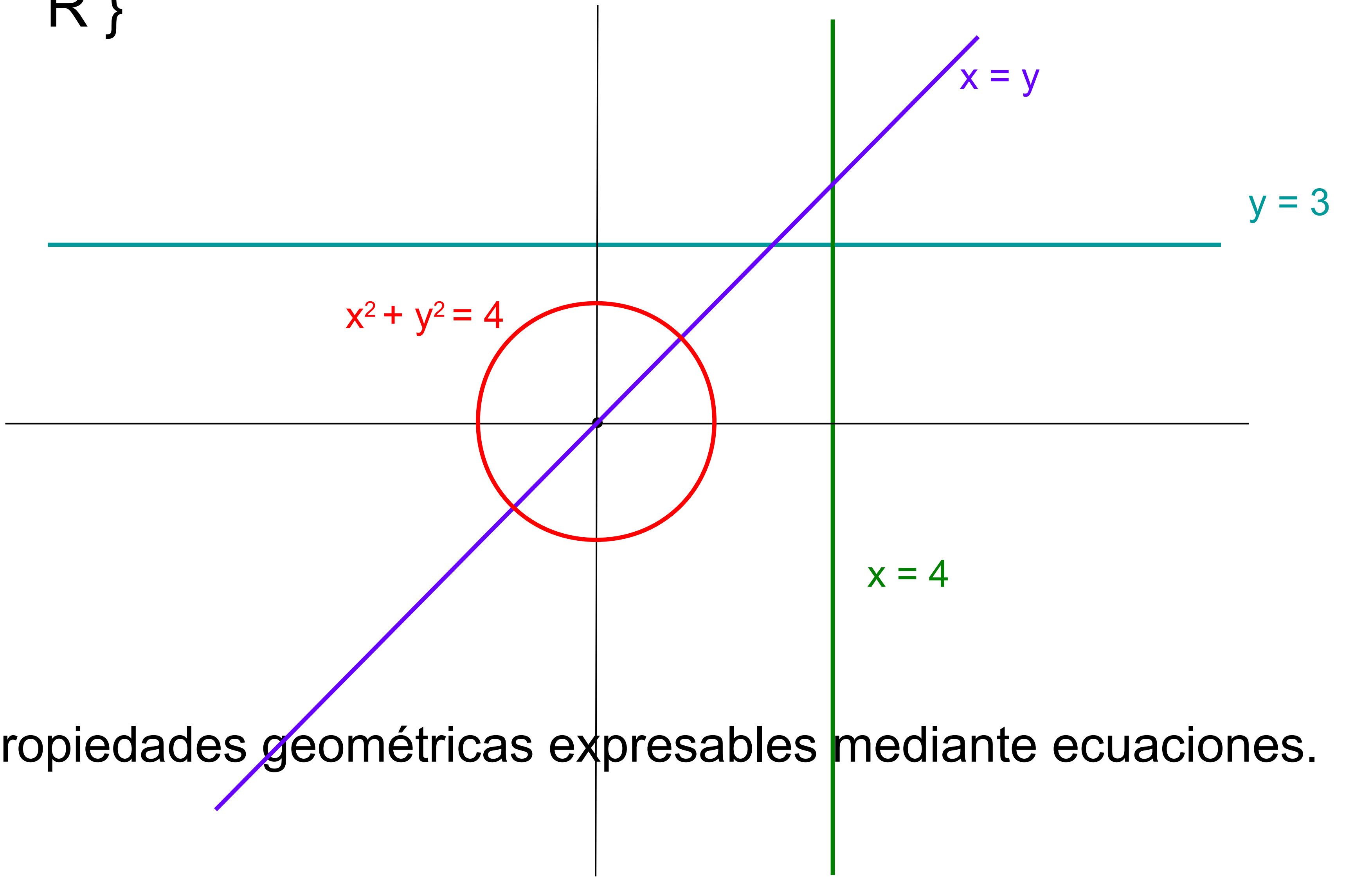


EL PLANO CARTESIANO : { (x,y) / x,y ⌈ R }



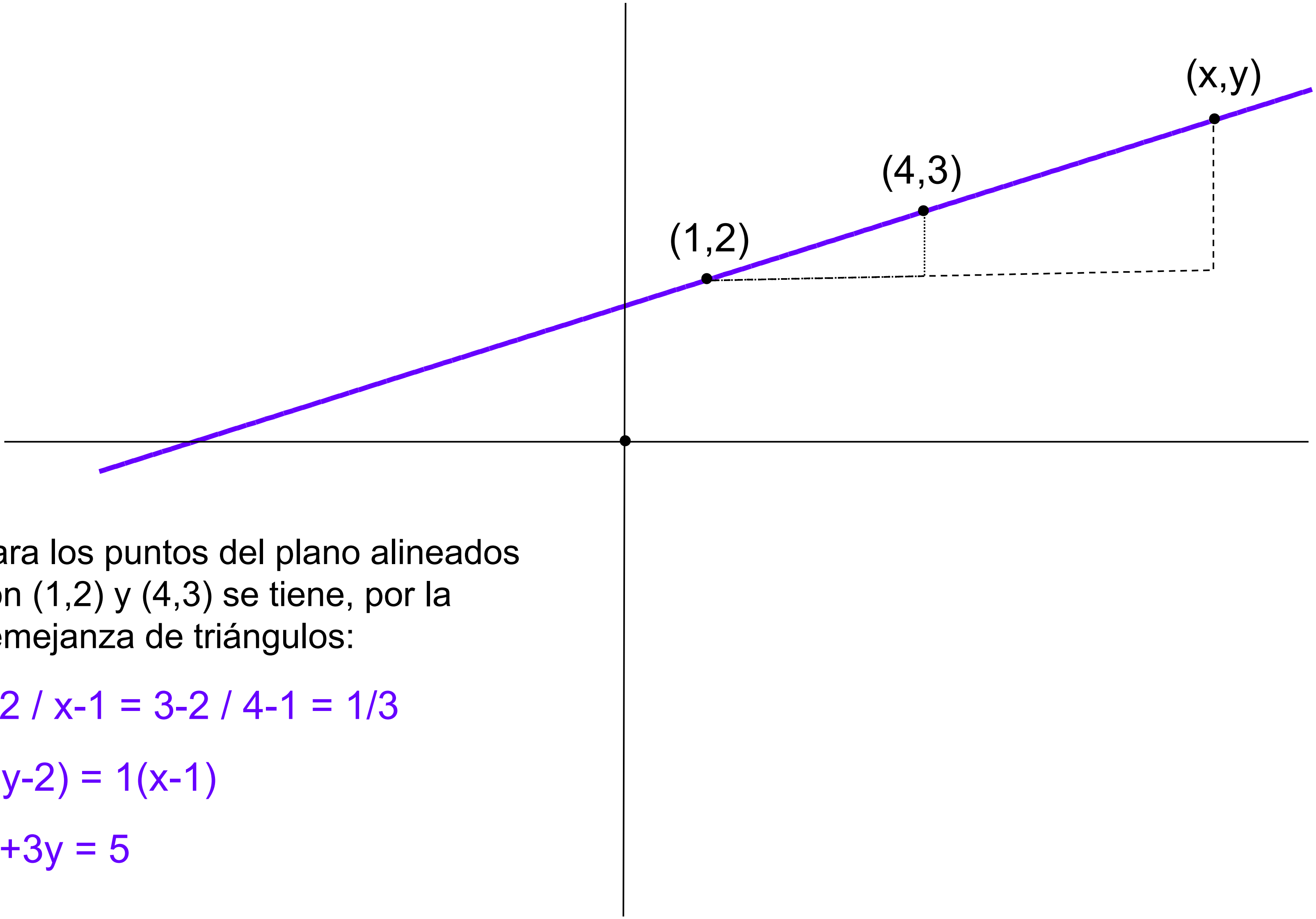
La distancia entre dos puntos puede obtenerse de sus coordenadas.

EL PLANO CARTESIANO : { (x,y) / x,y ⌈ R }



Propiedades geométricas expresables mediante ecuaciones.

Ecuaciones de rectas.



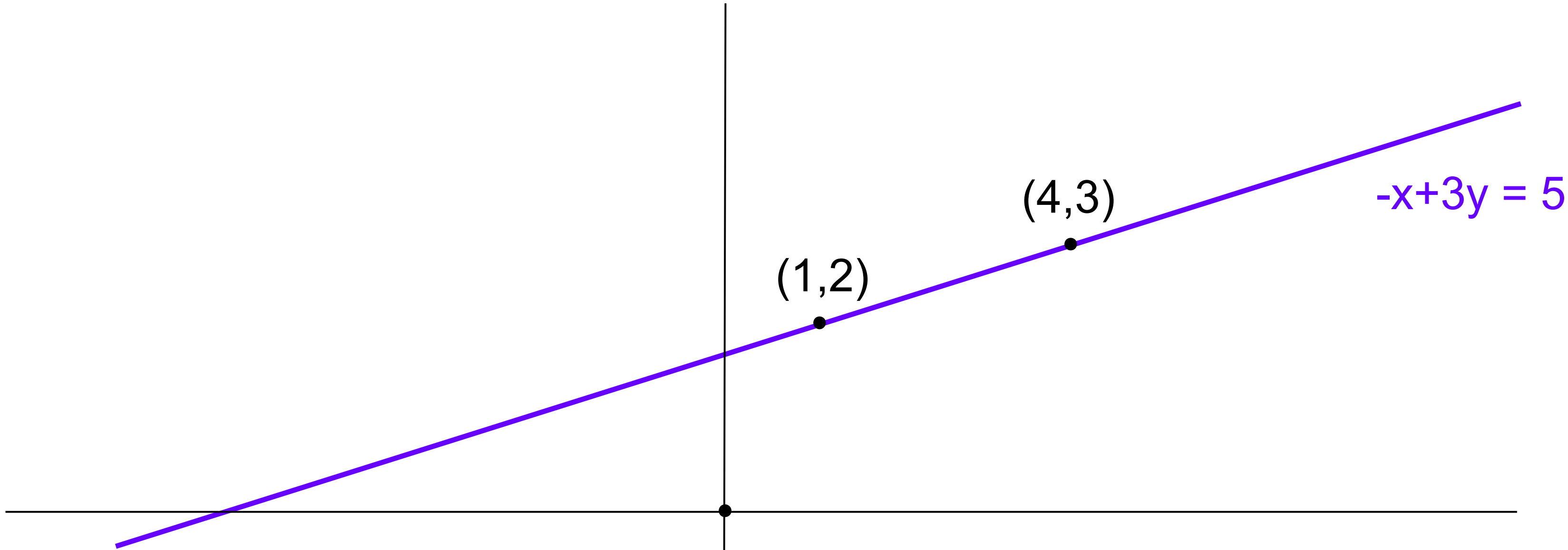
Para los puntos del plano alineados con (1,2) y (4,3) se tiene, por la semejanza de triángulos:

y-2 / x-1 = 3-2 / 4-1 = 1/3

3(y-2) = 1(x-1)

-x+3y = 5

Ecuaciones de rectas.



Para los puntos del plano alineados con (1,2) y (4,3) se tiene, por la semejanza de triángulos:

$y-2 \,/\, x-1 = 3-2 \,/\, 4-1 = 1/3$

$3(y-2) = 1(x-1)$

$-x+3y = 5$

¿El punto (28,11) está en la recta?:

$-(28)+3(11) = 5$

Si está.

Las ecuaciones de primer grado Ax +By = C *corresponden a líneas rectas.*

Demostración

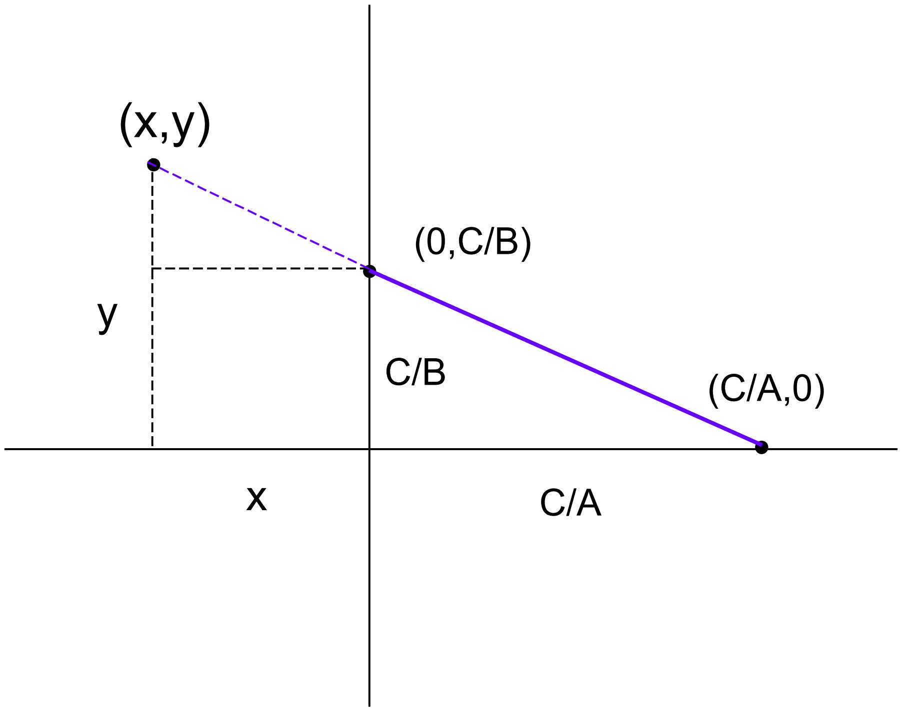
Observar que los puntos (0,C/B) y (A/C,0) satisfacen la ecuación.

El punto (x,y) está alineado con (C/A,0) y (0,B/C) si y solo si los triángulos son semejantes:

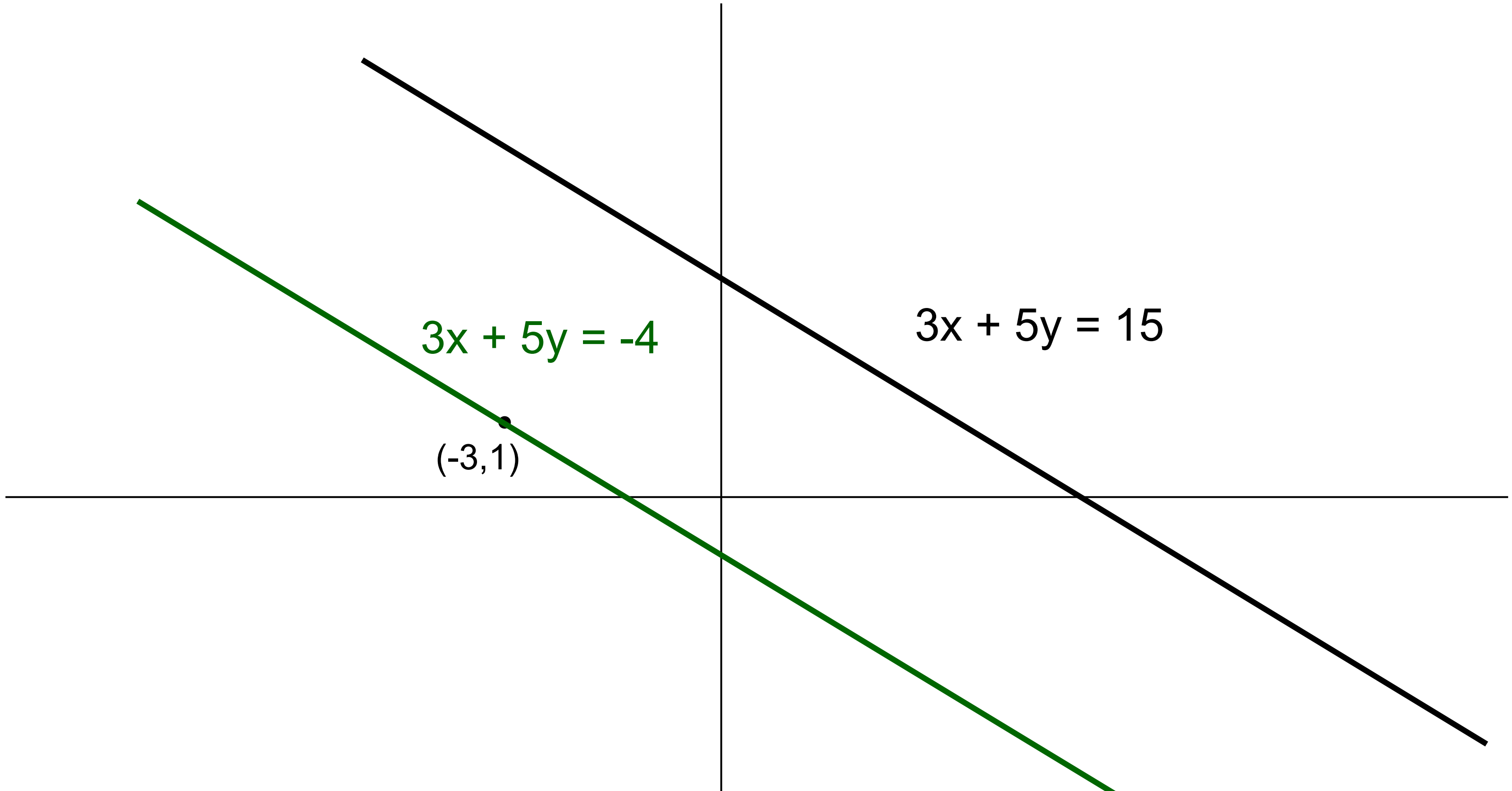
Y - C/B / x = C/B / C/A ⌈

y - C/B = A/B x ⌈

Ax + By = C



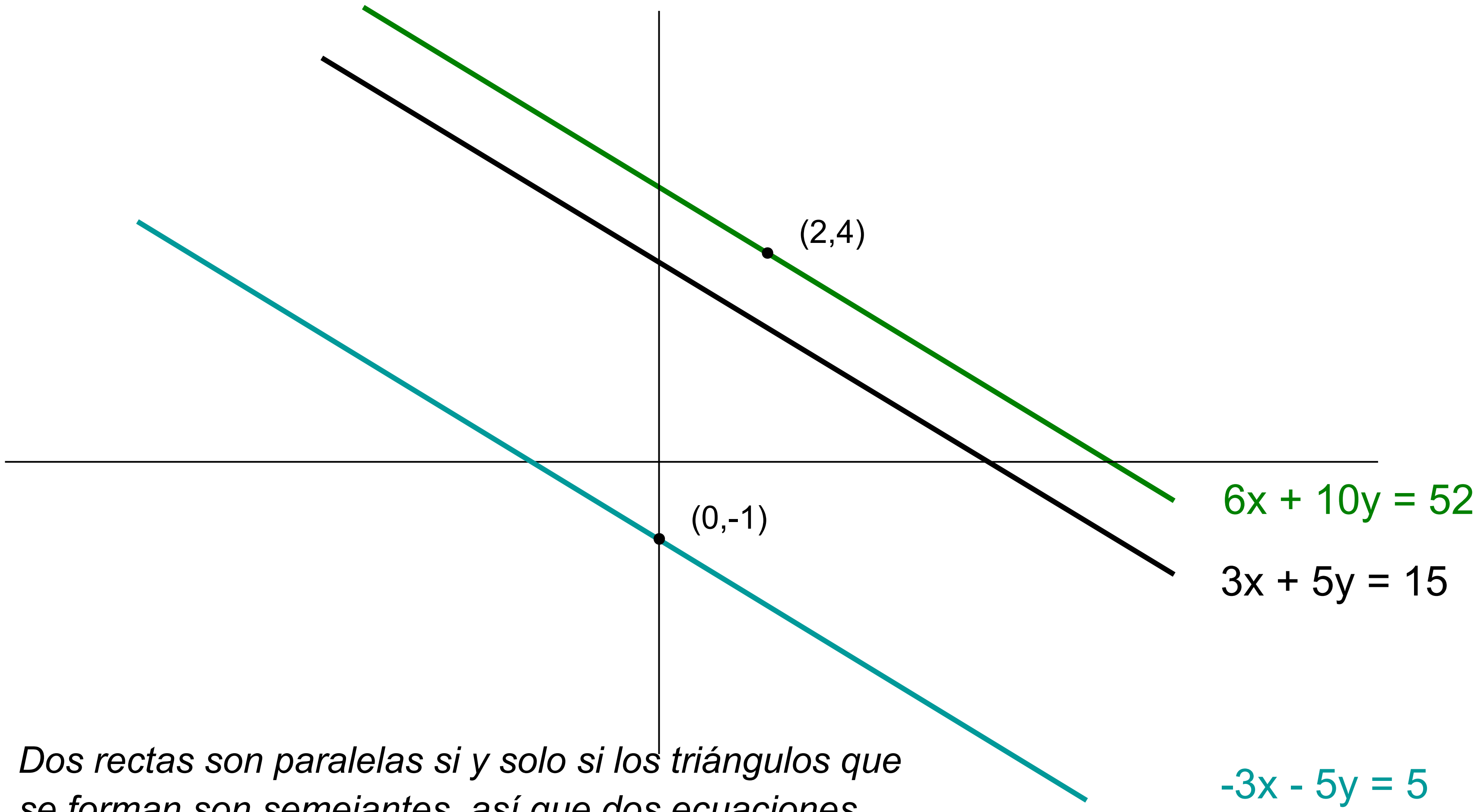
¿Cómo son las ecuaciones de rectas paralelas?



Las ecuaciones $Ax + By = C$ y $Ax + By = D$ con $C \neq D$ no pueden tener soluciones en común, así que deben representar rectas paralelas.

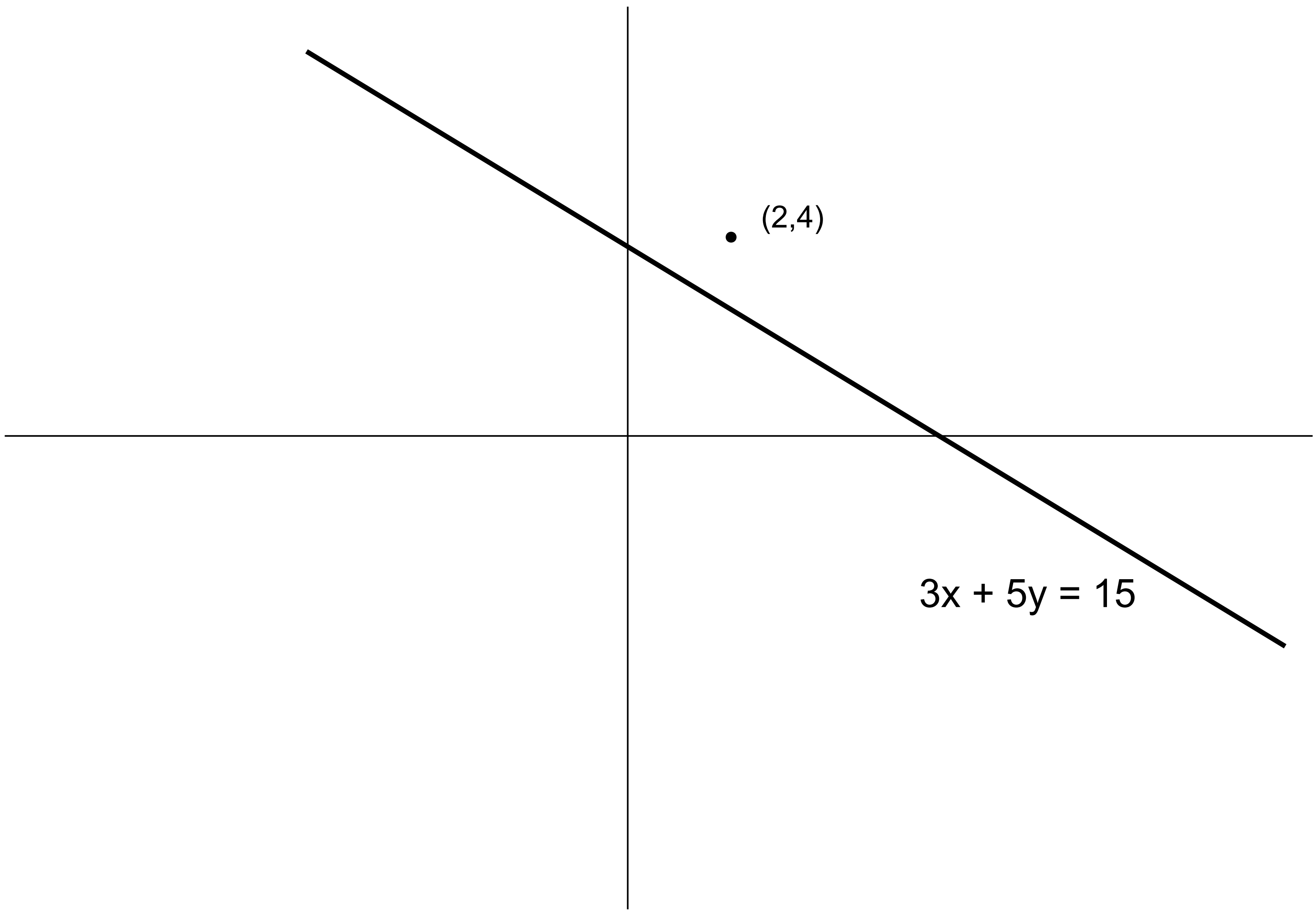
Ej. La recta paralela a $3x + 5y = 15$ que pasa por $(-3,1)$ tiene ecuación $3x + 5y = -4$

¿Cómo son las ecuaciones de rectas paralelas?

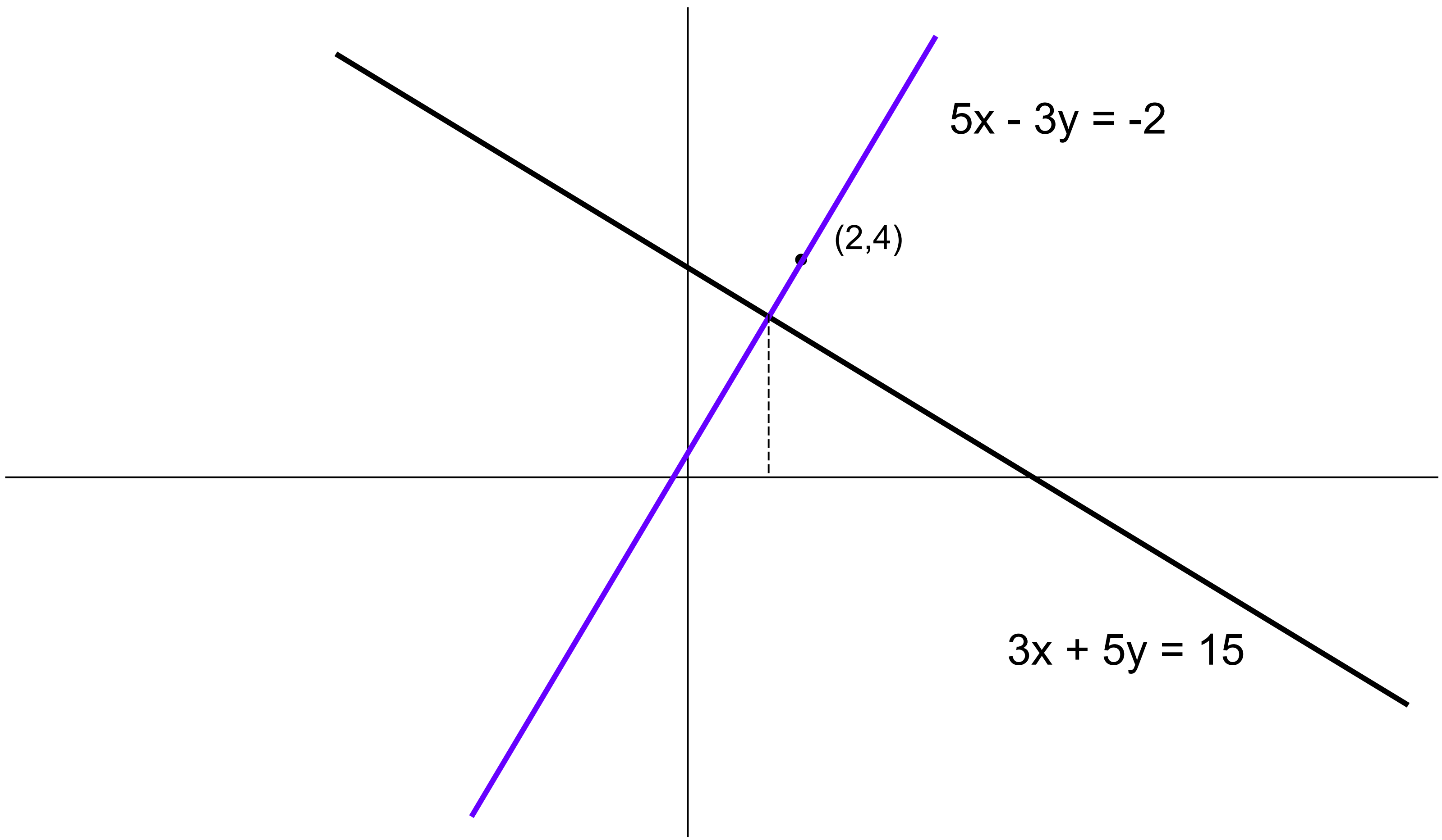


Dos rectas son paralelas si y solo si los triángulos que se forman son semejantes, así que dos ecuaciones $Ax + By = C$ y $Dx + Ey = F$ *representan rectas paralelas si y solo si* $A/B = D/E$.

¿Cómo son las ecuaciones de rectas perpendiculares?

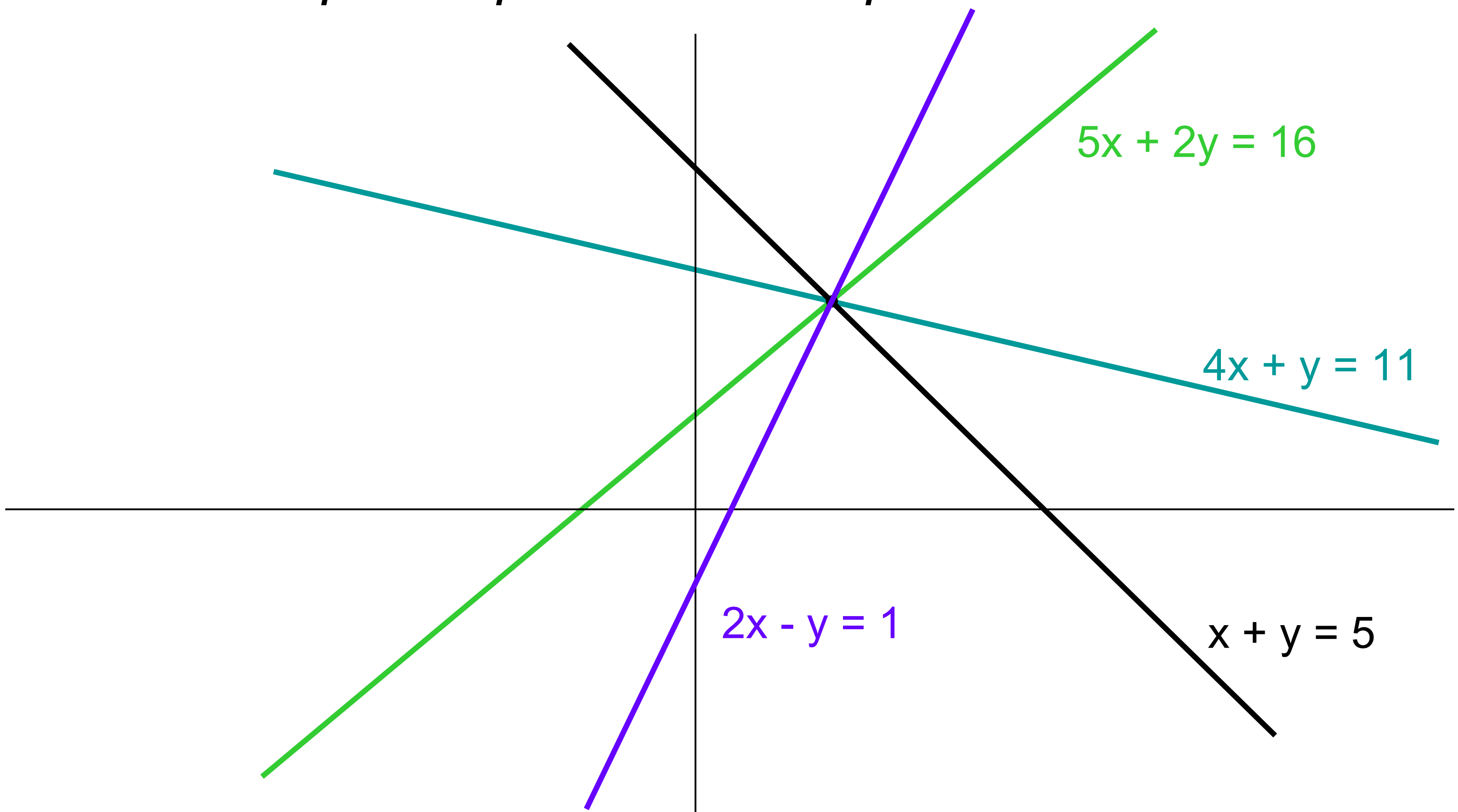


¿Cómo son las ecuaciones de rectas perpendiculares?



Por semejanza de triángulos, las ecuaciones $Ax + By = C$ y $Dx + Ey = F$ *representan rectas perpendiculares si y solo si* $A/B = -E/D$.

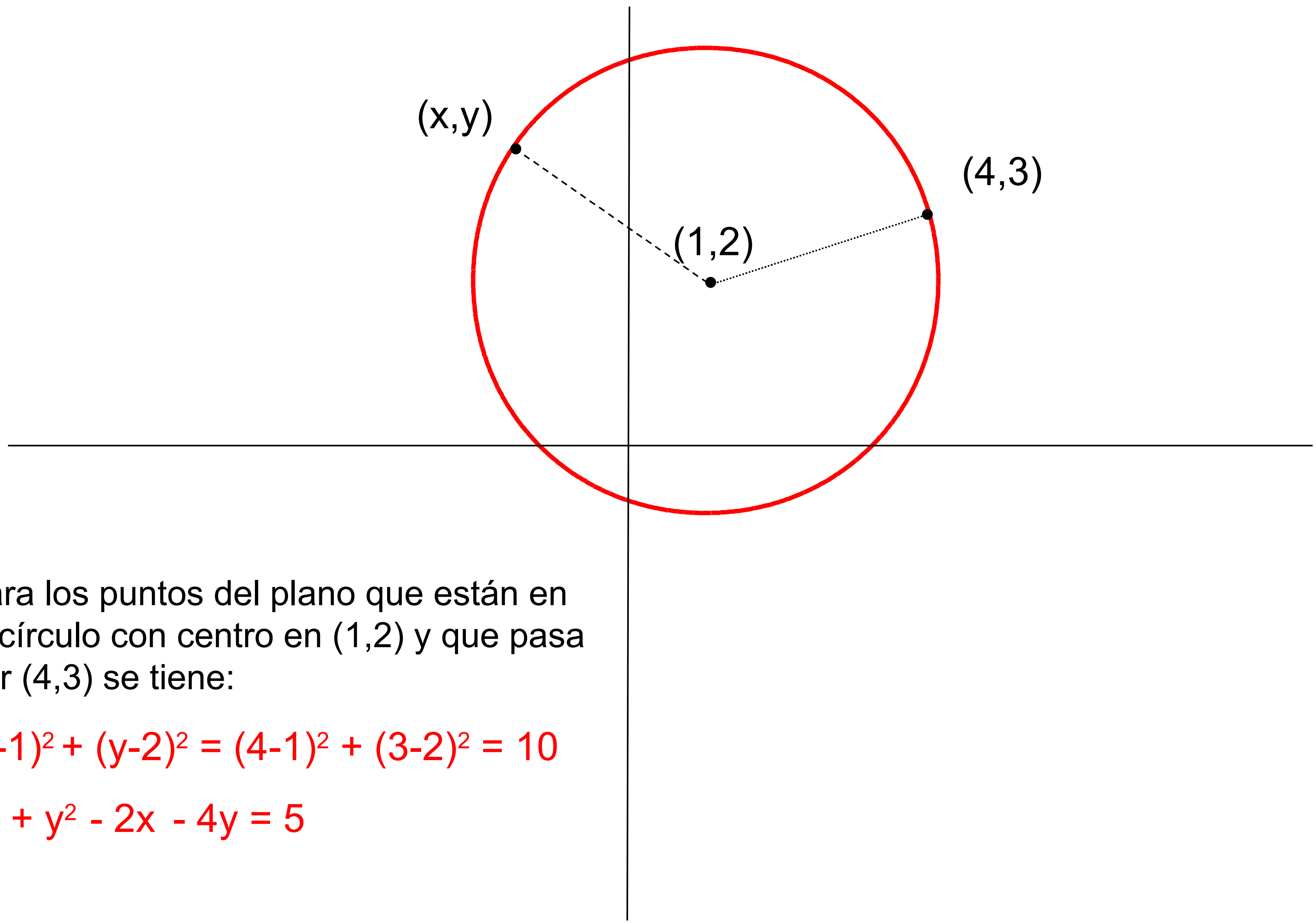
¿Cómo son las ecuaciones de las rectas que pasan por un mismo punto?



La recta $Ax + By = C$ pasa por el punto (a,b) si y solo si $Aa+Bb=C$

Ej. Las rectas que pasan por $(2,3)$ tienen ecuaciones de la forma $Ax+By = 2A+3B$

Ecuaciones de círculos.



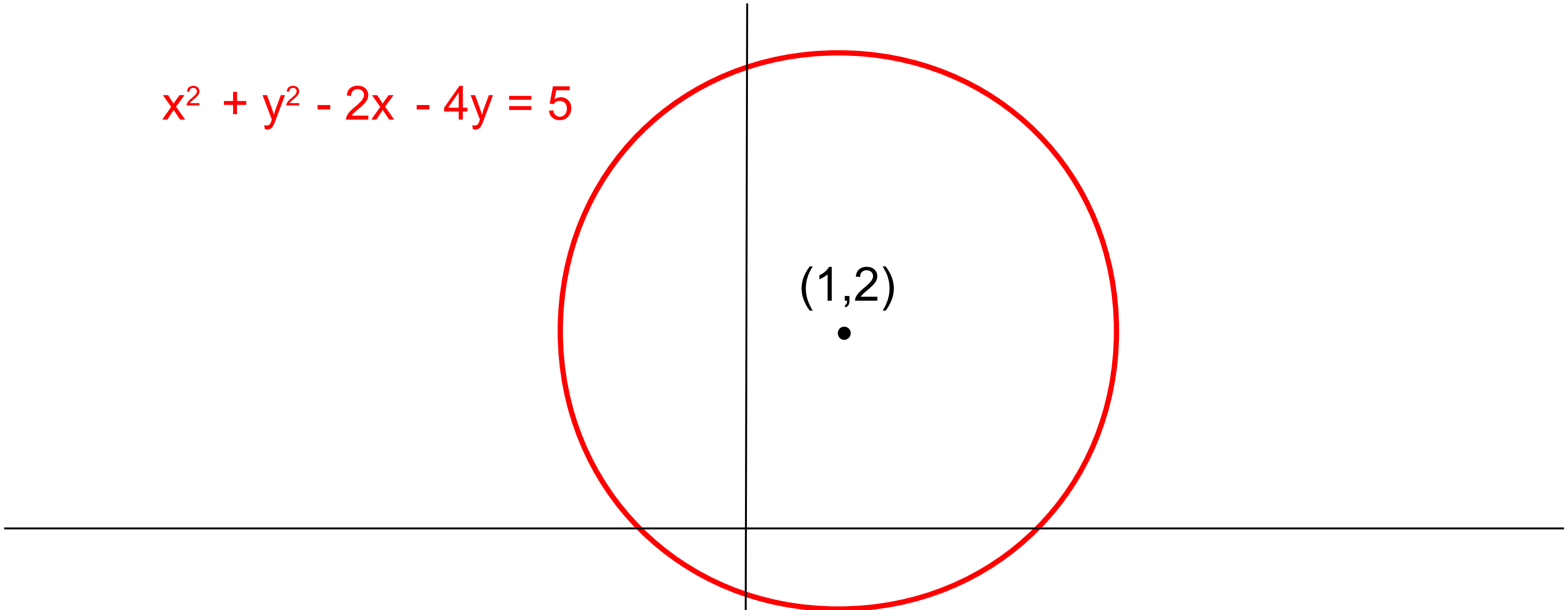
Para los puntos del plano que están en el círculo con centro en (1,2) y que pasa por (4,3) se tiene:

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (4-1)^2 + (3-2)^2 = 10$

$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 5$

Ecuaciones de círculos.

$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 5$



¿El punto (2,-1) está en el círculo?

$2^2 + 1^2 - 2\cdot 2 - 4\cdot(-1) = 5$ *Sí está.*

¿El punto (-2,2) está en el círculo?

$2^2 + (-2)^2 - 2\cdot 2 - 4\cdot(-2) = 4 < 5$

No, está adentro.

La ecuación contiene toda la información sobre el círculo.

¿Qué curva forman los puntos del plano cuya distancia a un punto P es el doble de su distancia a un punto Q?

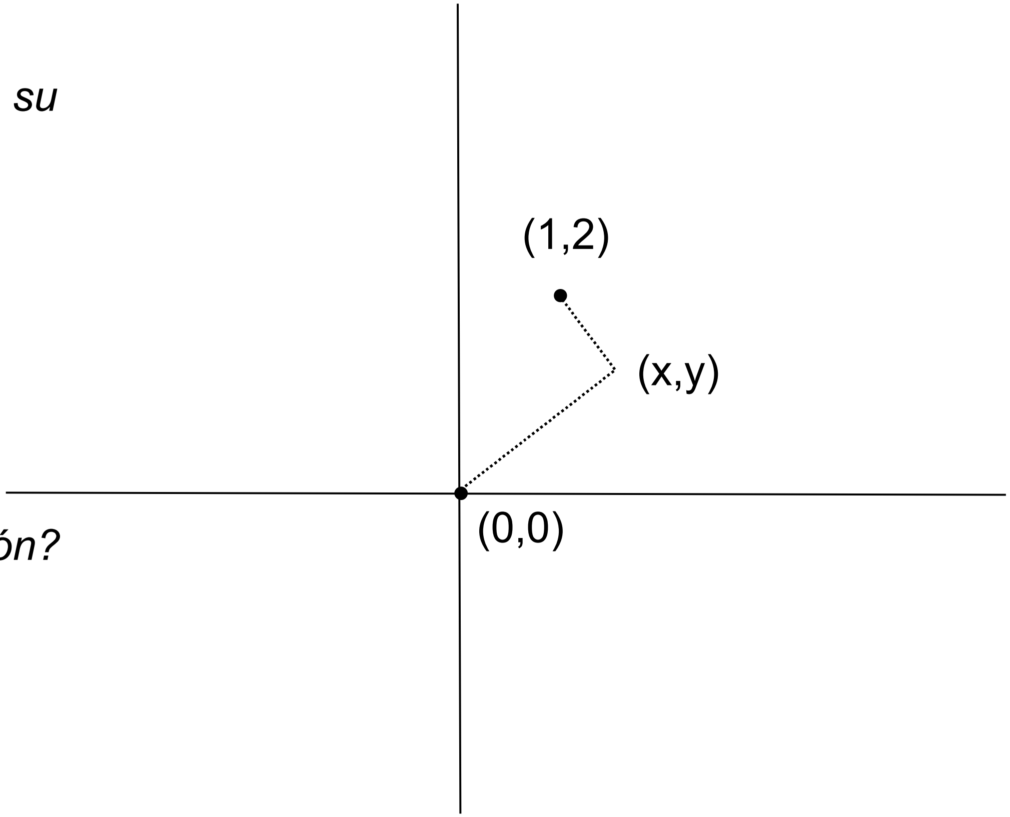
Ejemplo: Los puntos del plano cuya distancia al punto (0,0) es el doble de su distancia al punto (1,2) satisfacen la ecuación:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4x^2 + 4y^2$$

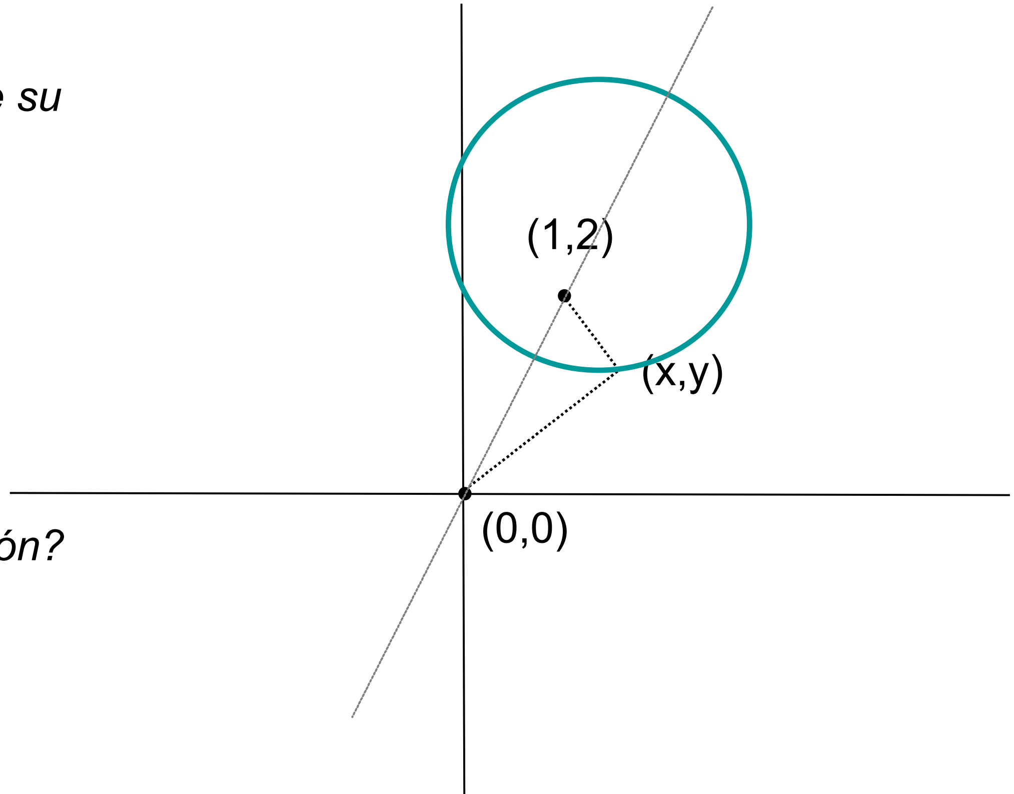
$$3x^2 + 3y^2 - 2x - 4y = 5$$

¿Y que curva representa esta ecuación?



¿Qué curva forman los puntos del plano cuya distancia a un punto P es el doble de su distancia a un punto Q?

Ejemplo: Los puntos del plano cuya distancia al punto (0,0) es el doble de su distancia al punto (1,2) satisfacen la ecuación:



$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 - 2x - 4y = 5$$

¿Y que curva representa esta ecuación?

$$3x^2 + 3y^2 - 2x - 4y = 5$$

$$x^2 + y^2 - 2/3\,x - 4/3\,y = 5/3$$

$$x^2 - 2/3\,x + 4/9 + y^2 - 4/3\,y + 25/9 = 5/3+4/9+25/9 = 94/9$$

$$(x - 2/3)^2 + (y - 5/3)^2 = 94/9$$

Es un círculo con centro en (2/3, 5/3) y radio $\sqrt{94/9}$

Geometría analítica

Estudio de la geometría basado en coordenadas y ecuaciones. Forma un puente entre la geometría y el álgebra: permite cambiar problemas geométricos por problemas algebraicos y viceversa, dándoles una perspectiva distinta.

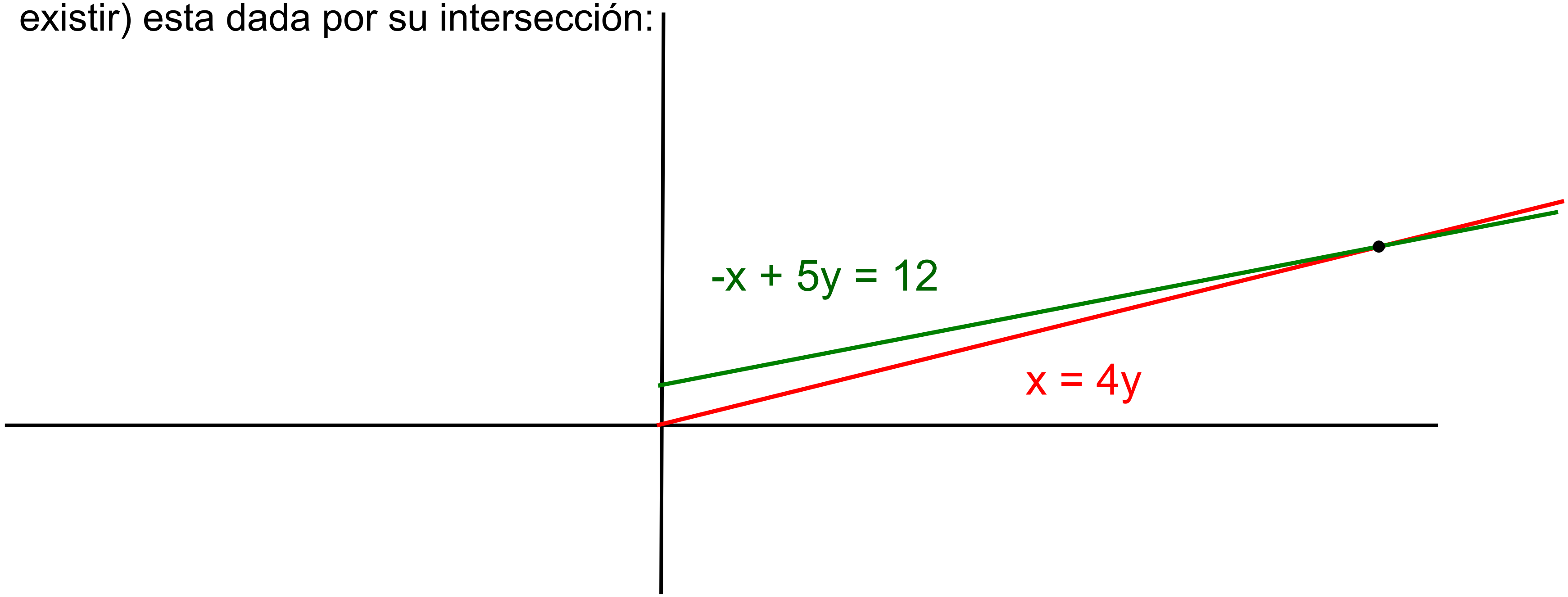
Ejemplo. Hace 3 años Juan tenía cinco veces la edad de su hijo y ahora tiene la cuatro veces su edad ¿Qué edad tiene Juan?

Si la edad de Juan (ahora) es **x** y la edad de su hijo es **y** entonces las condiciones del problema dan 2 ecuaciones:

$\mathbf{x}-3 = 5\,(\mathbf{y}-3)$

$\mathbf{x} = 4\,\mathbf{y}$

Cada ecuación corresponde a una recta, y la solución del problema (en caso de existir) esta dada por su intersección:



Ejemplo. ¿Existen rectángulos de área 1 y perímetro 6?

Si **x** y **y** son los lados del rectángulo entonces tenemos 2 ecuaciones:

$xy = 1$

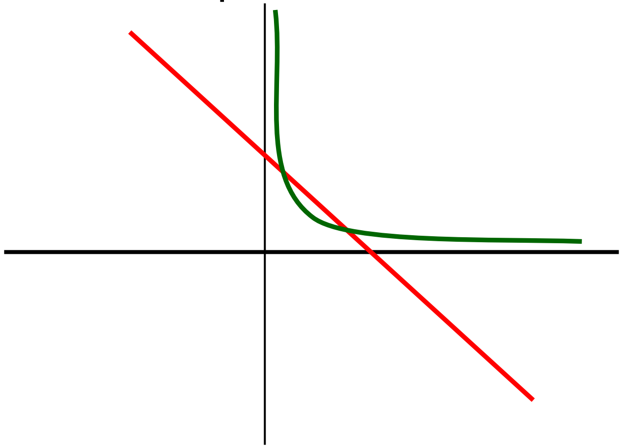
$2x + 2y = 6$

Podemos resolver las ecuaciones algebraicamente despejando **y** de la segunda y sustituyendo su valor en la primera:

$y = 3 - x$

$x(3 - x) = 1$ $\qquad$ $x^2 - 3x + 1 = 0$ $\qquad$ $x = (3 \pm \sqrt{5})/2$

Geométricamente, las soluciones están dadas por las intersecciones de la recta $x + y = 3$ con la hipérbola $xy = 1$:

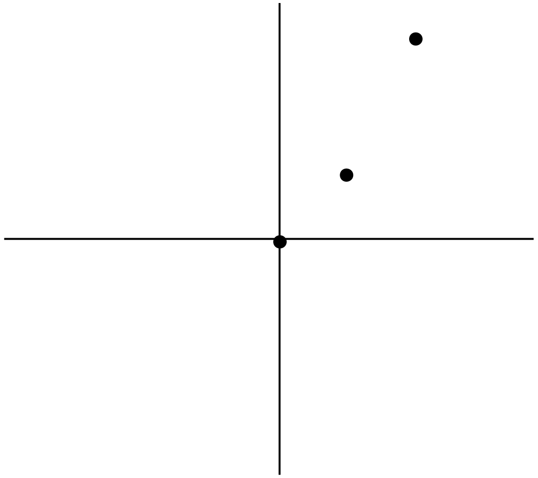


TAREA 9

1. Demuestra que la recta $3x + 4y = 5$ es tangente a la circunferencia $x^2+y^2 = 1$

2. ¿Qué curva forman los puntos del plano cuya distancia a un punto P es *k* veces su distancia a un punto Q? (hint: elige las coordenadas de modo que P=(1,0) y Q=(0,0).

3. Encuentra la ecuación del círculo que pasa por los puntos (0,0), (0,2) y (4,6)



Clase 10

Ecuaciones de las cónicas

Ecuaciones de las cónicas

Veamos como hallar ecuaciones para las cónicas (*Las ecuaciones dependen de la elección de coordenadas, que haremos tomando en cuenta las simetrías de las curvas para obtener ecuaciones mas sencillas)*

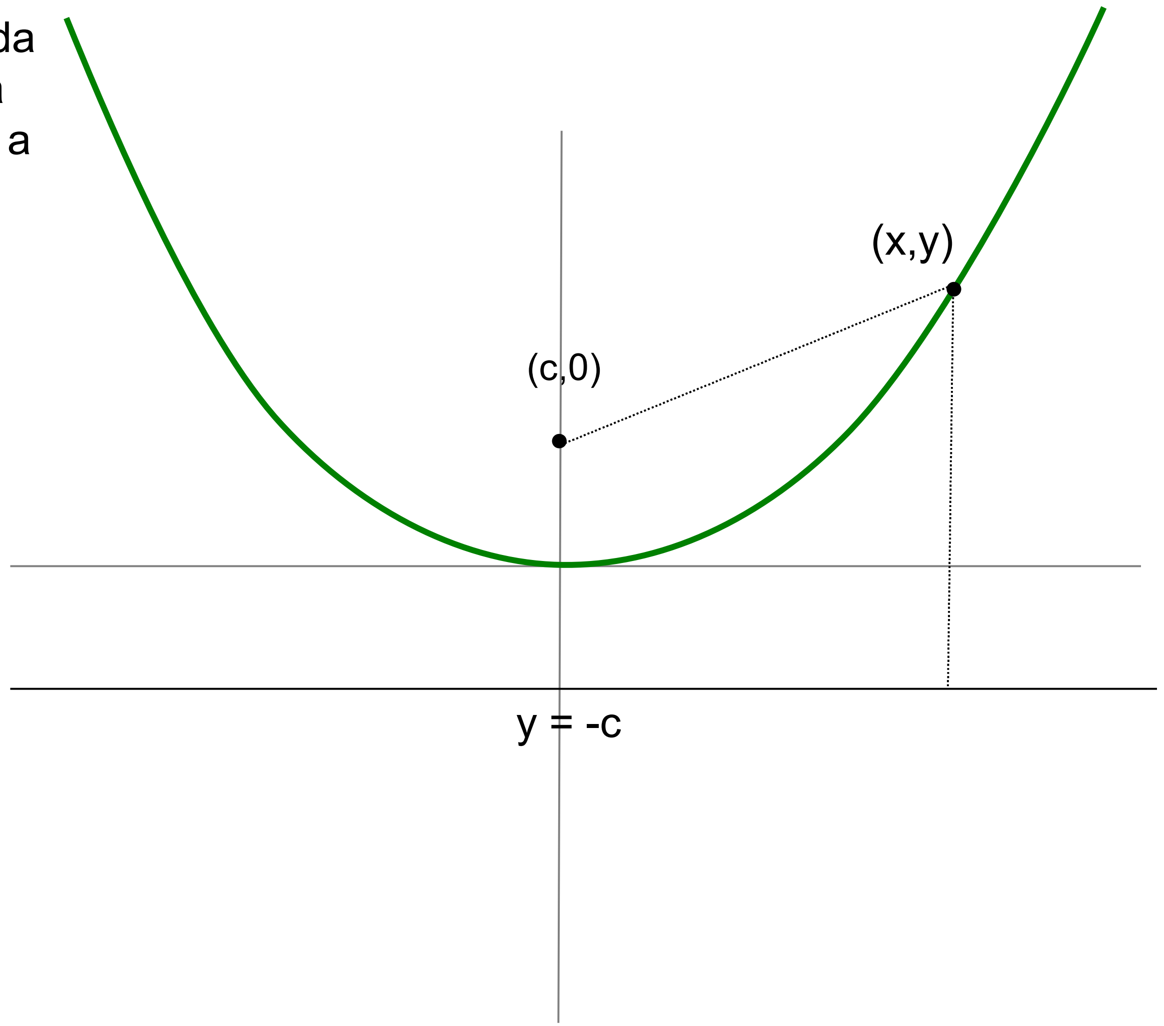
Ecuaciones de las parábolas.

La ecuación de la parábola formada por los puntos (x,y) del plano cuya distancia a un punto **(0,c)** es igual a su distancia a una recta **y = -c** es:

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = y+c$$

$$x^2 + (y-c)^2 = (y+c)^2$$

$$x^2 = 4cy$$



Todas las parábolas tienen la misma forma

(lo único que varía es el tamaño)

Ejemplo:

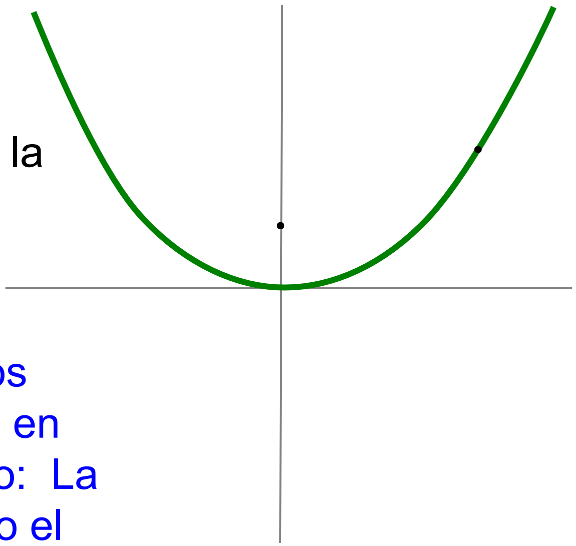
Si tomamos la parábola

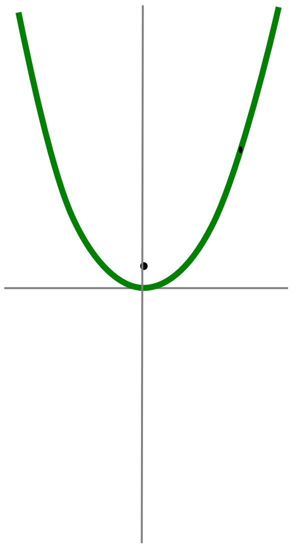
$x^2 = y$

y la encojemos horizontalmente a la mitad obtenemos la parábola

$4x^2 = y$

Aunque puede parecer que las dos parábolas tienen formas distintas, en realidad sólo difieren en el tamaño: La primera se obtiene cuadruplicando el tamaño de la segunda: al hacer el cambio de variables $(x',y')=(4x,4y)$ la ecuación $4x^2 = y$ se convierte en $4(x'/4)^2 = y'/4$ que equivale a $x'^2 = y'$.

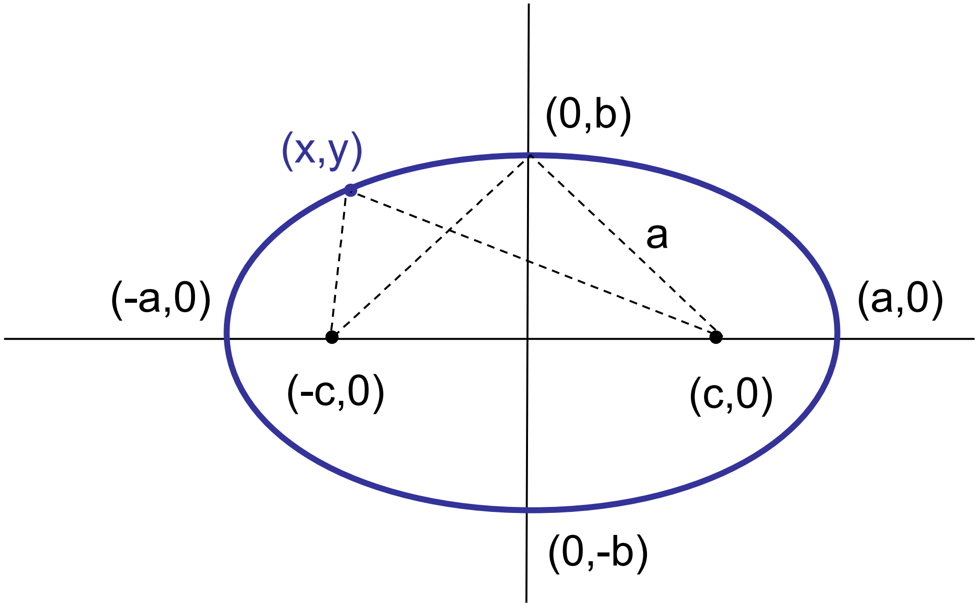




Ecuaciones de elipses.

Una elipse está formada por los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (los focos) es constante.

Si elegimos el sistema de coordenadas de modo que los focos estén en los puntos (-c,0) y (c,0) y si la suma de las distancias es 2a, entonces la elipse cruza al eje x en los puntos (a,0)y (-a,0) y al eje y en los puntos (0,b) y (0,-b) donde $b^2=a^2-c^2$



Ecuaciones de elipses.

Si la suma de las distancias de (x,y) a $(-c,0)$ y $(c,0)$ es $2a$, entonces la ecuación es:

$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$

$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = (2a-\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2$

$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 – 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$

$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = (a + c/a\ x)$

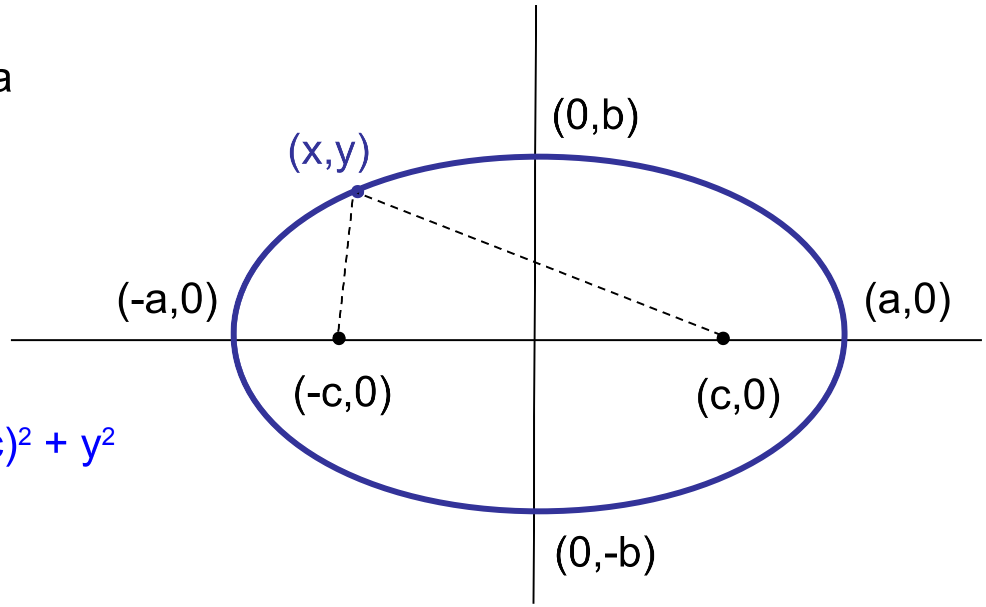
$(x+c)^2 + y^2 = (a + c/a\ x)^2$

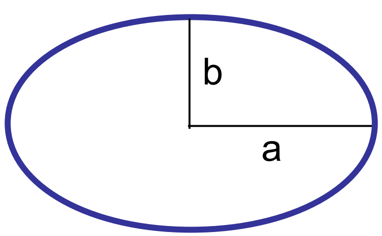
$x^2 - c^2/a^2\ x^2 + y^2 = a^2 - c^2$

$(a^2-c^2)/a^2\ x^2 + y^2 = a^2 - c^2$

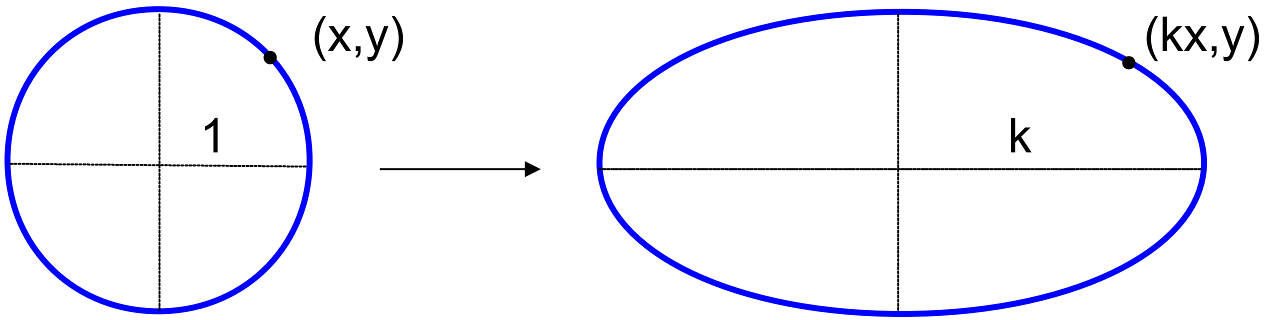
$b^2/a^2\ x^2 + y^2 = b^2$

$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$





Las elipses son “círculos estirados”

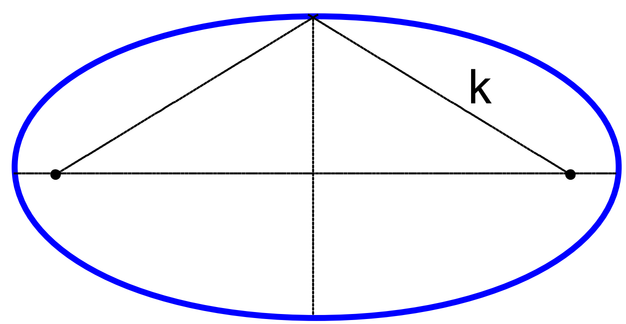


Si la ecuación del circulo es $x^2+y^2=1$ la ecuación de la curva obtenida al estirarlo horizontalmente por un factor k será $(x/k)^2+y^2=1$.

Esta ecuación corresponde a una elipse: $x^2/k^2 + y^2/1^2 = 1$ con $a=k$, $b=1$, $c=\sqrt{k^2-1}$

los focos están en $(\sqrt{k^2-1},0)$ y $(-\sqrt{k^2-1},0)$

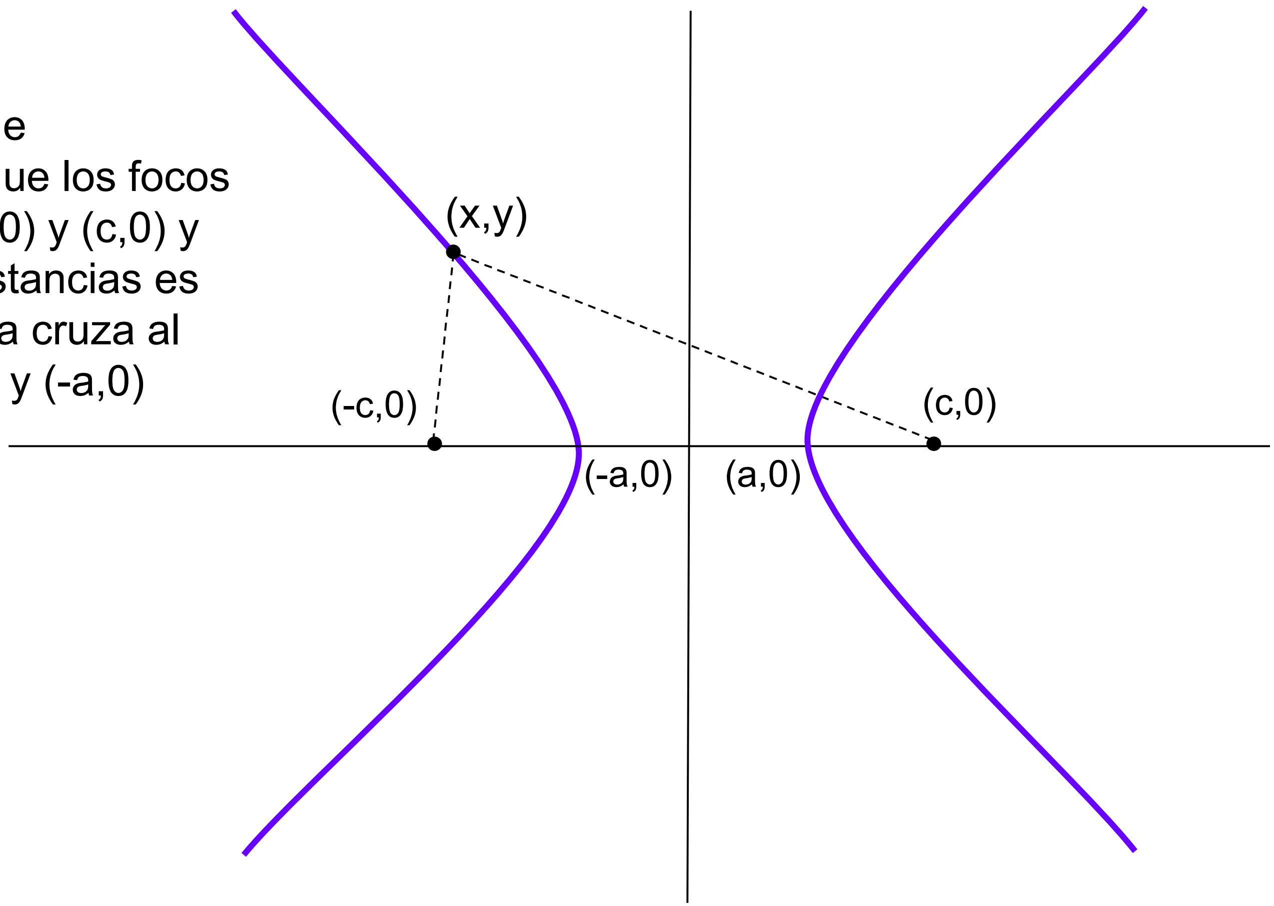
y la suma de las distancias es $2k$



Ecuaciones de hipérbolas.

Una hipérbola está formada por los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos (los focos) es constante.

Si elegimos el sistema de coordenadas de modo que los focos estén en los puntos (-c,0) y (c,0) y si la diferencia de las distancias es 2a, entonces la hipérbola cruza al eje x en los puntos (a,0) y (-a,0) donde $b^2 = a^2+c^2$



Ecuaciones de hipérbolas.

Los puntos (x,y) del plano cuyas distancias a (-c,0) y (c,0) difieren por 2a satisfacen la ecuación:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = (2a+\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -4a^2 - 4cx$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -(a + c/a\ x)$$

$$(x+c)^2 + y^2 = (a + c/a\ x)^2$$

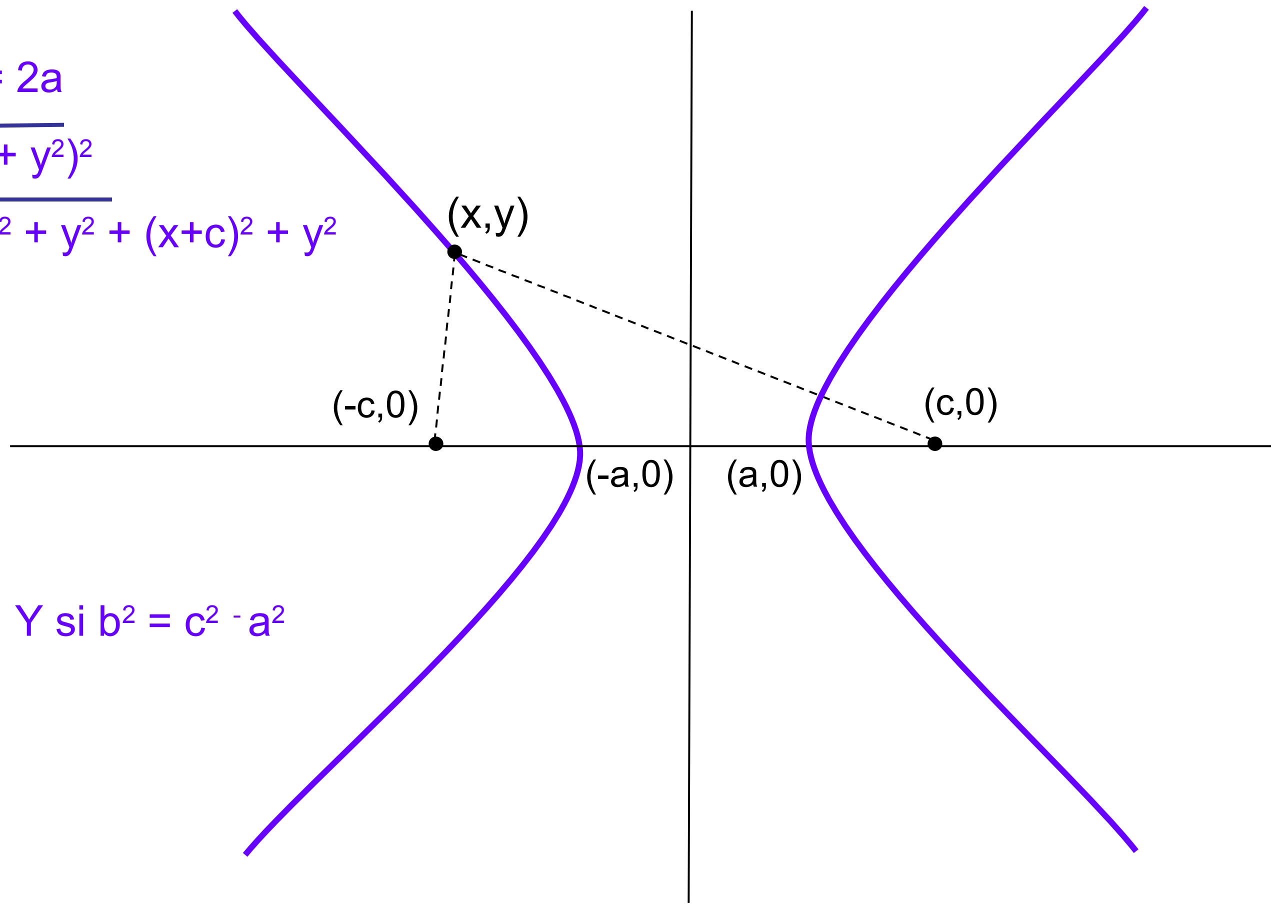
$$x^2 - c^2/a^2\ x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

$$(a^2-c^2)/a^2\ x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

Y si $b^2 = c^2 - a^2$

$$-b^2/a^2\ x^2 + y^2 = -b^2$$

$$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$$



Asíntotas de las hipérbolas.

La ecuación de la hipérbola formada por los puntos (x,y) del plano cuyas distancias a (-c,0) y (c,0) difieren por 2a es:

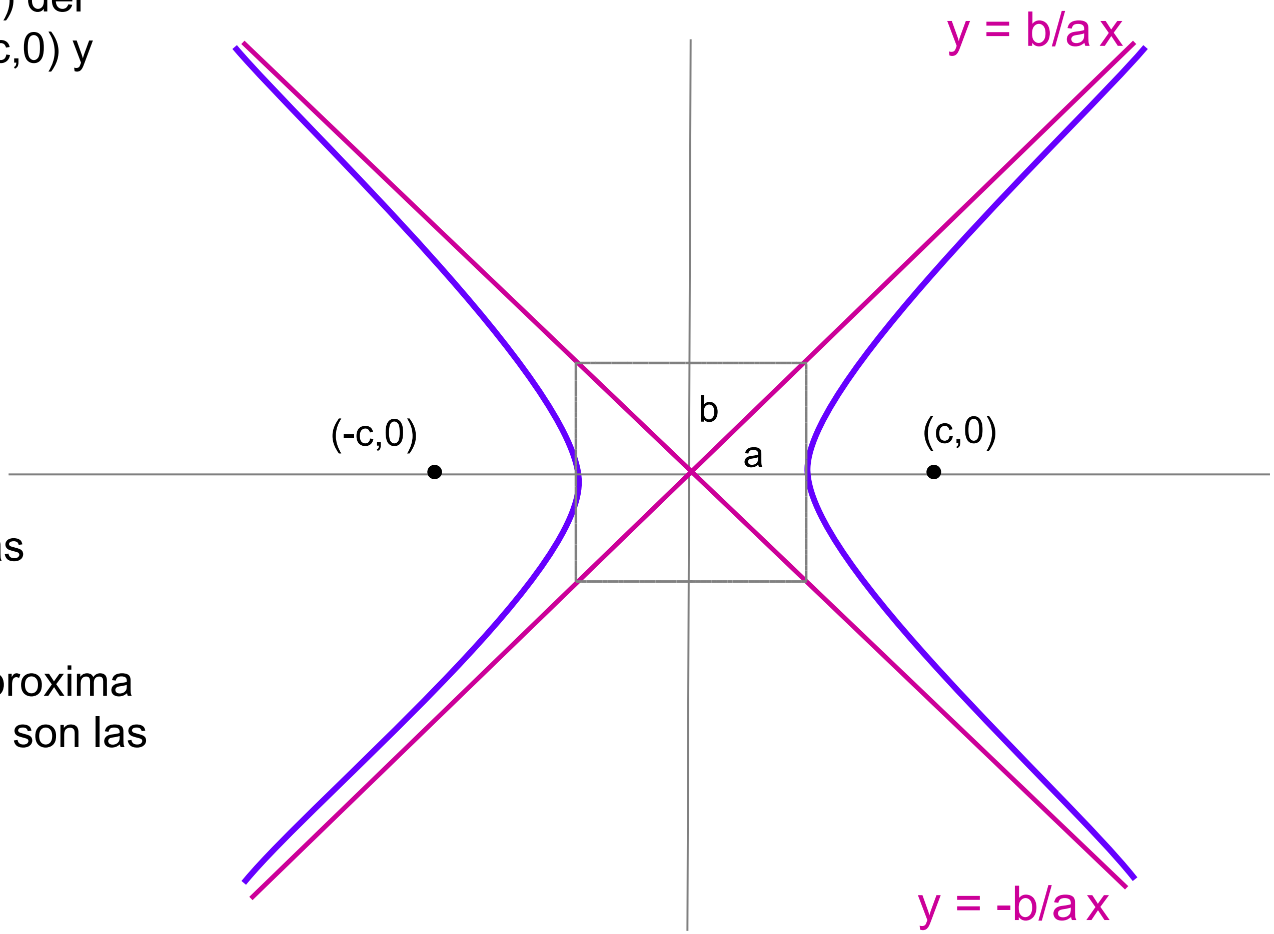
$$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$$

Observar que la ecuación:

$$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 0$$

Representa un par de rectas
$y = b/a\,x \qquad y = -b/a\,x$

a las que la hipérbola se aproxima cada vez mas, estas rectas son las *asíntotas* de la hipérbola.



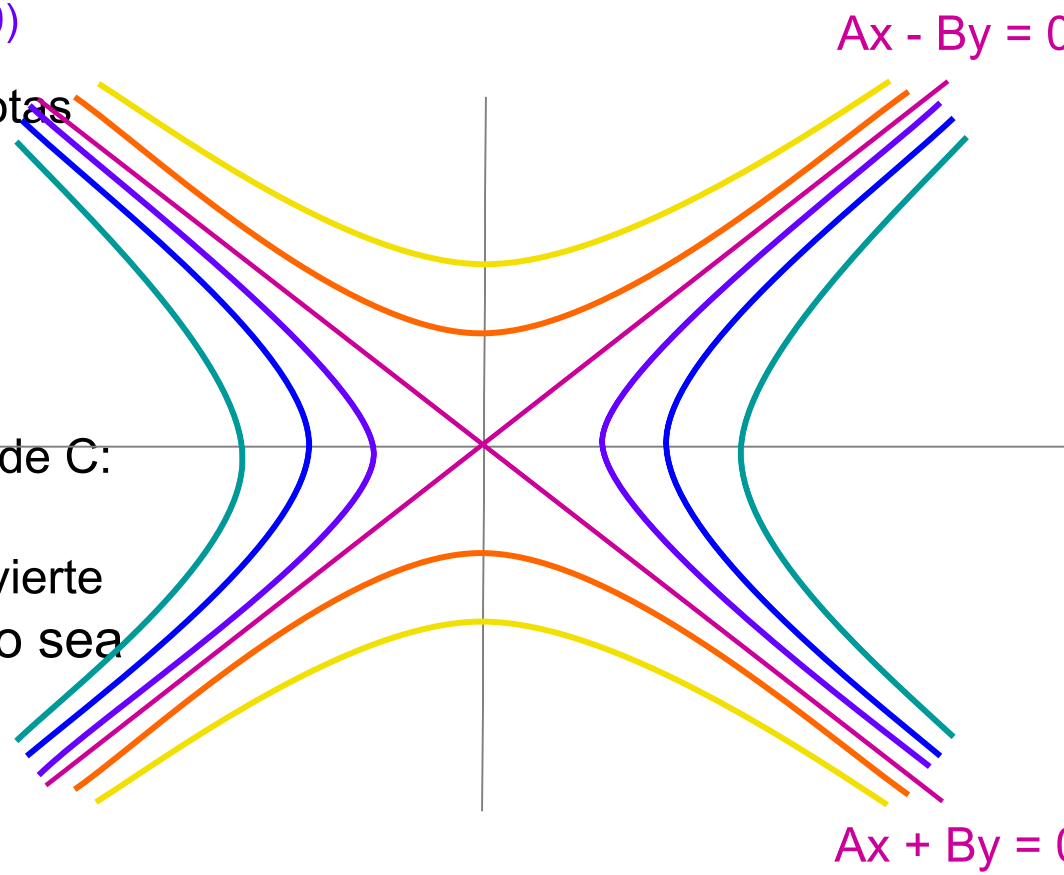
Hipérbolas con las mismas asíntotas.

Todas las ecuaciones:

$A^2x^2 - B^2y^2 = C$ (con $A,B,C \neq 0$)

representan hipérbolas con asíntotas

$Ax + By = 0$ y $Ax - By = 0$



Su forma solo depende del signo de C:
Al agrandar por un factor $\sqrt{C'/C}$ la ecuación $A^2x^2 - B^2y^2 = C$ se convierte en $A^2(x/\sqrt{C'/C})^2 - B^2(y/\sqrt{C'/C})^2 = C$ o sea $A^2x^2 - B^2y^2 = C(\sqrt{C'/C}\,)^2 = C'$

La ecuación $Ax^2 + Cy^2 = F$

Teorema. La ecuación $Ax^2 + Cy^2 = F$ representa:

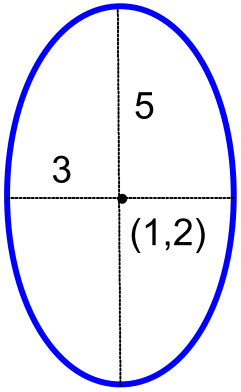
- una elipse o un círculo si A, C y F tienen el mismo signo.
- un punto si A y C tienen el mismo signo y $F = 0$
- Ø si A y C tienen el mismo signo y F tiene signo opuesto
- una hipérbola si A y C tienen distinto signo y $F \neq 0$
- un par de rectas si A y C tienen distinto signo y $F = 0$

Demostración.

Se sigue de los argumentos de las páginas anteriores.

TAREA 10

1. La órbita de la tierra es una elipse con el Sol en uno de sus focos. La distancia máxima de la tierra al sol es 152,000,000km y la mínima es 148,000,000km. ¿Cuáles la distancia del Sol al otro foco? ¿Qué tan alargada es la elipse?
2. Dibuja la curva representada por la ecuación $9x^2 - 4y^2 = 36$
3. ¿Qué ecuación cumplen los puntos de esta elipse?



Clase 11

Cambio de coordenadas

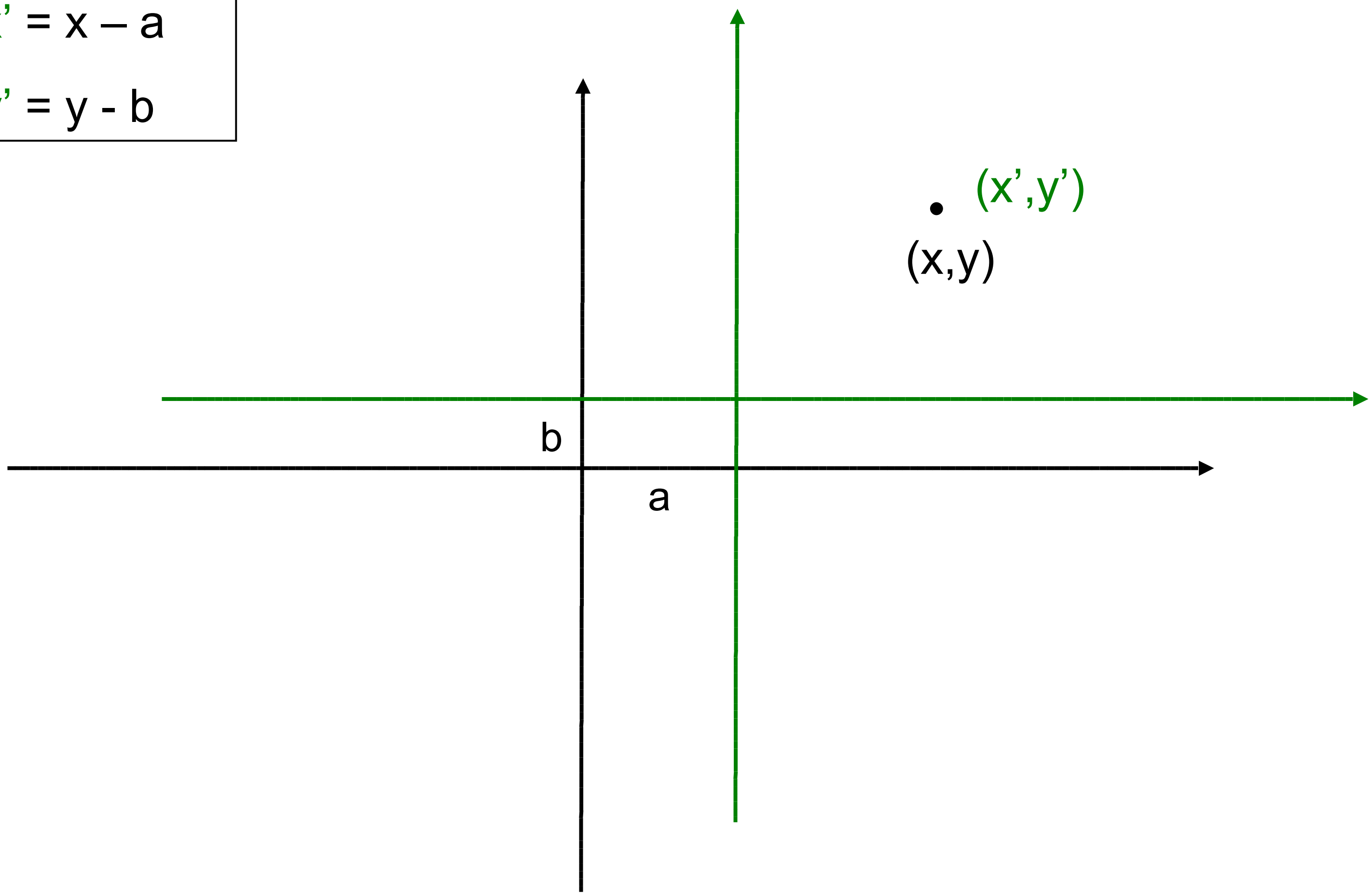
Cambio de coordenadas

El sistema de coordenadas cartesianas depende de la elección de los ejes y la unidad de medida. Al cambiar de coordenadas las ecuaciones cambian (y pueden quedar irreconocibles).

Cambio de coordenadas
(Traslación de ejes)

$x' = x - a$

$y' = y - b$



Cambio de coordenadas
¿Cómo cambian las ecuaciones?

EJEMPLO:

Al hacer el cambio de coordenadas

$x' = x - 2$

$y' = y - 1$

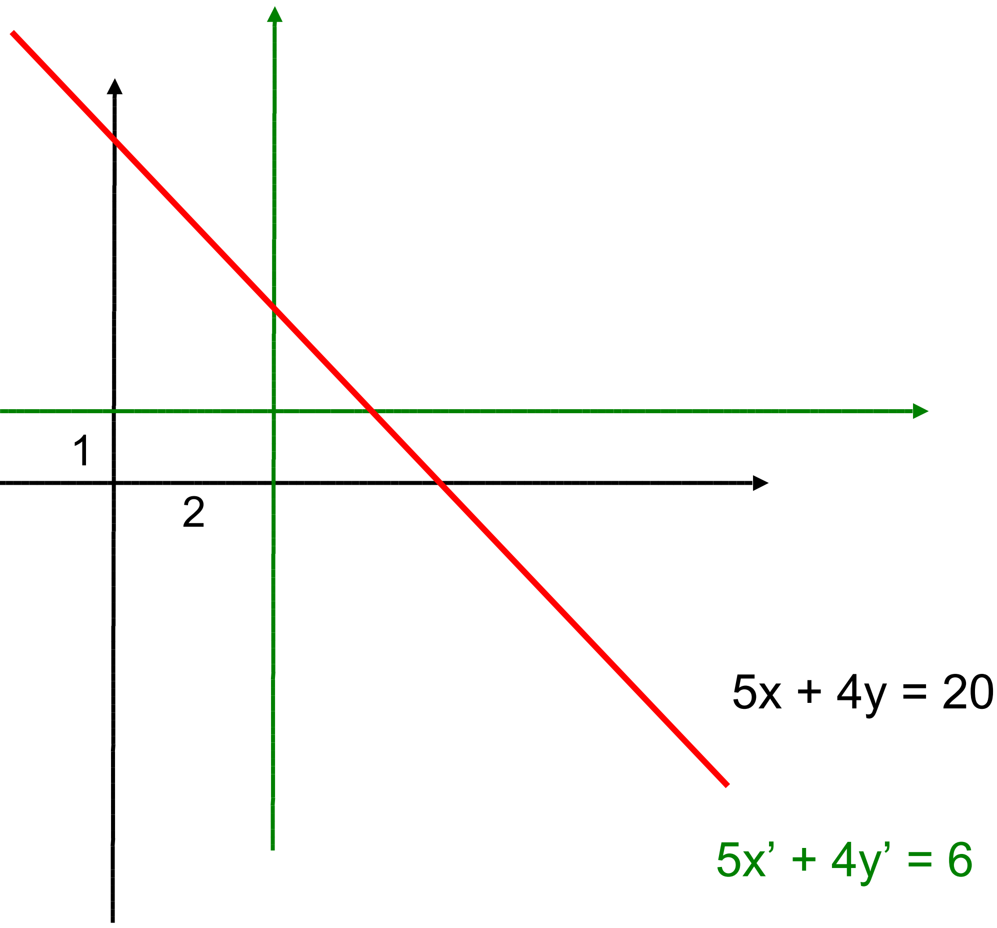
La ecuación

$5x + 4y = 20$

Se convierte en

$5(x'+2) + 4(y'+1) = 20$

$5x' + 10 + 4y' + 4 = 20$



Cambio de coordenadas

¿Cómo cambian las ecuaciones?

EJEMPLO:

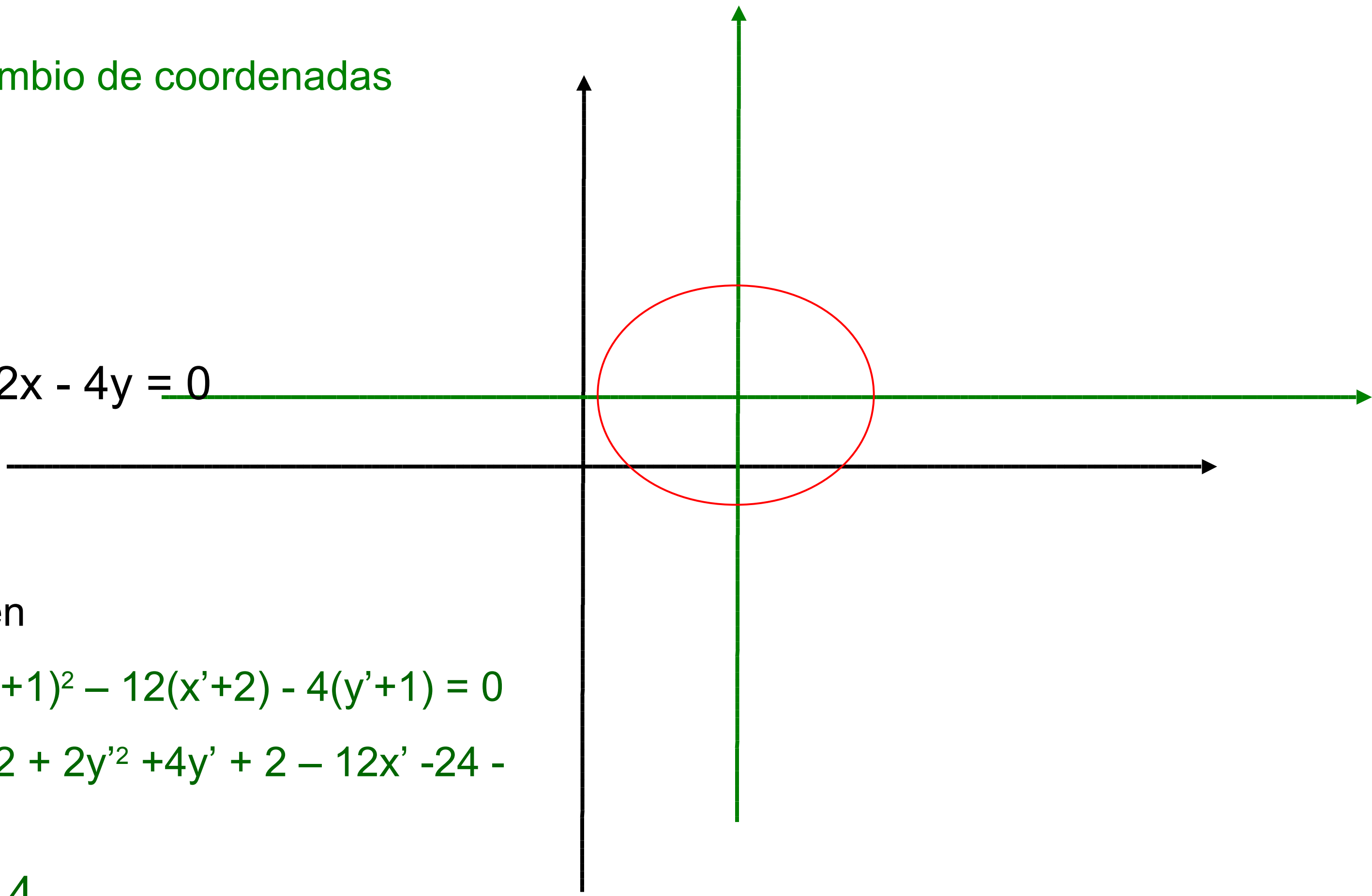
Al hacer el cambio de coordenadas

$x' = x - 2$

$y' = y - 1$

La ecuación

$3x^2 + 2y^2 - 12x - 4y = 0$



se convierte en

$3(x'+2)^2 + 2(y'+1)^2 - 12(x'+2) - 4(y'+1) = 0$

$3x'^2 + 12x' + 12 + 2y'^2 + 4y' + 2 - 12x' - 24 - 4y' - 4 = 0$

$3x'^2 + 2y'^2 = 14$

Teorema. La ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey = F$ representa una elipse, un círculo, un punto o Ø si $AC>0$ y representa una hipérbola o un par de rectas si $AC<0$.

Demostración

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy = E$

$A(x^2 + C/A\ x) + B(y^2 + D/B\ y) = E$

$A(x^2 + C/A\ x + C^2/4A^2) + B(y^2 + D/A\ y + D^2/4B^2) = E + C^2/4A + D^2/4B$

$A(x + C/2A)^2 + B(y + D/2A)^2 = E + C^2/4A^2 + D^2/4A^2$

Al hacer el cambio de coordenadas $x' = x + C/2A$ $\quad y' = y + D/2A$ queda la ecuación

$Ax'^2 + Cy'^2 = E'$ que ya conocemos.

Las ecuaciones de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey = F$ con $AB>0$ *representan elipses o círculos o puntos o Ø.*

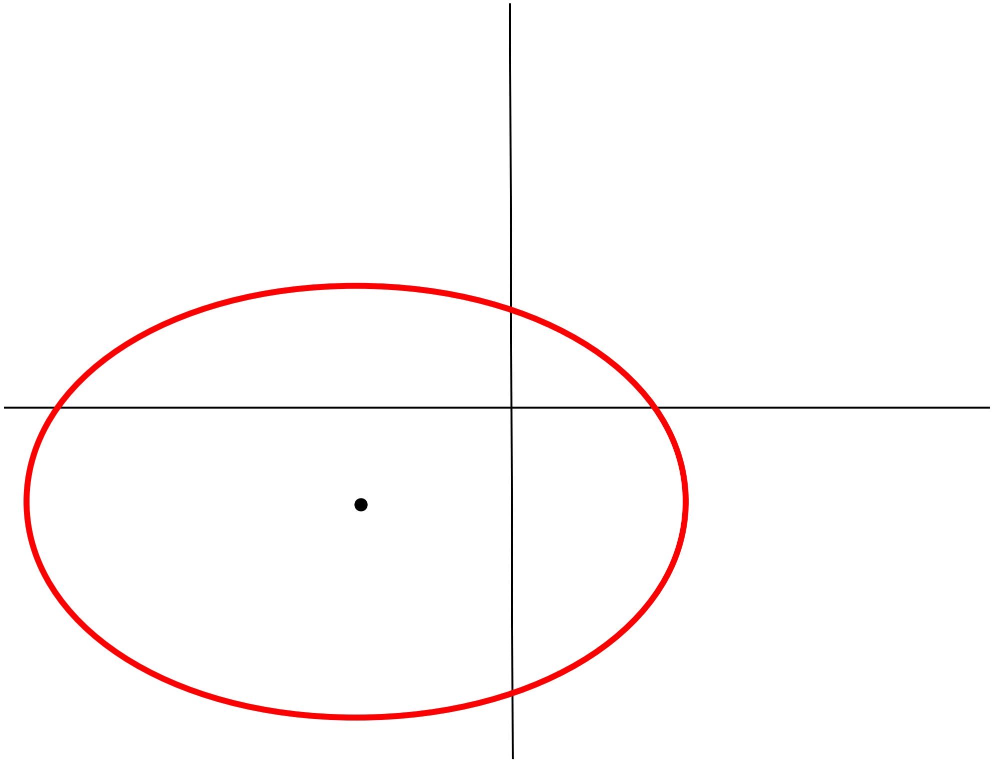
Ejemplo:

$x^2 + 2y^2 + 3x + 4y = 5$

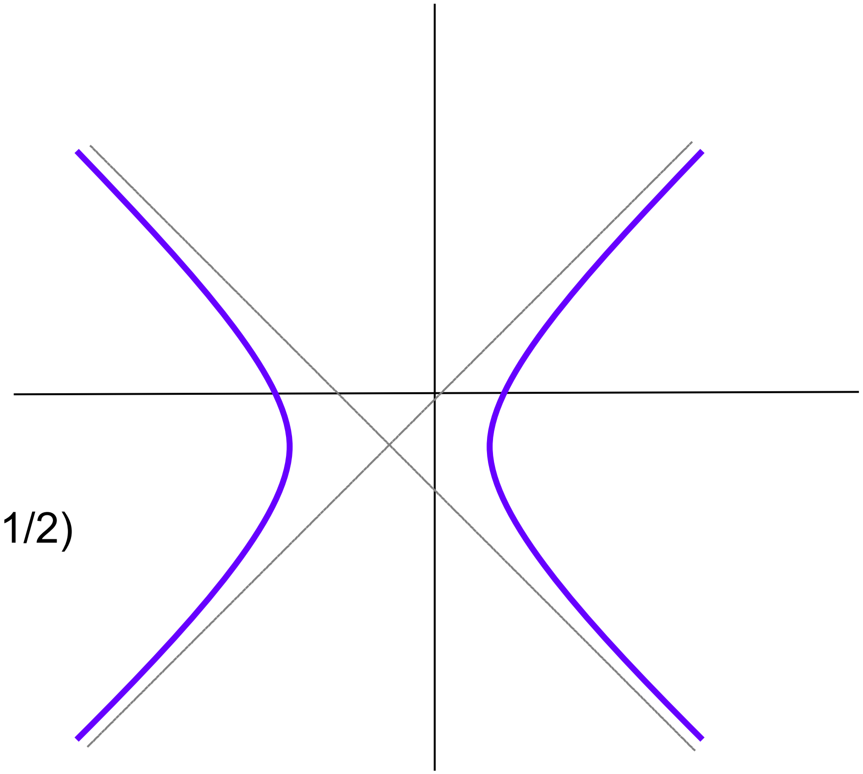
$(x^2+3x+ 9/4) + 2(y^2 + 2y+1) = 37/4$

$(x+3/2)^2 + 2(y+1)^2 = 37/4$

Es una elipse con centro en (-3/2,-1/2)



Las ecuaciones de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey = F$ con $AB<0$ *representan hipérbolas o dos líneas.*



Ejemplo:

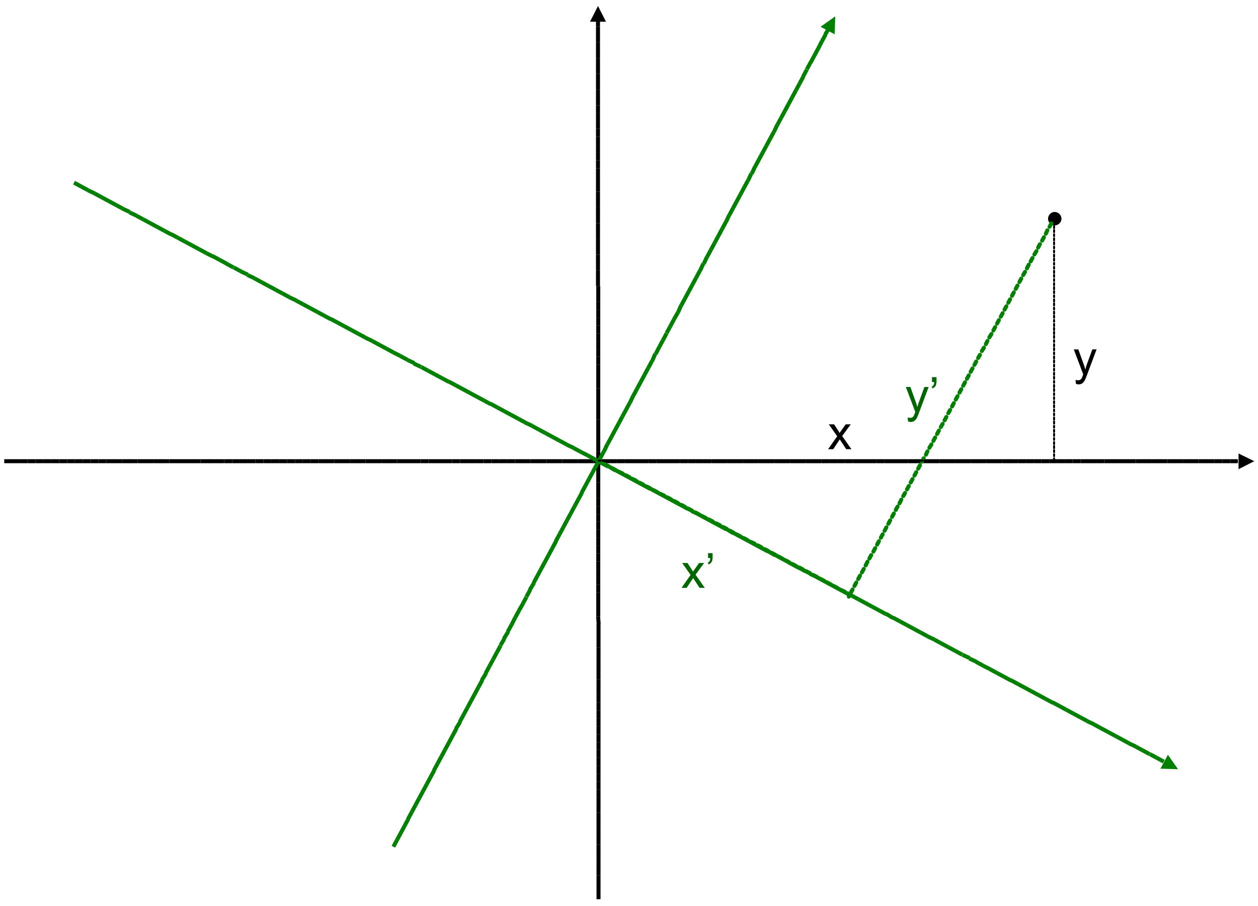
$x^2 - y^2 + x - y = 1$

$(x^2 + x + \frac{1}{4}) - (y^2 + y + \frac{1}{4}) = 1$

$(x + \frac{1}{2})^2 - (y + \frac{1}{2})^2 = 1$

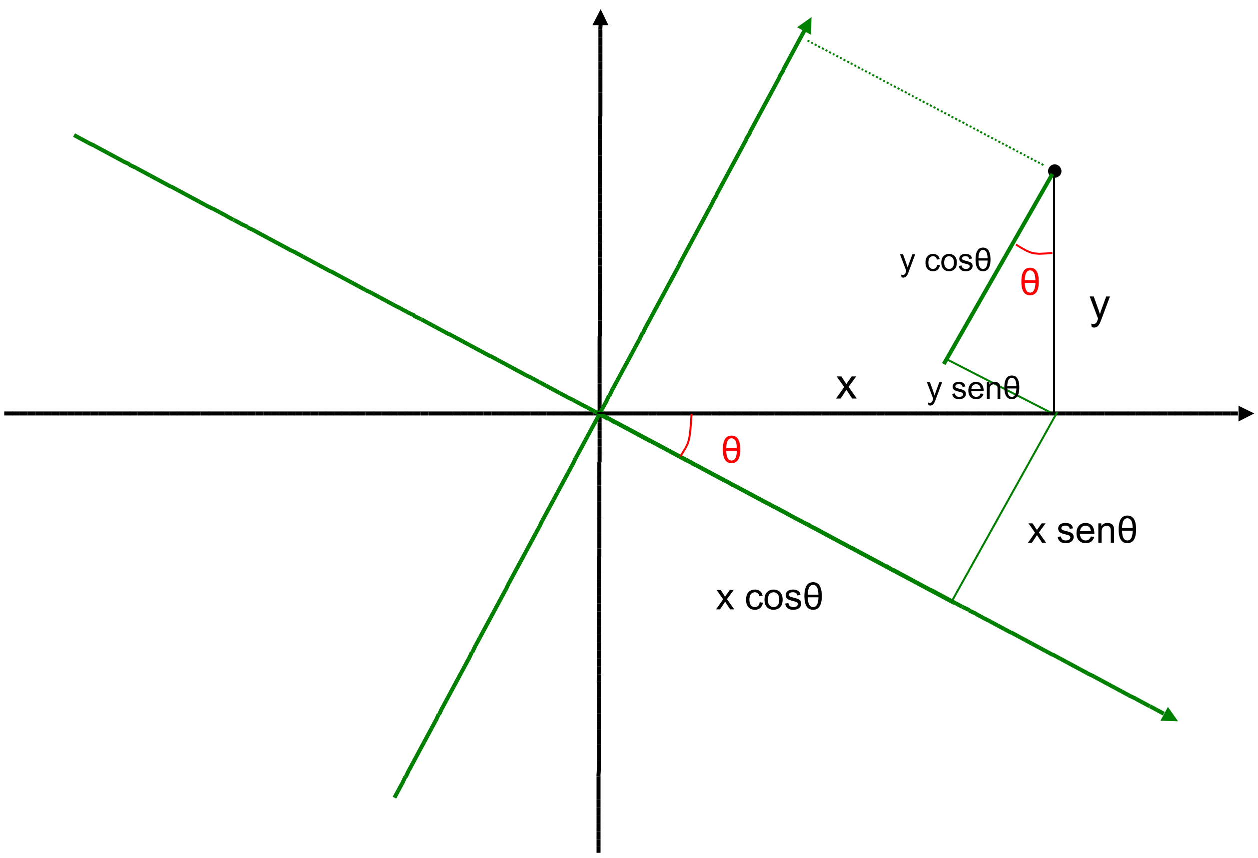
Es una hipérbola con centro en $(-1/2,-1/2)$

Cambio de coordenadas
(Rotación de ejes)



Cambio de coordenadas

¿Cómo cambian las coordenadas de los puntos al rotar los ejes?

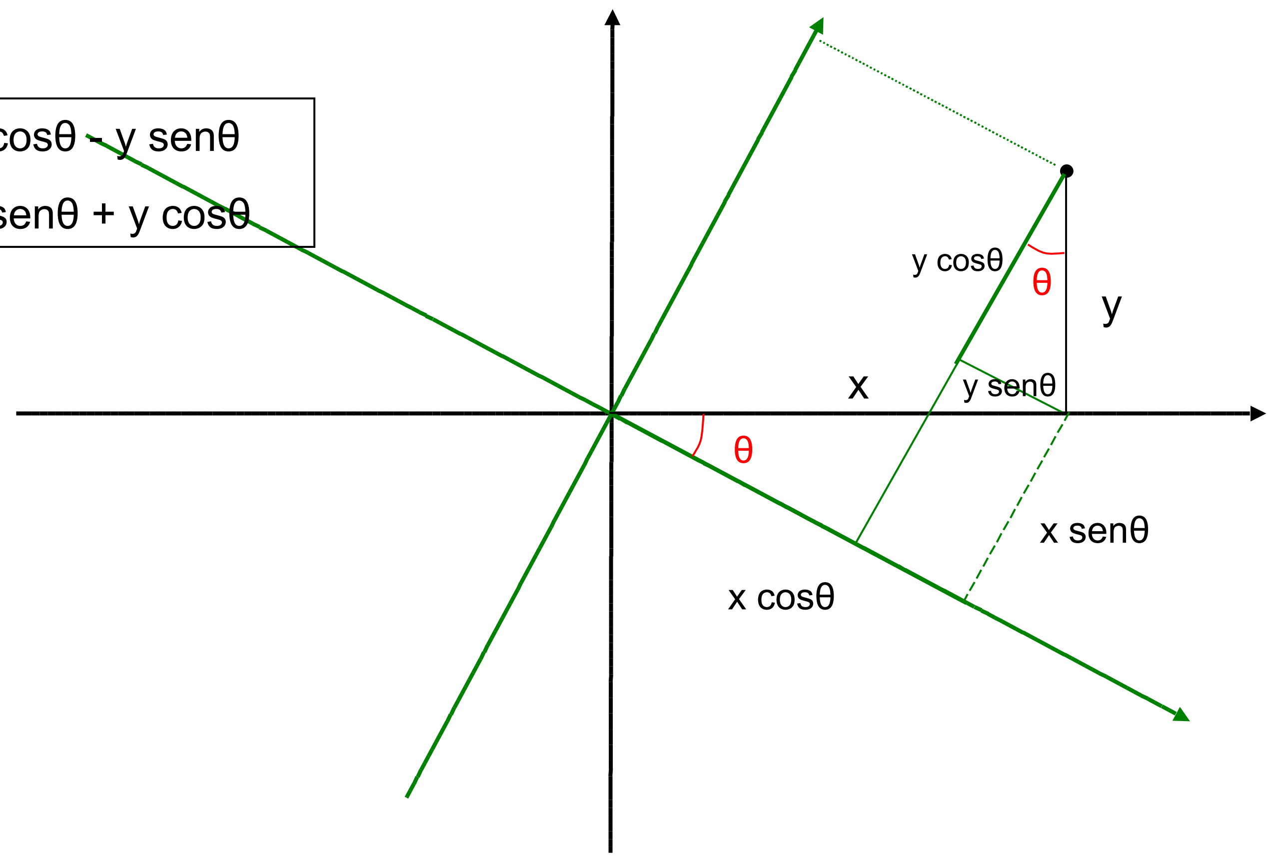


Cambio de coordenadas

¿Cómo cambian las coordenadas de los puntos al rotar los ejes?

$x' = x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta$

$y' = x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta$

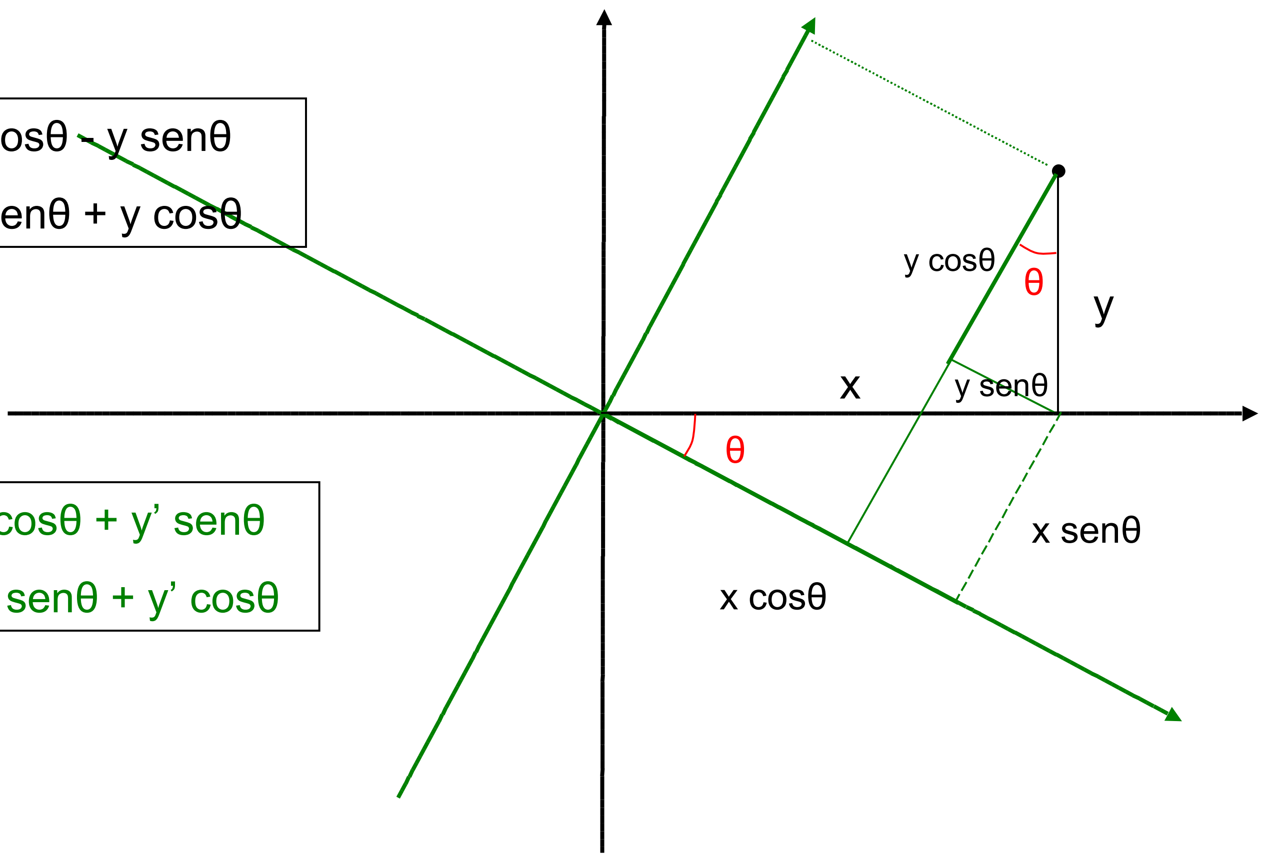


Cambio de coordenadas

¿Cómo cambian las coordenadas de los puntos al rotar los ejes?

$$x' = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\theta$$

$$y' = x\,\mathrm{sen}\theta + y\cos\theta$$



$$x = x'\cos\theta + y'\,\mathrm{sen}\theta$$

$$y = -x'\,\mathrm{sen}\theta + y'\cos\theta$$

Cambio de coordenadas

¿Cómo cambian las ecuaciones?

EJEMPLO:

Al hacer el cambio de coordenadas

$x' = 1/\sqrt{2}\, x - 1/\sqrt{2}\, y$

$y' = 1/\sqrt{2}\, x + 1/\sqrt{2}\, y$

$x = 1/\sqrt{2}\, x' + 1/\sqrt{2}\, y'$

$y = -1/\sqrt{2}\, x' + 1/\sqrt{2}\, y'$

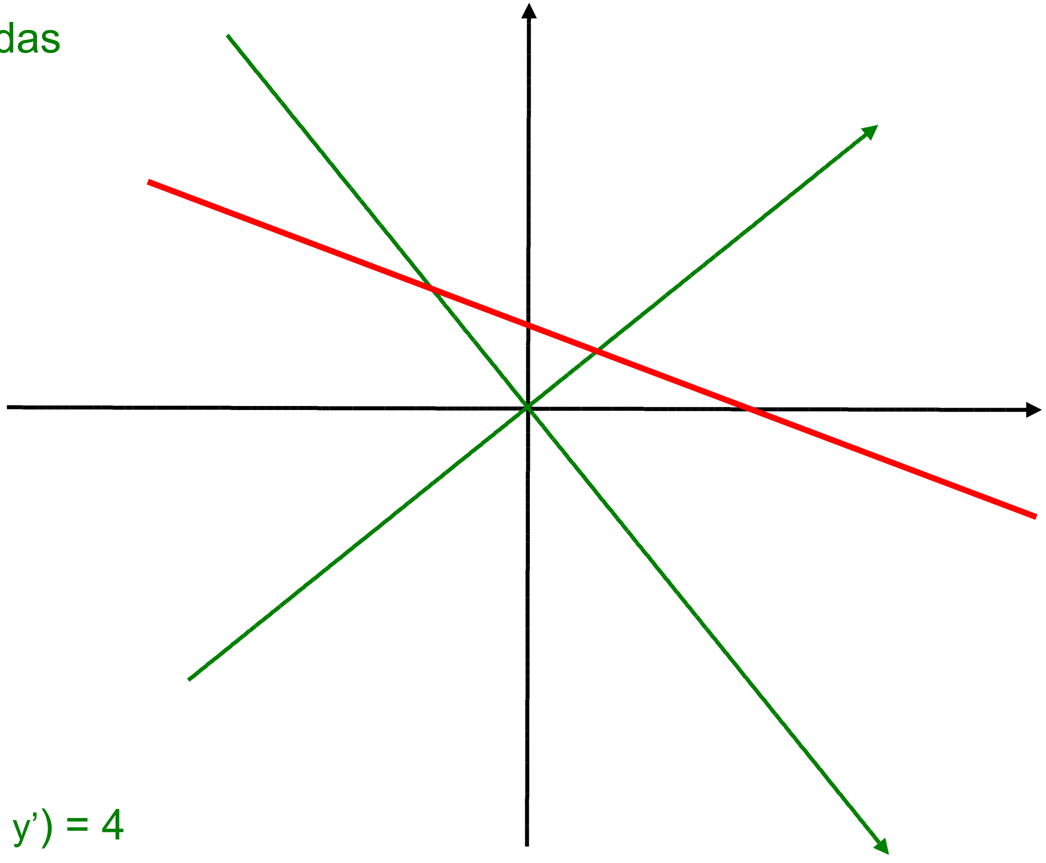
La ecuación

$2x + y = 4$

Se convierte en

$2(1/\sqrt{2}\, x' + 1/\sqrt{2}\, y') + (-1/\sqrt{2}\, x' + 1/\sqrt{2}\, y') = 4$

$1/\sqrt{2}\, x' + 3/\sqrt{2}\, y = 4$



Cambio de coordenadas

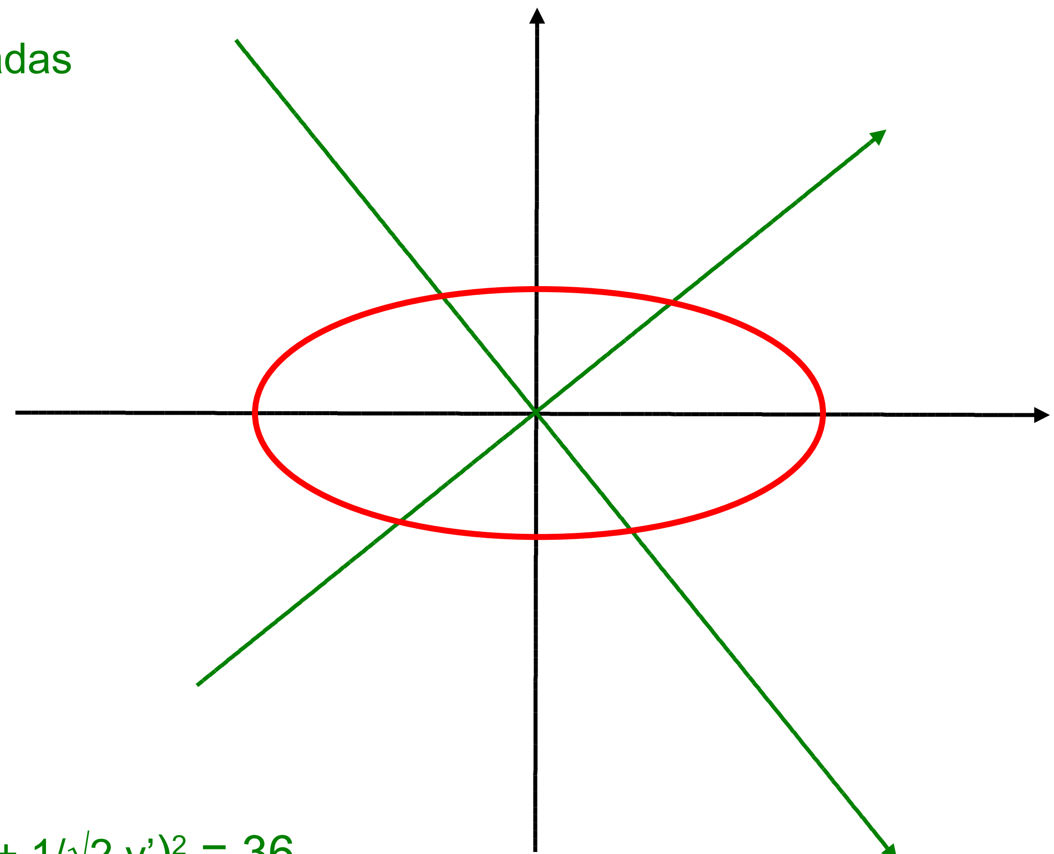
¿Cómo cambian las ecuaciones?

EJEMPLO:

Al hacer el cambio de coordenadas

$x' = 1/\sqrt{2}\, x - 1/\sqrt{2}\, y$

$y' = 1/\sqrt{2}\, x + 1/\sqrt{2}\, y$



$x = 1/\sqrt{2}\, x' + 1/\sqrt{2}\, y'$

$y = -1/\sqrt{2}\, x' + 1/\sqrt{2}\, y'$

La ecuación

$x^2 + 9y^2 = 36$

se convierte en

$(1/\sqrt{2}\, x' + 1/\sqrt{2}\, y')^2 + 9(-1/\sqrt{2}\, x' + 1/\sqrt{2}\, y')^2 = 36$

$5x'^2 - 8x'y' + 5y'^2 = 36$

Ecuaciones de 2º grado

Son las ecuaciones de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F.$$

con A, B o C distintos de 0.

Ejemplos:

$2x^2 + 3y^2 = 4$	(elipse)
$3x^2 - y^2 = 2$	(hipérbola)
$x^2 + 2x – 4y = 0$	(parábola)
$xy = 0$	(par de rectas)
$x^2 + xy + y^2 = 1$	(?)
$x^2 - 2xy + y^2 + x = 0$	(?)
$x^2 + 3xy + 2y^2 = 3$	(?)

Al hacer el cambio de coordenadas

$x' = x\cos\theta - y\,\text{sen}\theta$

$y' = x\,\text{sen}\theta + y\cos\theta$

$x = x'\cos\theta + y'\,\text{sen}\theta$

$y = -x'\,\text{sen}\theta + y'\cos\theta$

la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ se convierte en

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F$$

donde

$A' = A\cos^2\theta - B\cos\theta\,\text{sen}\theta + C\,\text{sen}^2\theta$

$B' = 2(A-C)\cos\theta\,\text{sen}\theta - B(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)$

$C' = A\,\text{sen}^2\theta + B\,\text{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta$

$D' = D\cos\theta - E\,\text{sen}\,\theta$

$E' = D\,\text{sen}\theta + E\cos\theta$

Teorema: Todas las ecuaciones de 2° grado:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F.$$

corresponden a cónicas (círculos, elipses, hipérbolas, o parábolas) o cónicas degeneradas (puntos, rectas o pares de rectas).

Demostración. Basta ver que hay un cambio de coordenadas que transforma la ecuación en una de la forma:

$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F'$ (es decir con $B' = 0$)

Como $B' = 2(A-C) \cos\theta \operatorname{sen}\theta - B (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 2(A-C) \operatorname{sen}2\theta - B \cos 2\theta$

podemos hacer $B' = 0$ eligiendo θ de modo que $\cos2\theta / \operatorname{sen}2\theta = 2(A-C)/B$

(esto siempre es posible ya que cuando θ varía de $\pi/2$ a 0, el cociente $\cos 2\theta / \operatorname{sen} 2\theta$ toma todos los valores entre -infinito e infinito)

Hemos visto que al rotar los ejes un ángulo θ la ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$$

se convierte en:

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F$$

donde

$$A' = A\cos^2\theta - B\cos\theta\,\mathrm{sen}\theta + C\,\mathrm{sen}^2\theta$$
$$B' = 2(A-C)\cos\theta\,\mathrm{sen}\theta - B(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)$$
$$C' = A\,\mathrm{sen}^2\theta + B\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta$$
$$D' = D\cos\theta - E\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$E' = D\,\mathrm{sen}\theta + E\cos\theta$$

Aunque los coeficientes de la primera ecuación de mezclan de una manera complicada para dar los coeficientes de la segunda, la forma de la curva que está codificada en las dos ecuaciones no cambia, así que debe haber algo en las ecuaciones que no cambie.

Afirmación:

$$A' + C' = A + C$$
$$D'^2 + E'^2 = D^2 + E^2$$
$$4A'C' - B'^2 = 4AC - B^2$$

TAREA 11

1. Encuentra la ecuación de 2º grado correspondiente a la elipse formada por los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a los puntos (1,2) y (0,0) es 3 y dibújala.

2. Da la ecuación de una hipérbola cuyas asíntotas sean las rectas $x+y=0$ y $x+2y=0$ (hint: piensa en el producto de las ecuaciones)

3. Muestra que una ecuación $Ax^2+Bxy+Cy^2 =F$ con $B\neq 0$ no puede representar una circunferencia (Muestra que si se rotan los ejes para que $B'=0$ entonces $A'\neq C'$)

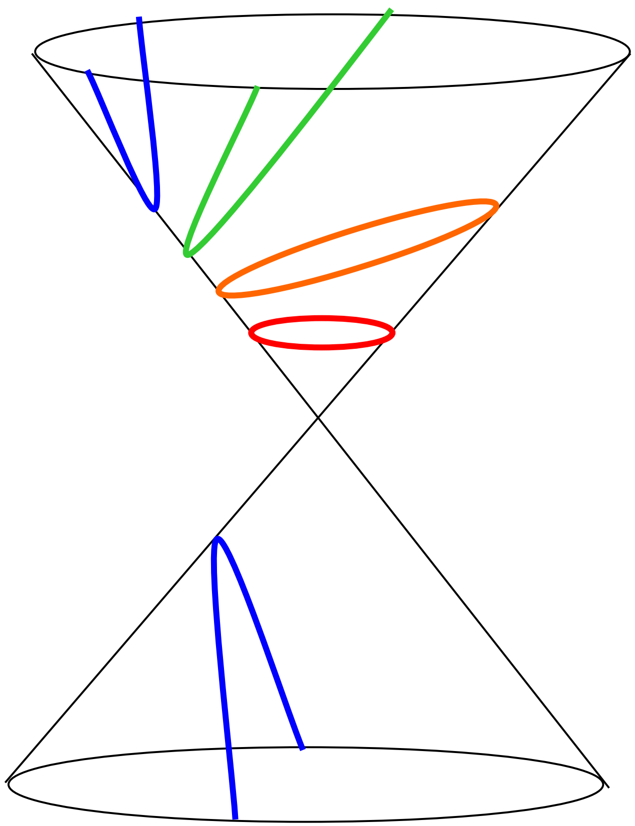
Clase 12

Invariantes

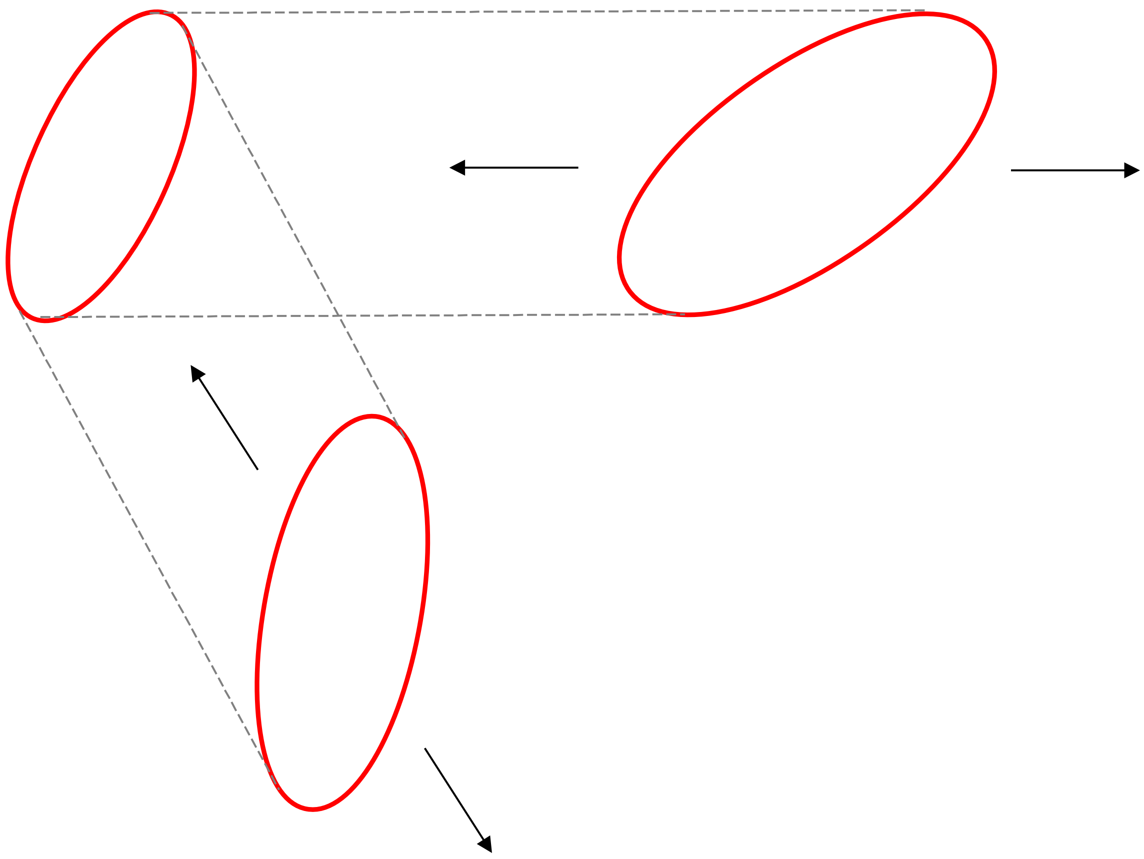
Teorema: Todas las ecuaciones de 2° grado:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F.$$

corresponden a cónicas (círculos, elipses, hipérbolas, o parábolas) o cónicas degeneradas (puntos, rectas o pares de rectas).



Corolario: Si se estira o encoje una cónica en cualquier dirección se obtiene otra cónica



¿Será posible saber la forma de la cónica determinada por la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ sin tener que dibujarla?

Al rotar los ejes la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$$

se convierte en

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F$$

donde

$$A' + C' = A + C$$

$$4A'C' - B'^2 = 4AC - B^2$$

Estas cantidades *invariantes* contienen información sobre la forma de la curva, que es independiente de las coordenadas.

Ejemplo. ¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$?

Aquí $A=1$, $B=2$, $C=3$. Queremos ver como sería la ecuación si rotamos los ejes para que $B'=0$

$A'+C' = A+C = 4$

$4A'C' = 4AC - B^2 = 8$ (si $B' = 0$)

$C' = 4-A'$

$4A'(4-A') = 8$

$A'^2 - 4A' + 2 = 0$ $A' = 2 \pm \sqrt{2}$ $C' = 2 \mp \sqrt{2}$

$(2+\sqrt{2})x'^2 + (2-\sqrt{2})y'^2 = 4$ *es una elipse*

Ejemplo. ¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 3xy + 2y^2 = 4$?

Aquí $A=1$, $B=3$, $C=2$. Queremos ver como sería la ecuación si rotamos los ejes para que $B'=0$

$$A'+C' = A+C = 3$$

$$4A'C' = 4AC - B^2 = -1 \qquad (\text{si } B' = 0)$$

$$C' = 3-A'$$

$$4A'(3-A') = -1$$

$$4A'^2 - 12A' - 1 = 0 \qquad A' = 3 \pm \sqrt{10} \qquad C' = 3 \mp \sqrt{10}$$

$$\underbrace{(3+\sqrt{10})}_{\textit{positivo}}x'^2 + \underbrace{(3-\sqrt{10})}_{\textit{negativo}}y'^2 = 4$$

es una hipérbola

Al rotar los ejes la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ se convierte en $A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F$ donde

$$4A'C' - B'^2 = 4AC - B^2$$

es el *discriminante* de la ecuación.

Cuando $B' = 0$ la forma de la curva $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F$ depende primordialmente de A' y C' (en las elipses A y C tienen el mismo signo, en las hipérbolas A y C tienen signo contrario y en las parábolas A o C son 0). Para reconocer entre elipses, hipérbolas o parábolas basta entonces saber el *signo* de $A'C'$, que es el signo del discriminante de la ecuación.

Ejemplo. ¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$?

$4AC - B^2 = 4 \cdot 1 \cdot 3 - 2^2 = 8 > 0$ *es una elipse*

($x^2 + 2xy + 3y^2 = 0$ es *un punto*)

($x^2 + 2xy + 3y^2 = -1$ es el vacío)

Ejemplo. ¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 3xy + 2y^2 = 4$?

$4AC - B^2 = 4 \cdot 1 \cdot 2 - 3^2 = -1 < 0$ *es una hipérbola*

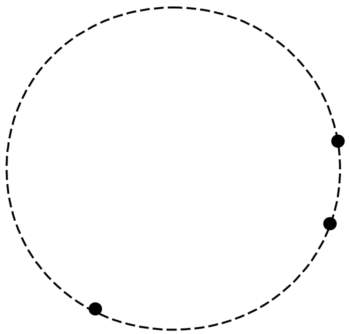
($x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$ es *un par de rectas*)

Ejemplo. ¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 2xy + y^2 + x = 4$?

$4AC - B^2 = 4 \cdot 1 \cdot 1 - 2^2 = 0$ *es una parábola*

($x^2 + 2xy + y^2 = 4$ es *un par de rectas*)
($x^2 + 2xy + y^2 = 0$ es *una recta*)

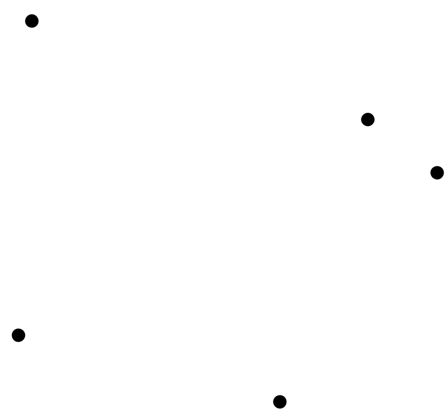
Por 3 puntos no alineados pasa una (y solo una) circunferencia.



¿Cuántas elipses pasarán por 3 puntos no alineados? ¿Y por 4 puntos?

Cónica por 5 puntos

Teorema: Por 5 puntos en posición general en el plano pasa una y solo una cónica.



Un conjunto de puntos en el plano está en *posición general* si no hay 3 alineados.

Cónica por 5 puntos

Teorema: Por 5 puntos en posición general en el plano pasa una y solo una cónica.

Demostración: Dados 5 puntos (x_1,y_1) (x_2,y_2) (x_3,y_3) (x_4,y_4) (x_5,y_5) en posición general, necesitamos encontrar una ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ que sea satisfecha por cada uno. Esto da 5 ecuaciones lineales en las incógnitas A, B, C, D, E, F:

$$Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1 = F$$

$$Ax_2^2 + Bx_2y_2 + Cy_2^2 + Dx_2 + Ey_2 = F$$

$$Ax_3^2 + Bx_3y_3 + Cy_3^2 + Dx_3 + Ey_3 = F$$

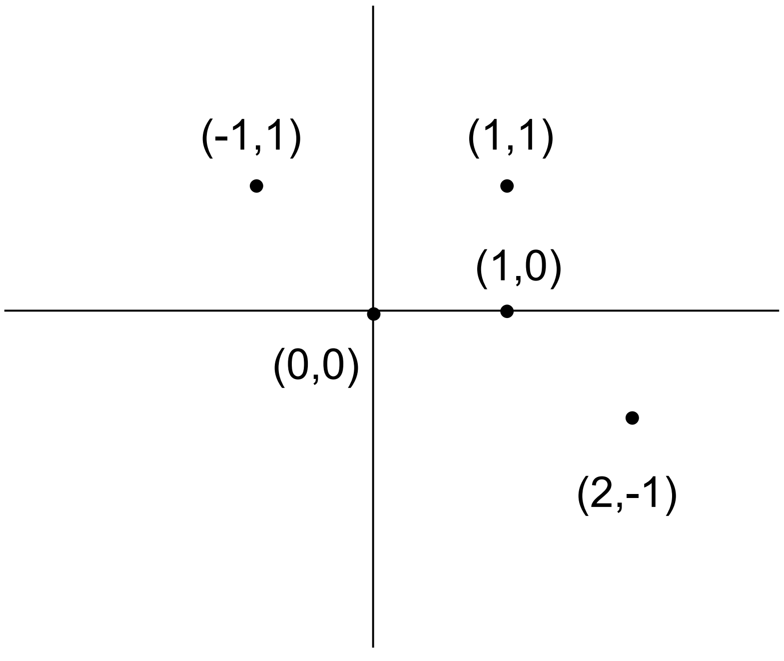
$$Ax_4^2 + Bx_4y_4 + Cy_4^2 + Dx_4 + Ey_4 = F$$

$$Ax_5^2 + Bx_5y_5 + Cy_{i5}^2 + Dx_5 + Ey_5 = F$$

Necesitamos ver que este sistema de ecuaciones siempre tiene soluciones, y que todas las soluciones son múltiplos de una sola solución.

Cónica por 5 puntos

Ejemplo: ¿Cuál es la cónica que pasa por estos puntos?

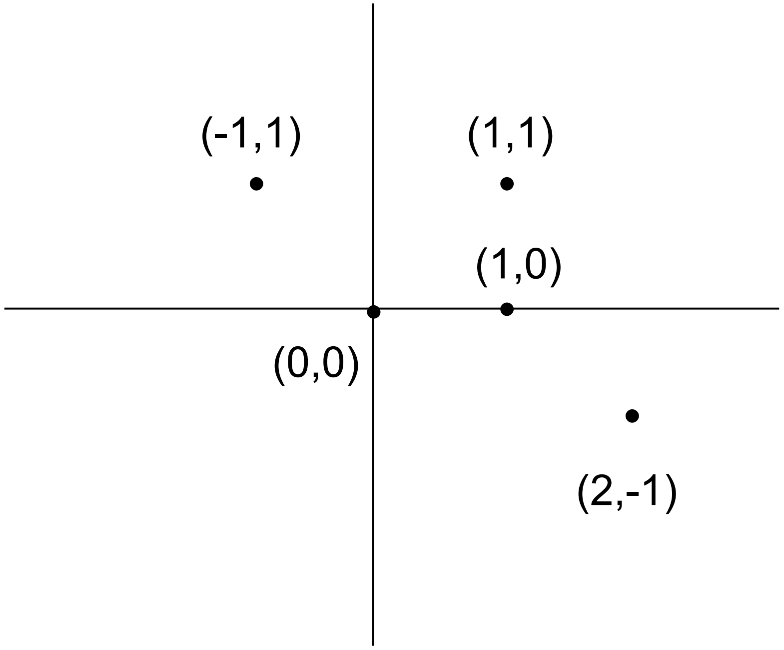


Cónica por 5 puntos

Ejemplo: ¿Cuál es la cónica que pasa por estos puntos?

La cónica $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ pasa por los puntos si los coeficientes satisfacen las siguientes ecuaciones lineales:

(0,0)	$A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 0 + D\cdot 0 + E\cdot 0 = F$
(1,0)	$A\cdot 1 + B\cdot 0 + C\cdot 0 + D\cdot 1 + E\cdot 0 = F$
(1,1)	$A\cdot 1 + B\cdot 1 + C\cdot 1 + D\cdot 1 + E\cdot 1 = F$
(-1,1)	$A\cdot 1 + B(-1) + C\cdot 1 + D(-1) + E\cdot 1 = F$
(2,-1)	$A\cdot 4 + B(-1) + C\cdot 1 + D\cdot 2 + E(-1) = F$



$0 = F$

$A + D = F$

$A + B + C + D + E = F$

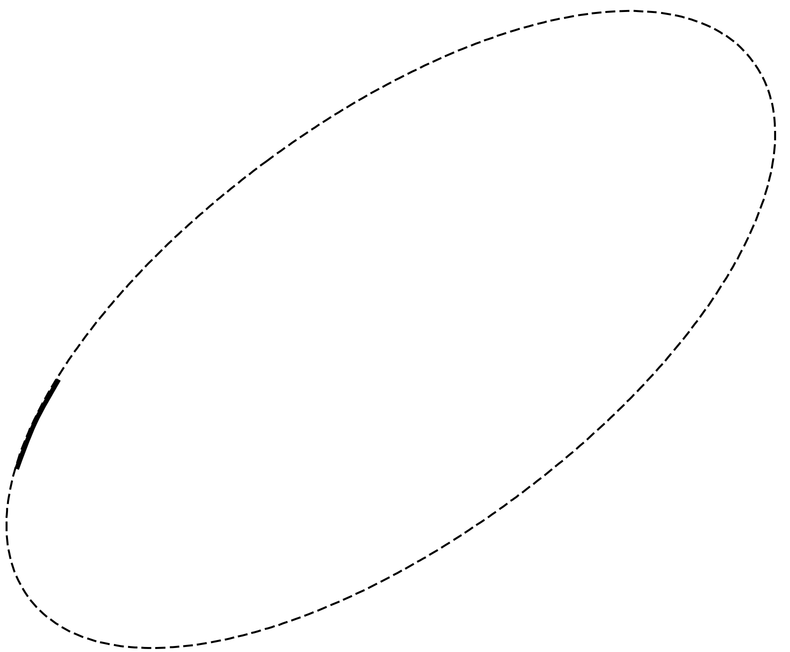
$A - B + C - D + E = F$

$4A - B + C + 2D - E = F$

B, C, D y E pueden despejarse en términos de A:

Cónica por 5 puntos

Corolario: Una cónica está determinada por cualquier arco.



Ecuaciones de grados mayores

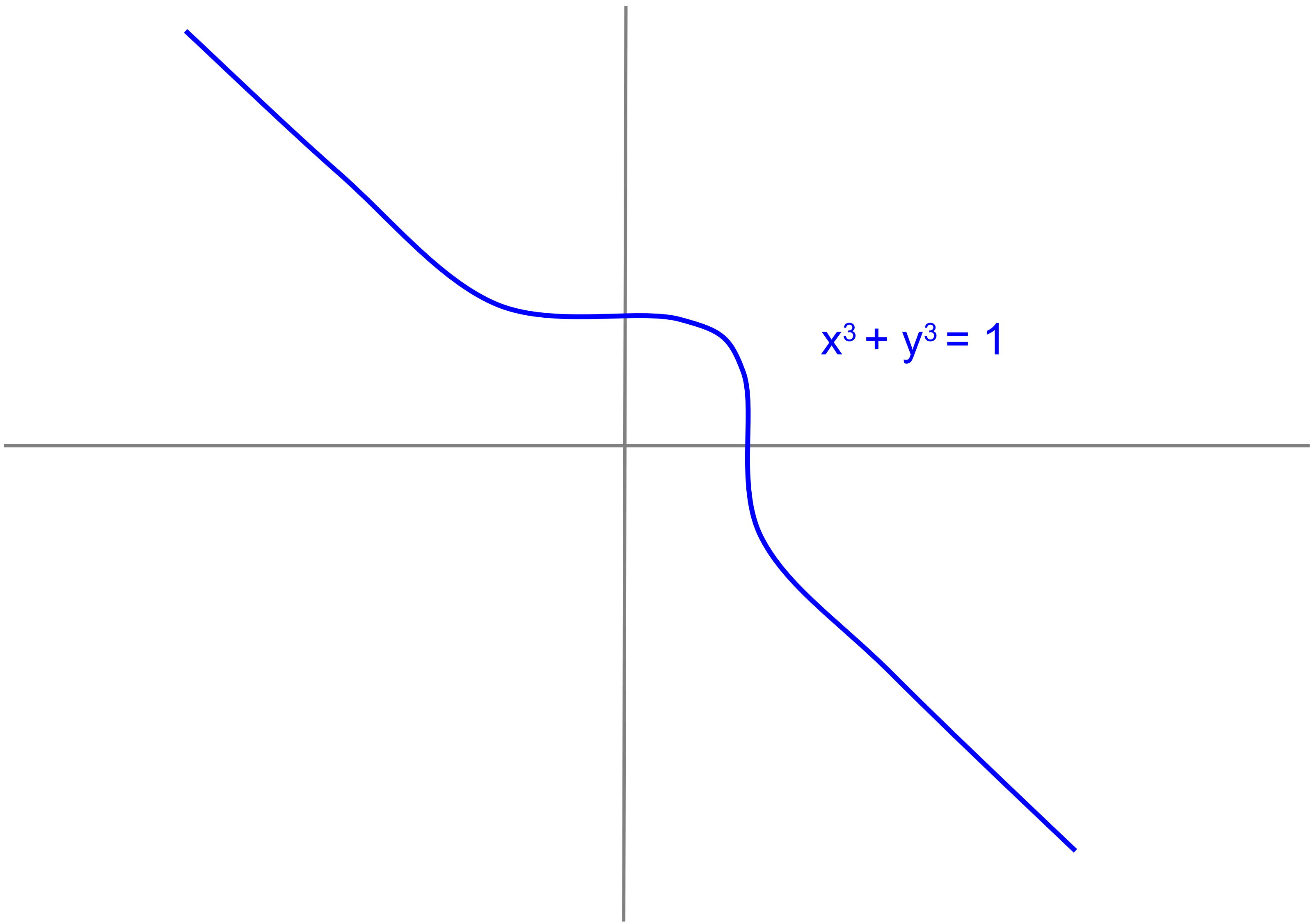
¿Cómo serán las curvas determinadas por ecuaciones de grados mayor que 2?

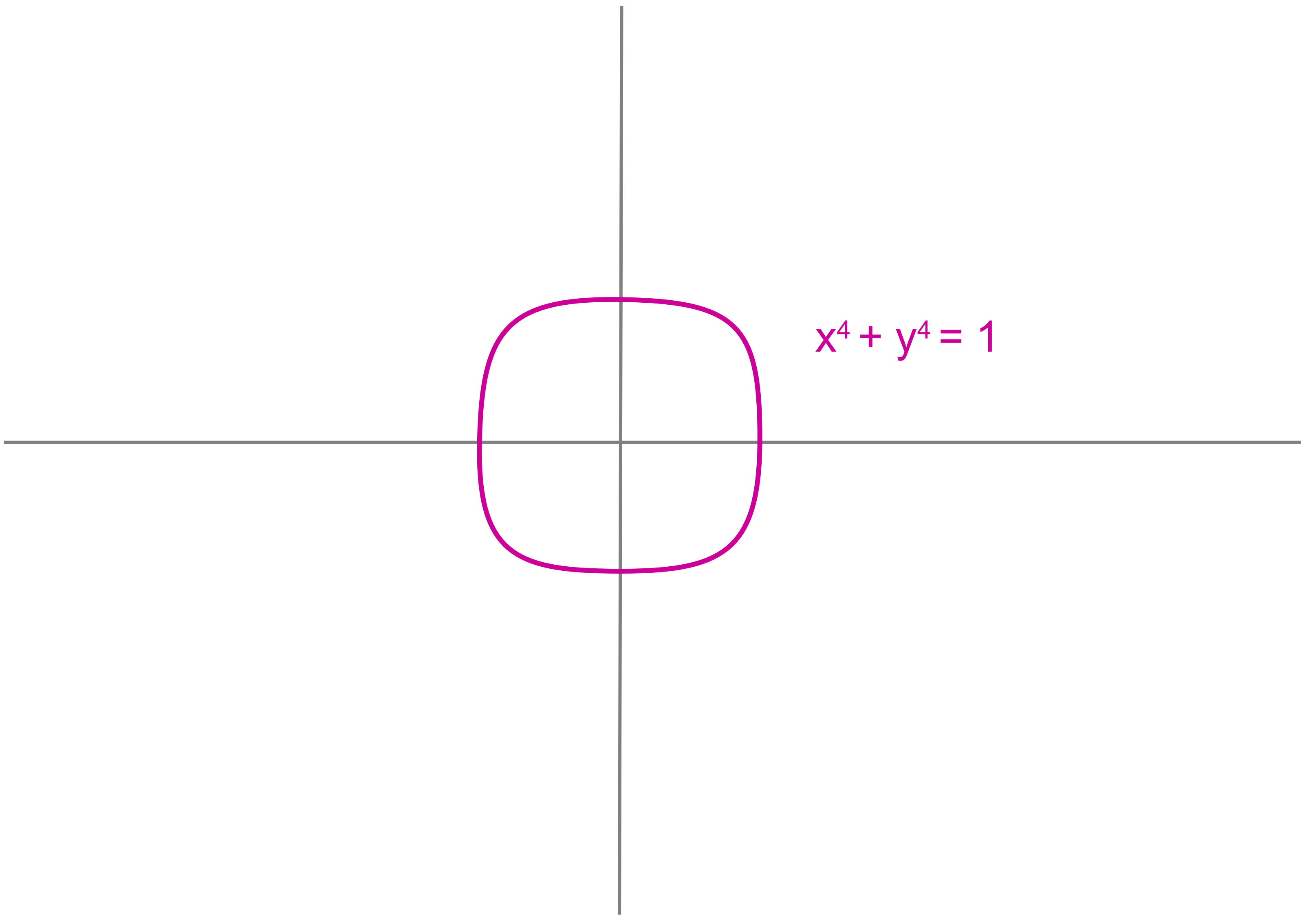
¿ $x^3 + y^3 = 1$?

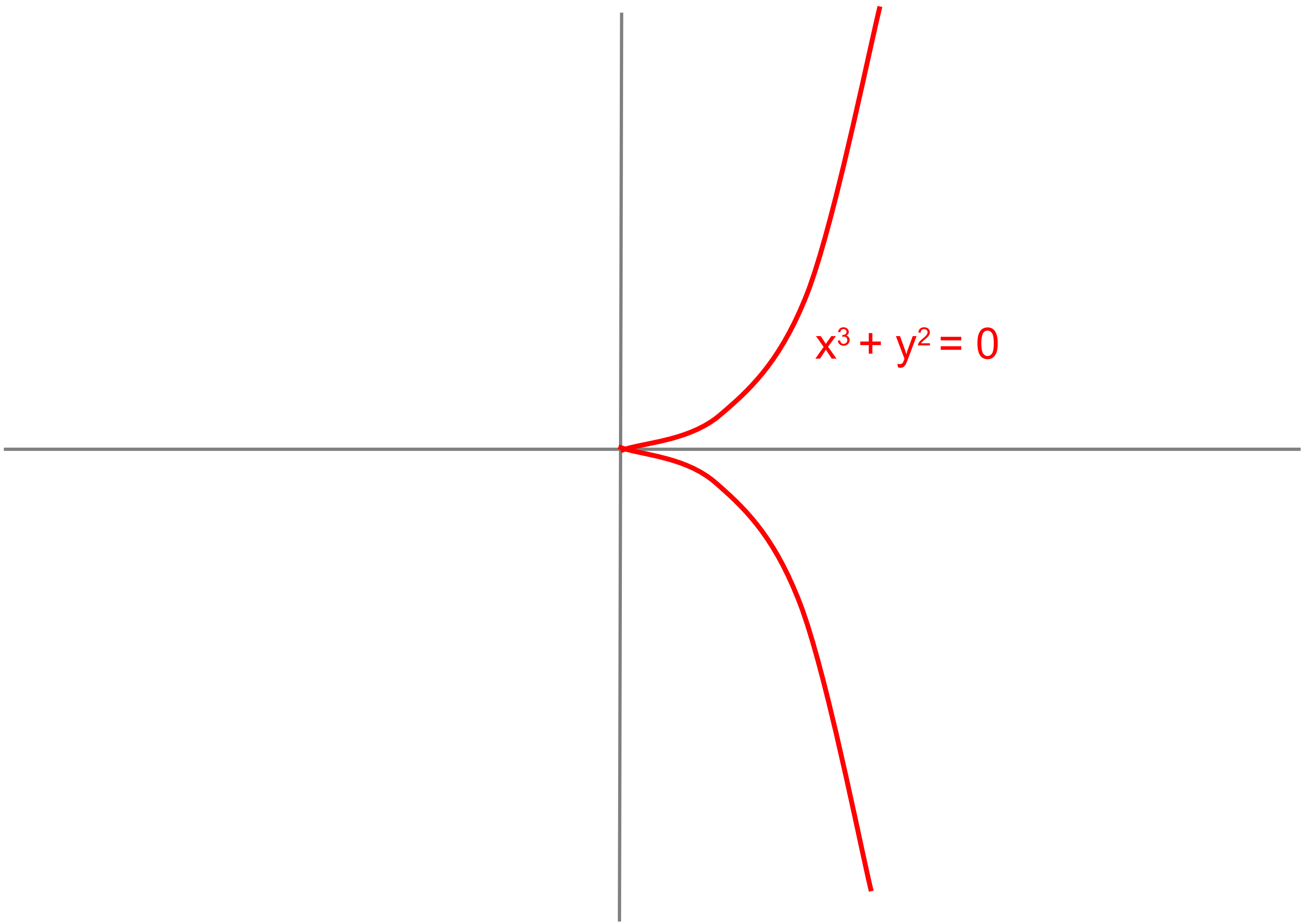
¿ $x^3 + y^2 = 0$?

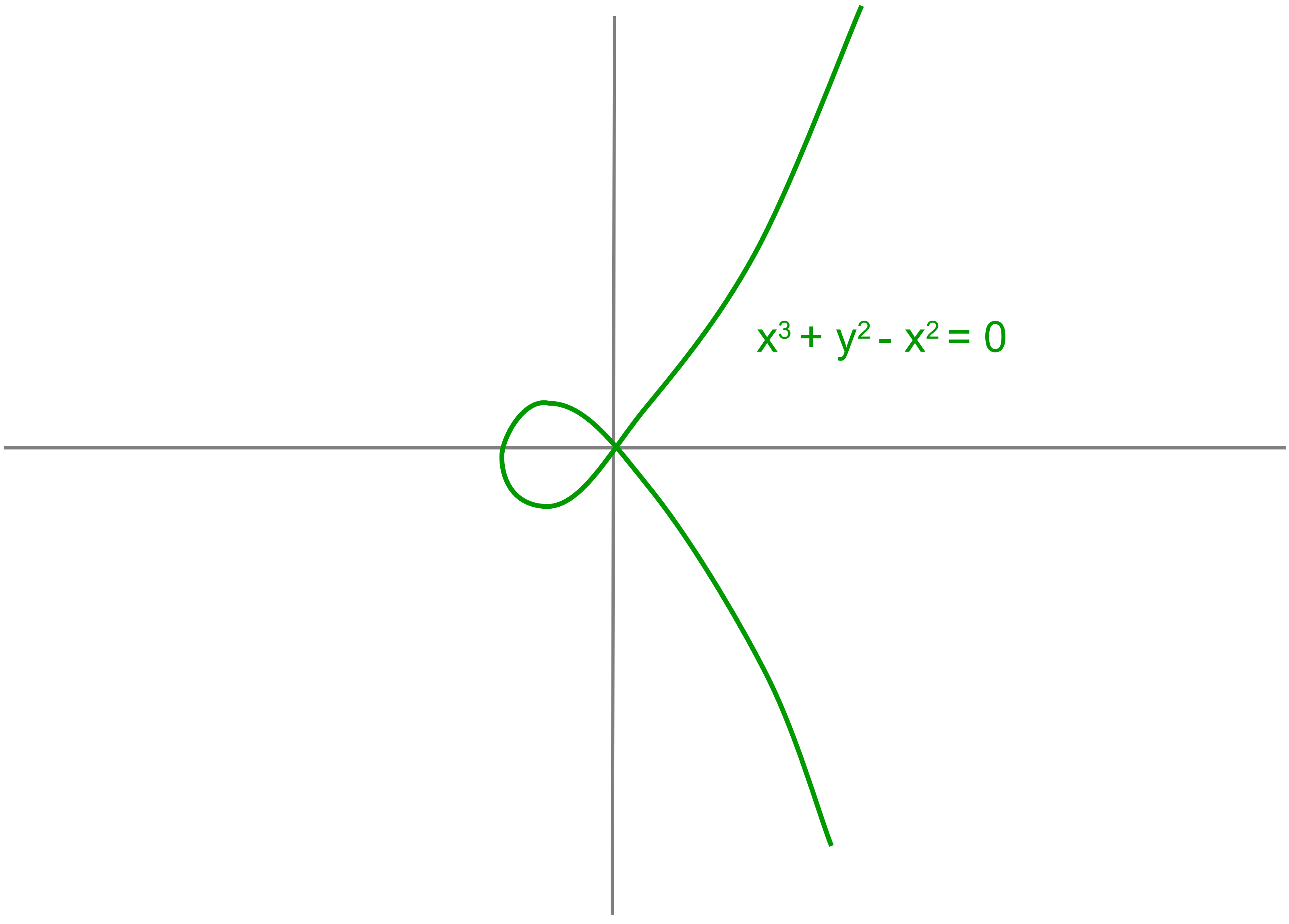
¿ $x^4 + y^4 = 1$?

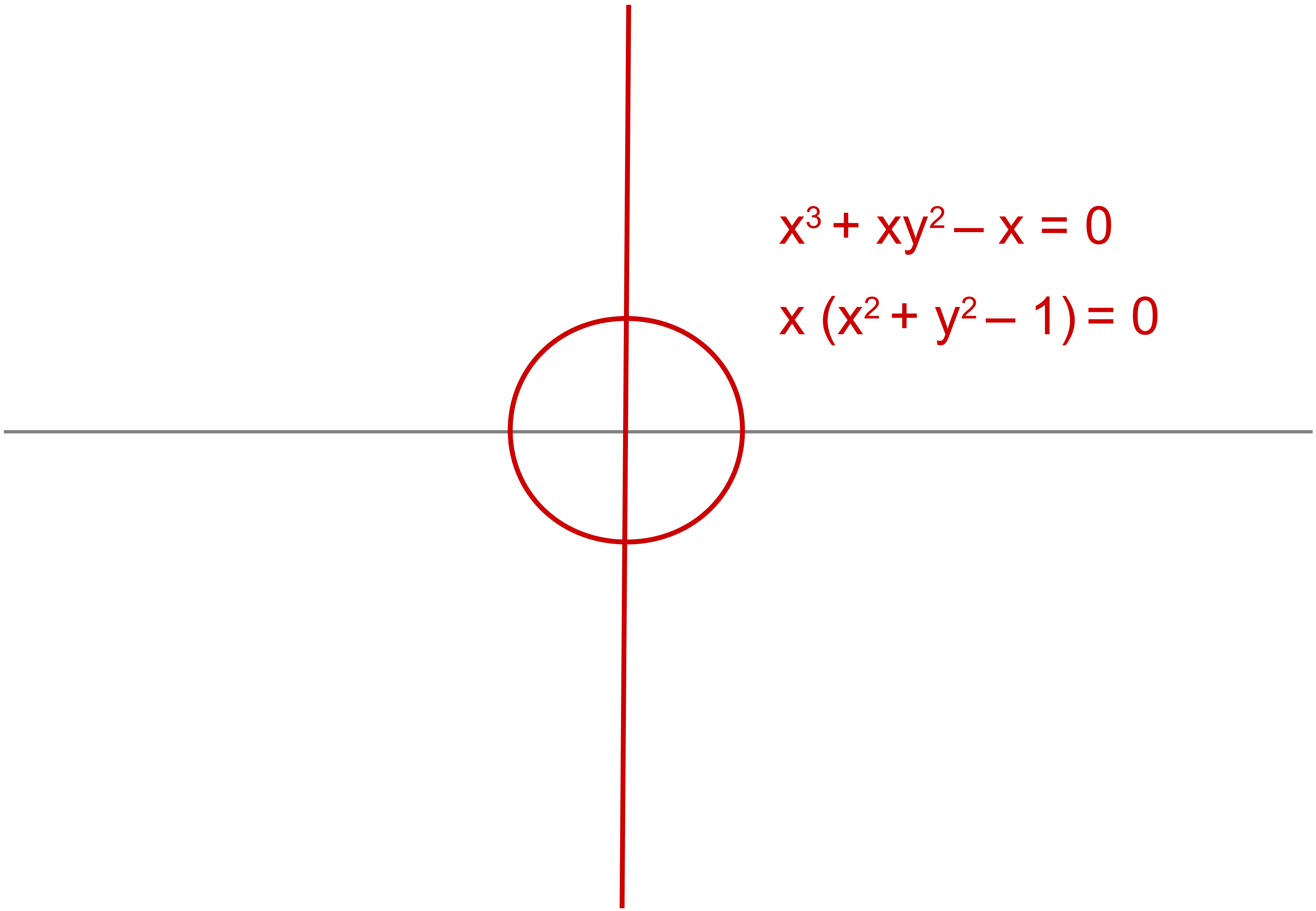
¿ $x^3 + y^2 - x^2 = 0$?


x³ + y³ = 1


$x^4 + y^4 = 1$

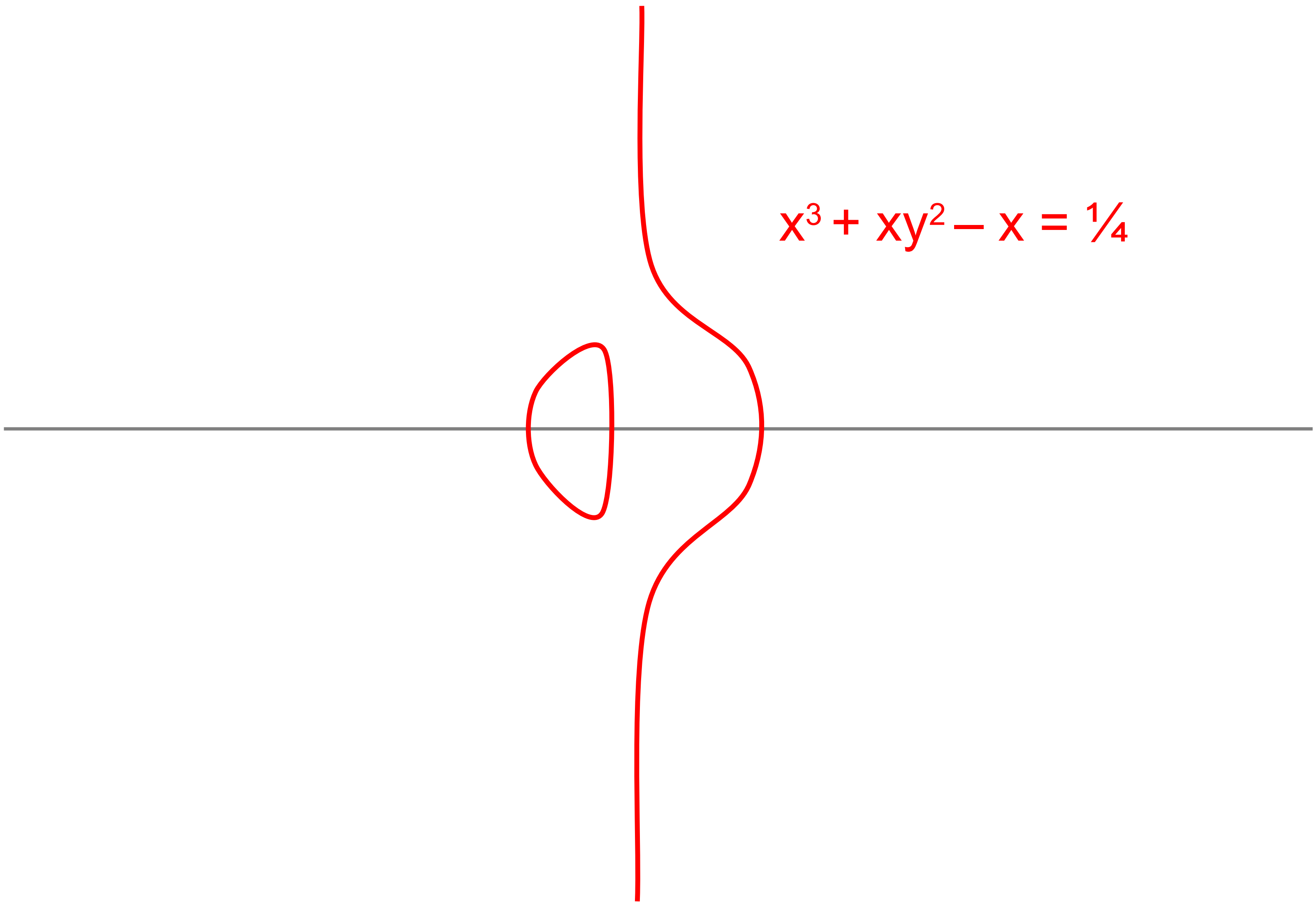

x³ + y² = 0


$x^3 + y^2 - x^2 = 0$



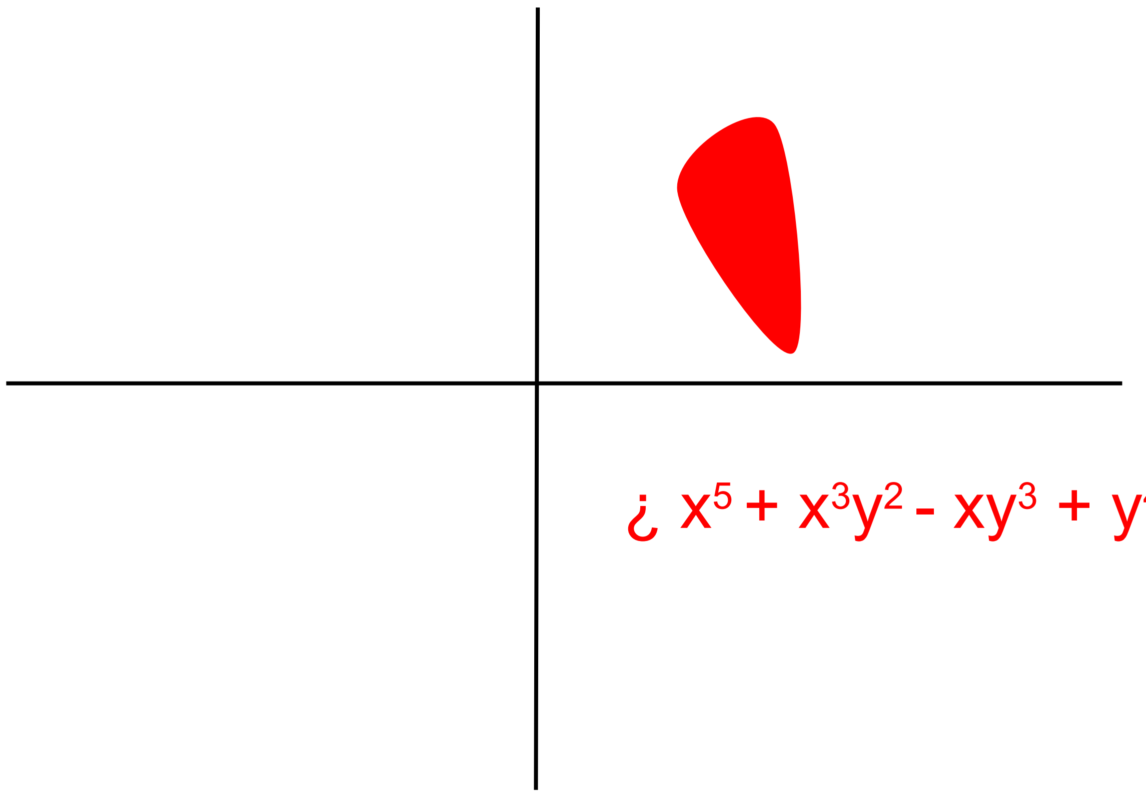
$$x^3 + xy^2 - x = 0$$

$$x\,(x^2 + y^2 - 1) = 0$$


$x^3 + xy^2 - x = ¼$

¿Todas las ecuaciones describen curvas?

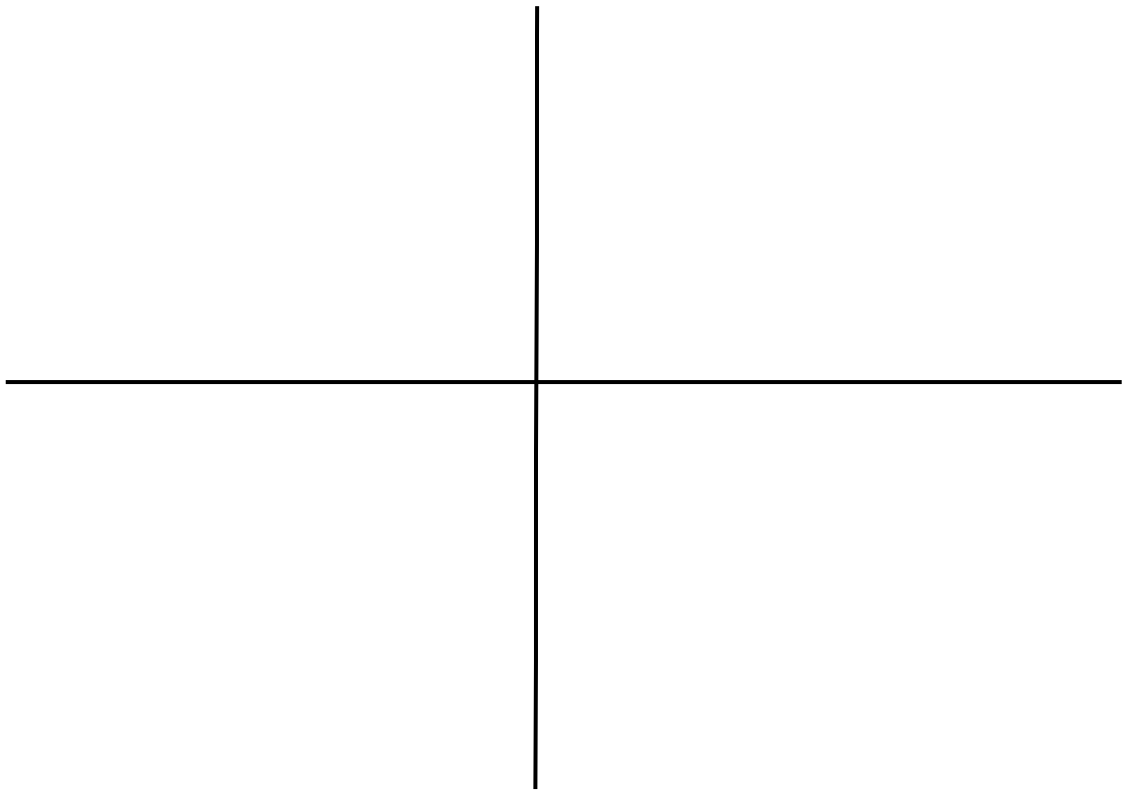
(¿o puntos, o nada?)



$$¿\ x^5 + x^3y^2 - xy^3 + y^4 - xy + y = 1\ ?$$

¿No existirán ecuaciones cuyas soluciones cubran toda una región del plano?

¿Distintas ecuaciones describen curvas distintas?

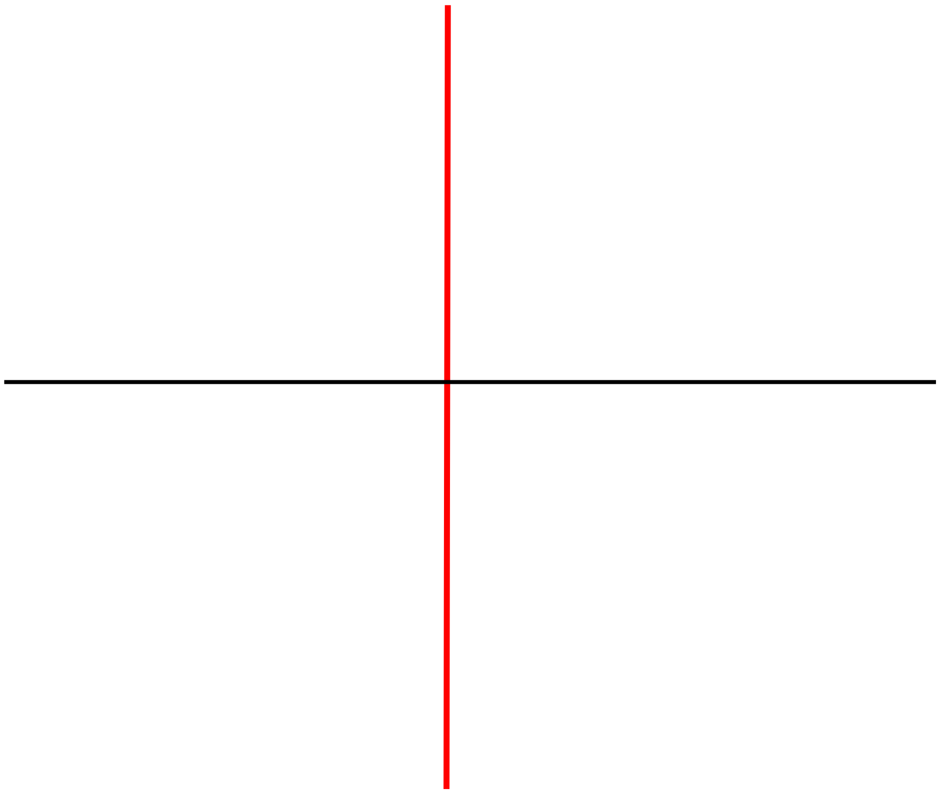


¿O existirán distintas ecuaciones con las mismas soluciones?

¿Distintas ecuaciones describen curvas distintas?

NO, por ejemplo:

$x = 0$	$x = 0$
$x^2 = 0$	$x \cdot x = 0$
$x^3+xy^2+x = 0$	$x\,(x^2+y^2+1) = 0$



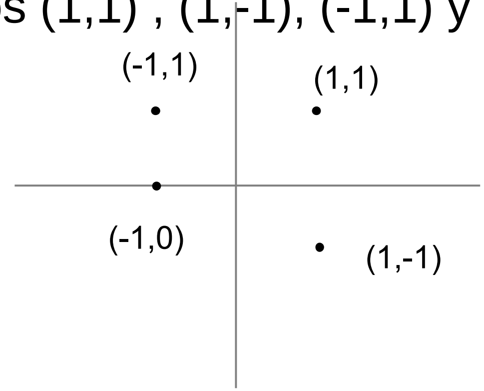
Describen la misma línea recta, pero las dos últimas son reducibles (se obtienen de la primera multiplicándola por algo).

¿Será cierto que todas las ecuaciones con las mismas soluciones son múltiplos de la misma ecuación irreducible?

TAREA 12

1. ¿Cómo queda la ecuación $2x^2 + 5xy + 3y^2 = 4$ si se rotan los ejes de coordenadas para que desaparezca el término xy? ¿Que forma tiene la curva?

2. Encuentra las ecuaciones de una elipse y de una hipérbola que pasen por los puntos (1,1) , (1,-1), (-1,1) y (-1,0)



3. Grafica cuidadosamente (usando una computadora) el conjunto de puntos del plano tales que el producto de sus distancias a los puntos (1,0) y (-1,0) es ½ . Haz lo mismo cuando el producto es 1 y cuando es 2 .

Clases 13/14

El espacio euclidiano n-dimensional

Vectores

R^2 un modelo del plano euclidiano

R^2 (el conjunto de todas las parejas de números reales) es un *modelo* del plano euclidiano:

- Definimos un *punto* como una pareja (x,y) de números reales.
- Definimos una *linea recta* como un conjunto de puntos de la forma $\{ (a_1t+b_1, a_2t+b_2) / t \text{ en } R \}$
- Definimos la distancia entre dos puntos (a_1,a_2) y (b_1,b_2) como $\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$

Entonces se cumplen todos los axiomas de la geometría euclidiana.

R^3 un modelo del espacio euclidiano

R^3 (el conjunto de todas las tercias de números reales) es un modelo del espacio euclidiano:

- Definimos un *punto* como una tercia (x,y,z) de números reales.
- Definimos una *linea recta* como un conjunto de puntos de la forma $\{ (a_1t+b_1, a_2t+b_2 , a_3t+b_3) \,/\, t \text{ en } R \}$
- Definimos un *plano* como un conjunto de puntos de la forma $\{ (a_1t+b_1s+c_1, a_2t+b_2s+c_2 , a_3t+b_3s+c_3) / \, t,s \text{ en } R \}$
- Definimos la distancia entre dos puntos (a_1,a_2,a_3) y (b_1,b_2,b_3) como $\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}$

R^n : un espacio euclidiano de n dimensiones

Análogamente, podemos considerar a

$$R^n = \{(x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n) \text{ con } x_i \text{ en } R\}$$

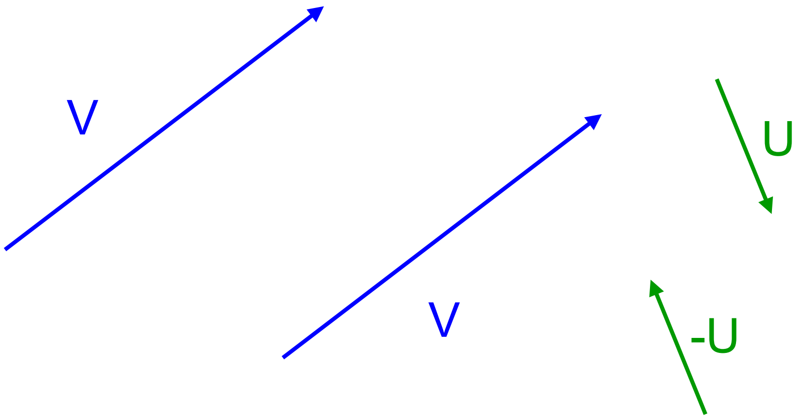
Si definimos las rectas como los conjuntos de puntos la forma $\{ (a_1t+b_1, a_2t+b_2, \ldots, a_nt+b_n) \ / \ t \text{ en } R \}$ y la distancia entre dos puntos $(a_1, a_2, a_3,\ldots, a_n)$ y $(b_1, b_2, b_3,\ldots, b_n)$ como

$$\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2}$$

Entonces R^n es un modelo de un espacio euclidiano de n dimensiones. *La existencia de espacios euclidianos de cualquier número de dimensiones está garantizada por la existencia de los números reales.*

VECTORES

Un *vector* es un segmento de recta dirigido en el plano o el espacio euclidiano.

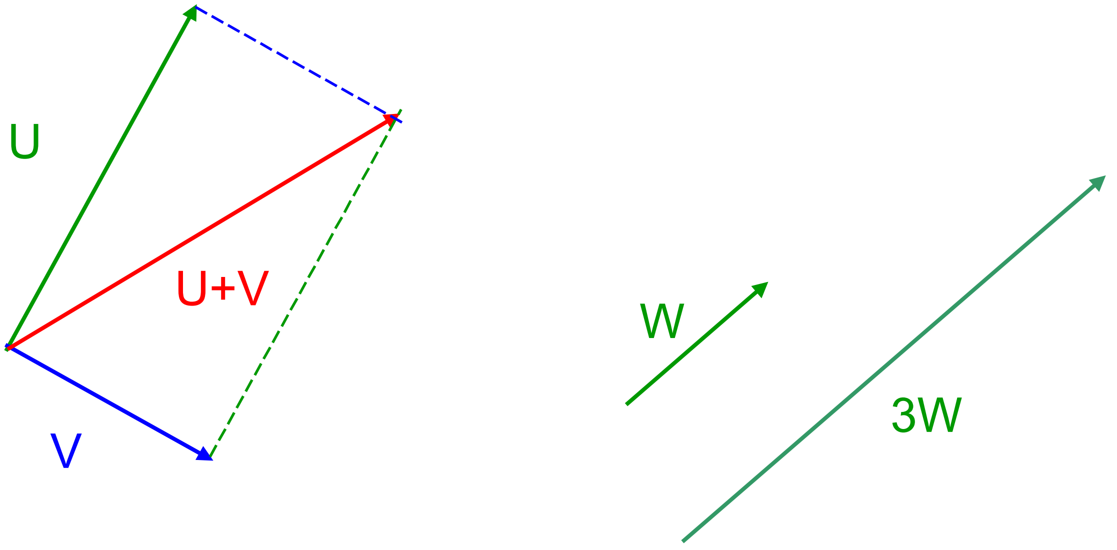


Dos vectores *son iguales* si tienen la misma dirección, magnitud y sentido.

Los vectores pueden representar muchas cosas: posiciones relativas, desplazamientos, velocidades, fuerzas,…

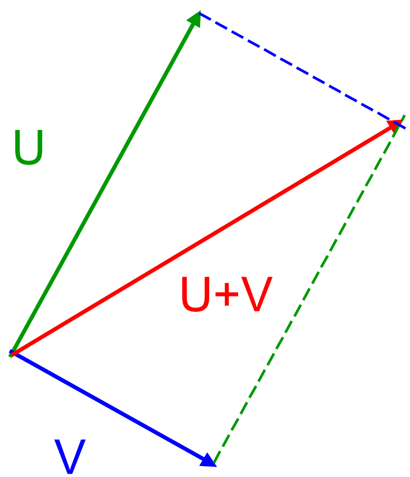
Suma de vectores

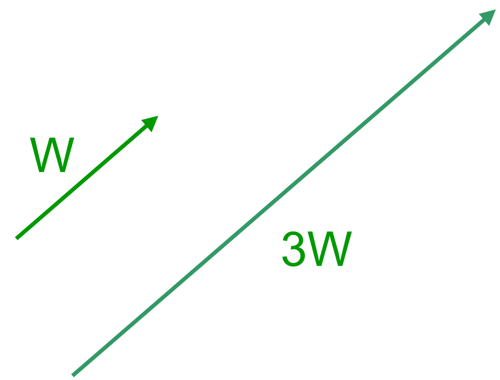
Los vectores pueden sumarse y multiplicarse por números (escalares):



Suma de vectores

Los vectores pueden sumarse y multiplicarse por números (escalares):





Propiedades:

$U + V = V + U$

$(U + V) + W = U + (V + W)$

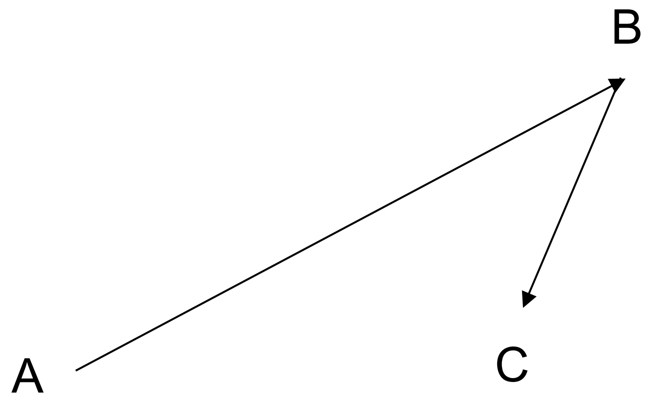
$\alpha(U+V) = \alpha U + \alpha V$

$(\alpha+\beta)U = \alpha U + \beta U$

Suma de vectores

Ejemplo:

La posición relativa del punto C respecto al punto A es la suma de las posiciones relativas de C respecto a B y de B respecto a A:



Tarea: Haz una grafica la trayectoria de Marte alrededor del Sol vista desde la Tierra.

Suma de vectores

Ejemplo:

La velocidad de A respecto a B es la diferencia de las velocidades de A y de B.

Suma de vectores

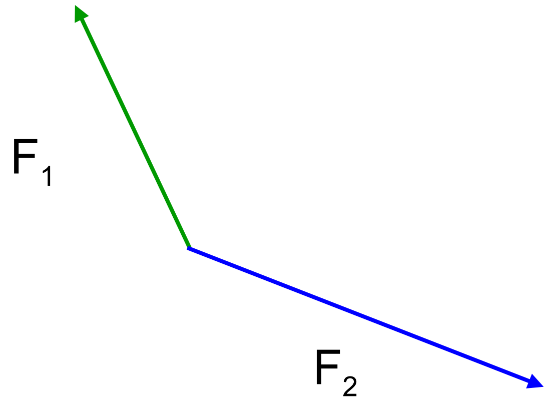
Ejemplo:

La velocidad de A respecto a B es la diferencia de las velocidades de A y de B.

Suma de vectores

Ejemplo:

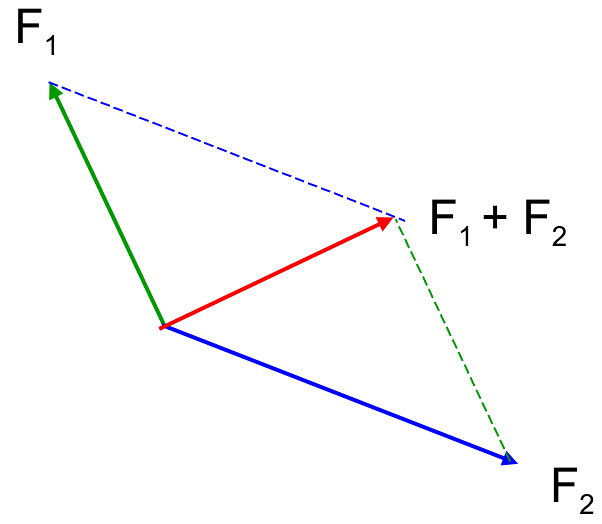
Suma de fuerzas



Suma de vectores

Ejemplo:

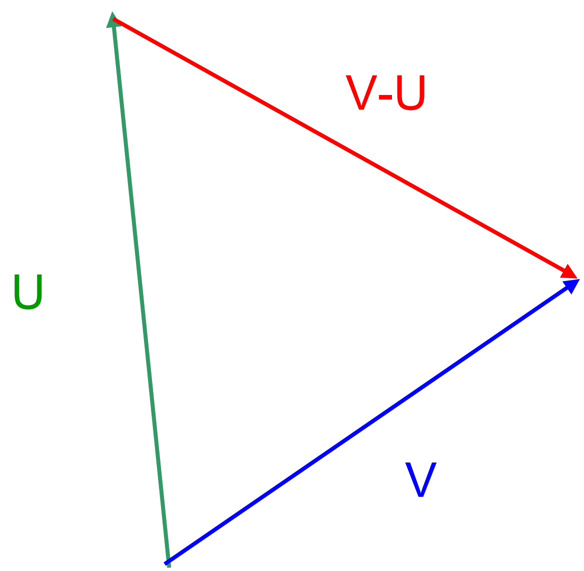
Suma de fuerzas

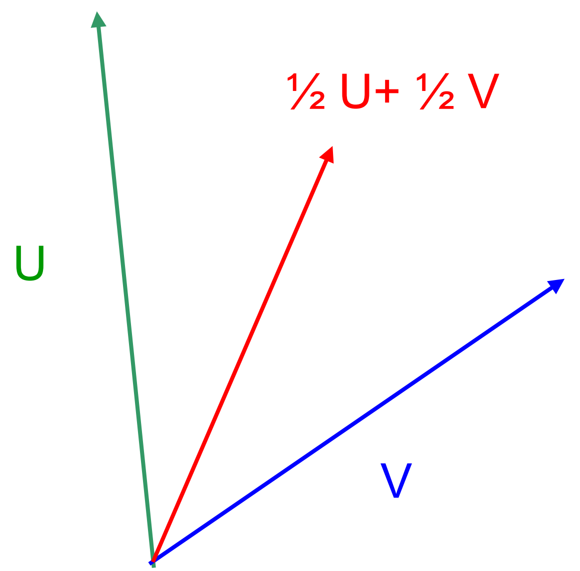


Las fuerzas se suman como vectores

Combinaciones lineales

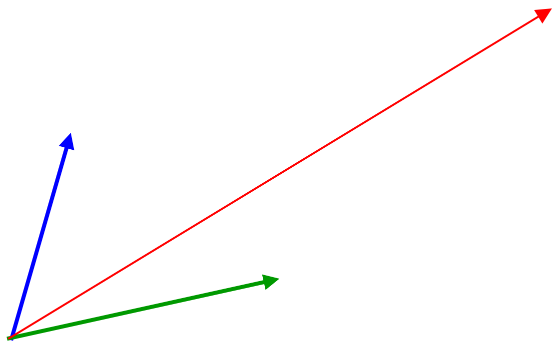
Un vector V es *combinación lineal* de otros vectores, si V se puede expresar como una suma de múltiplos de esos vectores.





Combinaciones lineales

Teorema. Todos los vectores del plano son combinaciones lineales de dos vectores no colineales.



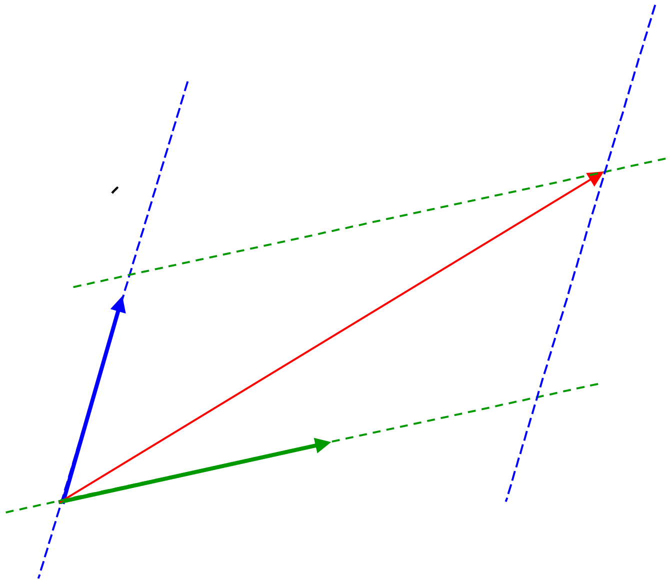
Combinaciones lineales

Teorema. Todos los vectores del plano son combinaciones lineales de dos vectores no colineales fijos.

Dem.

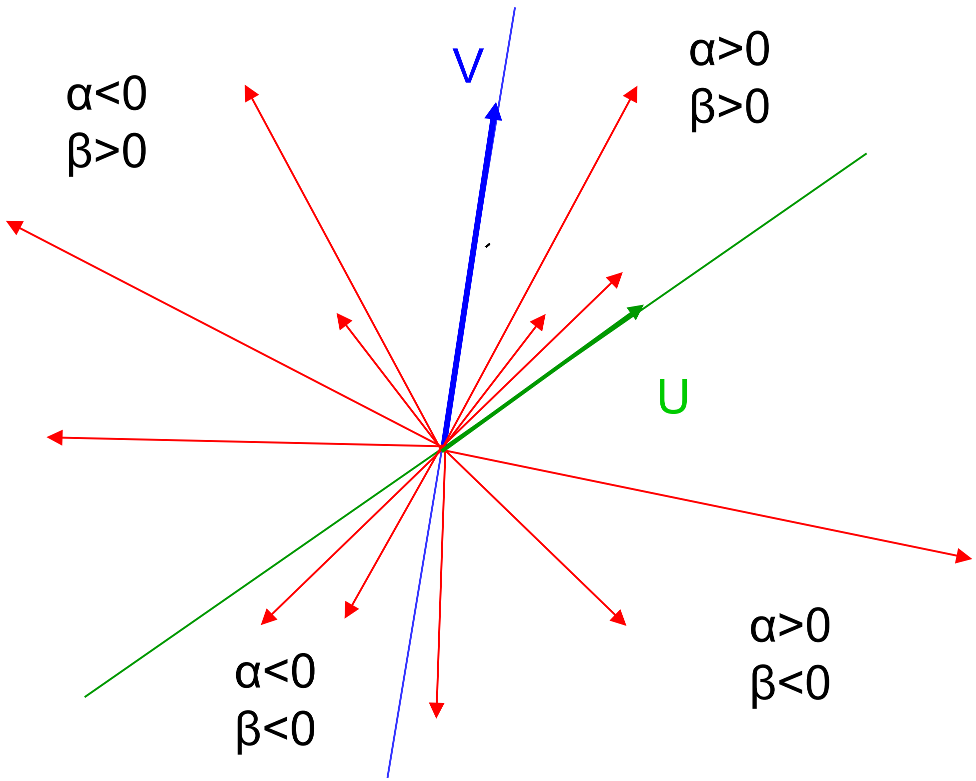
Sean U y V dos vectores no colineales y W cualquier otro vector del plano basado en el mismo punto.

Dibujando paralelas a U y V por la punta de W, vemos que W es la suma de dos vectores que son paralelos a U y V respectivamente.



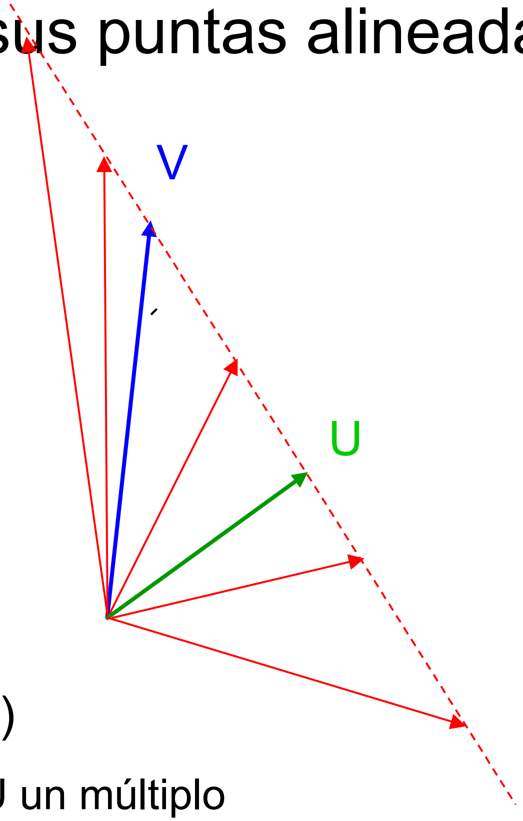
Combinaciones lineales

Vectores del plano que son combinaciones lineales $\alpha U+\beta V$:



Combinaciones lineales

Los vectores del plano que son combinaciones lineales $\alpha U+\beta V$ con $\alpha+\beta=1$ tienen sus puntas alineadas con las puntas de U y V.



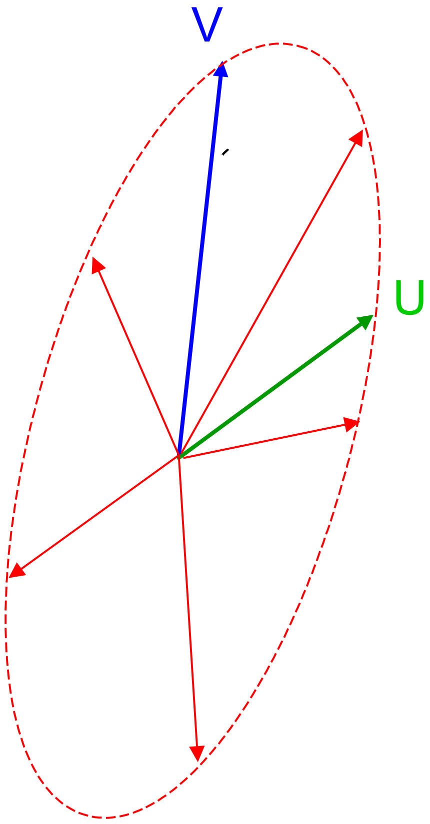
Dem.

$\alpha U+\beta V = U+ (\alpha-1)U+\beta V= =U+\beta(V-U)$

(los vectores se obtienen sumándole a U un múltiplo del vector V-U, que está en la recta.

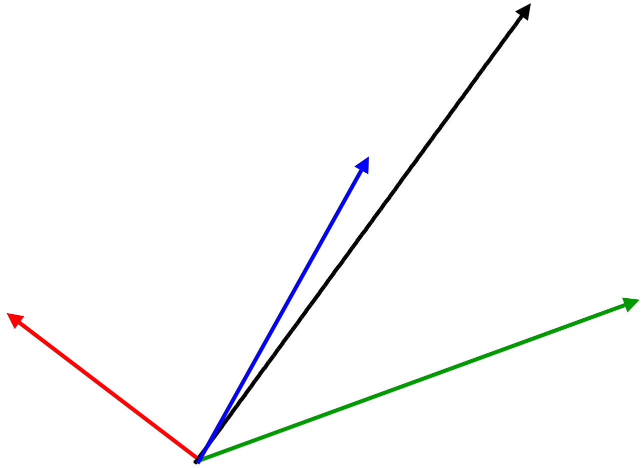
Combinaciones lineales

Los vectores del plano que son combinaciones lineales $\alpha U + \beta V$ con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.



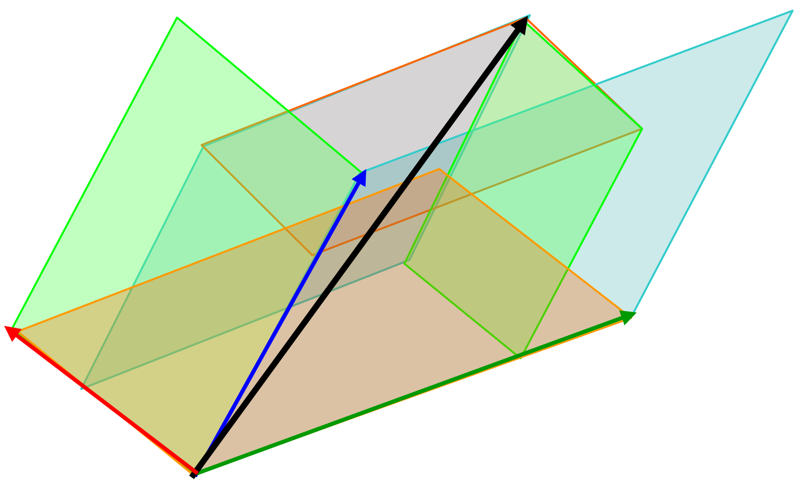
Combinaciones lineales

Teorema. Todos los vectores del espacio son combinaciones lineales de 3 vectores no coplanares.



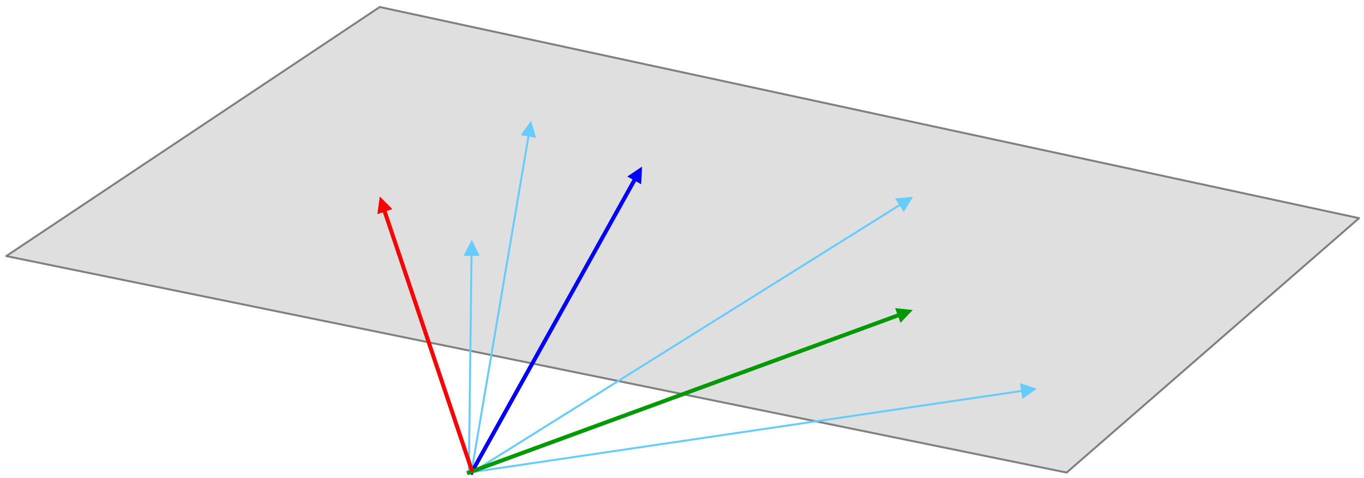
Combinaciones lineales

Teorema. Todos los vectores del espacio son combinaciones lineales de 3 vectores no coplanares.



Combinaciones lineales

Los vectores en el espacio que son combinaciones lineales $\alpha U+\beta V+\lambda W$ con $\alpha+\beta+\lambda=1$ tienen sus puntas en el plano determinado por las puntas de los vectores U, V y W.



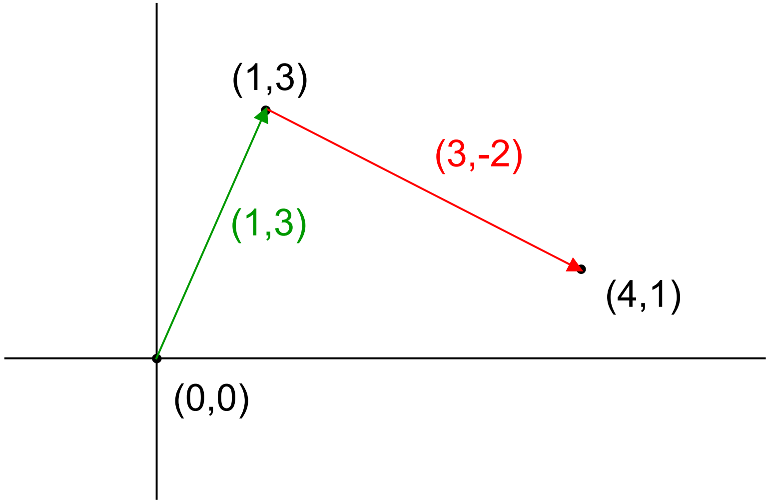
Dem.

$\alpha U+\beta V+\lambda W= U+(\alpha-1)U+\beta V+\lambda W = =U+\beta(V-U)+\lambda(W-U)$

(los vectores se obtienen sumándole a U múltiplos de los vectores V-U y W-U, que están en el plano.)

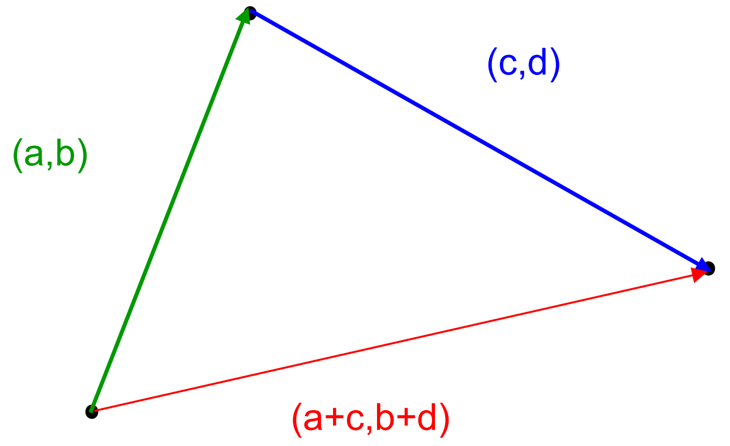
Vectores con coordenadas

Los vectores en R^2 pueden representarse igual que los puntos:



Por Pitagoras la norma del vector (a,b) es $|(a,b)| = \sqrt{a^2+b^2}$

Vectores con coordenadas



La suma de vectores está dada por la suma coordenada a coordenada: (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)

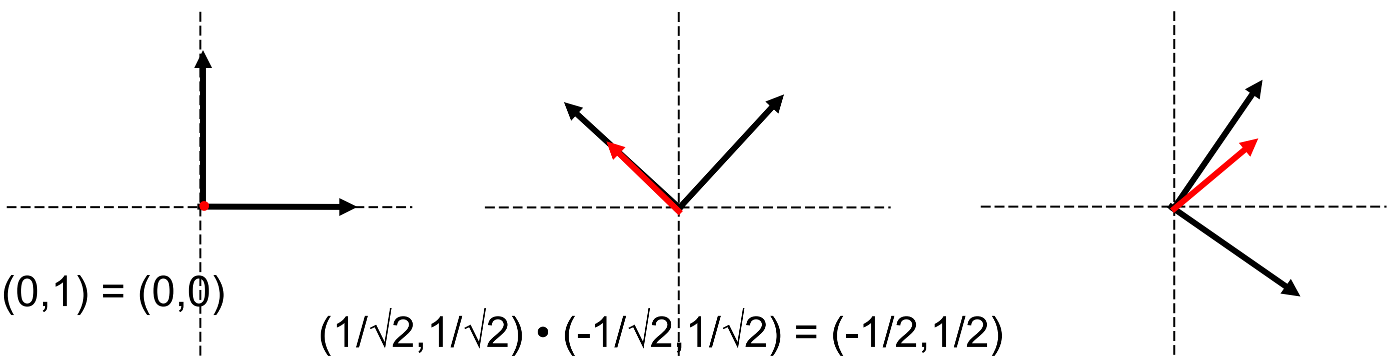
El producto por escalares también: λ(a,b) = (λa, λb)

¿Un producto de vectores?

¿Y si definimos un producto de vectores como
$(a,b) \bullet (c,d) = (ac,bd)$?

Este producto no tiene un significado geométrico independiente del sistema de coordenadas:

Ejemplo



$(1,0) \bullet (0,1) = (0,0)$

$(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}) \bullet (-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}) = (-1/2,1/2)$

$(3/5,4/5)\ (4/5,-3/5) = (12/25,12/25)$

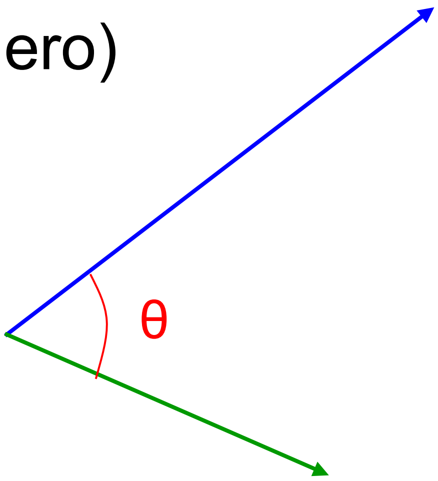
El producto interno

(o producto escalar, o producto punto)

El *producto interno* $(a,b) \cdot (c,d) = ac+bd$

(que no es un vector, sino un número)

sí tiene un significado geométrico:



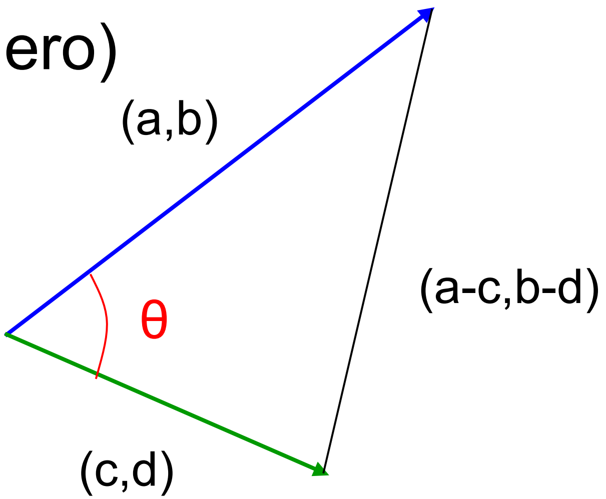
$ac+bd = |(a,b)|\,|(c,d)| \cos\theta$

El producto interno

El *producto interno* $(a,b) \cdot (c,d) = ac+bd$

(que no es un vector, sino un número)

sí tiene un significado geométrico:



$$ac+bd = |(a,b)|\,|(c,d)| \cos \theta$$

Dem. Por la ley de los cosenos:

$$(a-c)^2 + (b-d)^2 = a^2+b^2 + c^2+ d^2 - 2 \sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{c^2+ d^2} \cos \theta$$

Por lo tanto $\quad -2ac -2bd = -2\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{c^2+ d^2} \cos \theta$

El producto interno

- Dos vectores son ortogonales (perpendiculares) si y solo si su producto interno es 0.

- El ángulo entre dos vectores U y V está dado por

$\cos\theta = U \cdot V / |U|\,|V|$

Ejemplos:

- Los vectores (4,6) y (9,-6) son perpendiculares.

- El ángulo entre los vectores (1,2) y (3,4) está dado por

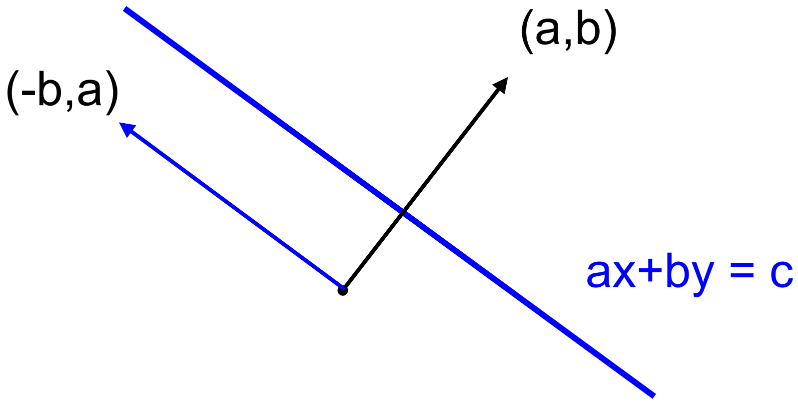
$\cos\theta = (1,2)\cdot(3,4) / |(1,2)||(3,4)| = 11/5\sqrt{5}.$

Lema. En el plano, las ecuaciones $ax+by = c$ definen rectas perpendiculares al vector (a,b)

Dem. La ecuación puede escribirse como $(a,b)\cdot(x,y) = c$.

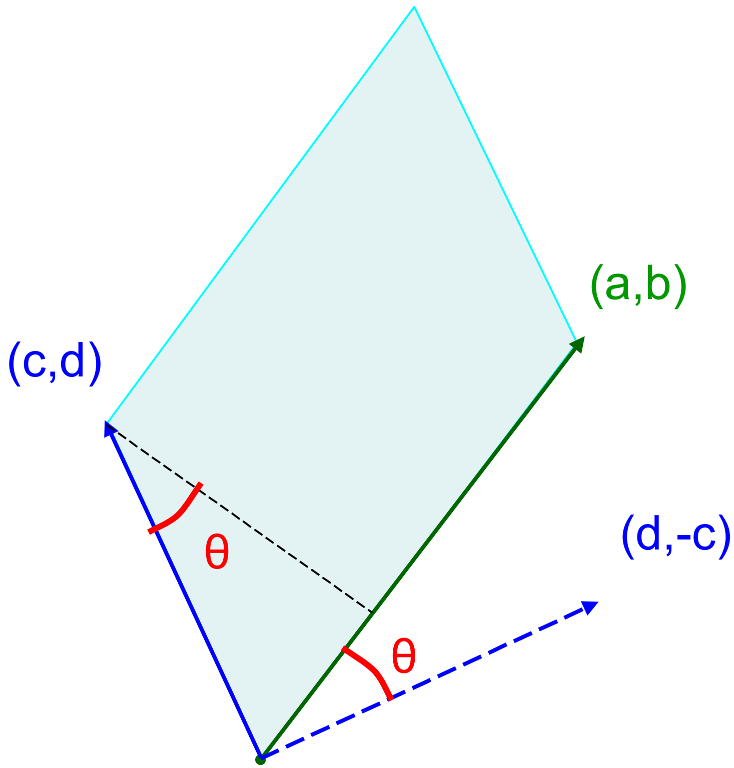
Si $C=0$, los puntos (x,y) que satisfacen esta ecuación corresponden a los vectores en el plano perpendiculares al vector (a,b), y estos forman una recta.

Si $C\neq 0$ y (x_1,y_1) es una solución de la ecuación $ax+by = c$ entonces para cualquier otra solución (x,y) se tiene $(a,b)\cdot(x-x_1,y-y_1) = 0$. Así que las soluciones (x,y) son sumas de un vector fijo (x_1,y_1) con vectores perpendiculares a (a,b), que forman un plano.



Lema. El área del paralelogramo determinado por los vectores (a,b) y (c,d) es ad-bc.

Dem. ad-bc = (a,b)·(d,-c) = |(a,b)| |(d,-c)|cos θ = |(a,b)| |(c,d)|cos θ =
= base x altura =Area



Vectores en R^3

Los vectores en R^3 están dados por tercias de números reales.

Si $U = (a_1, a_2, a_3)$ y $V = (b_1, b_2, b_3)$ entonces

$U + V = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$

$U \cdot V = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

La norma del vector U es $|U| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

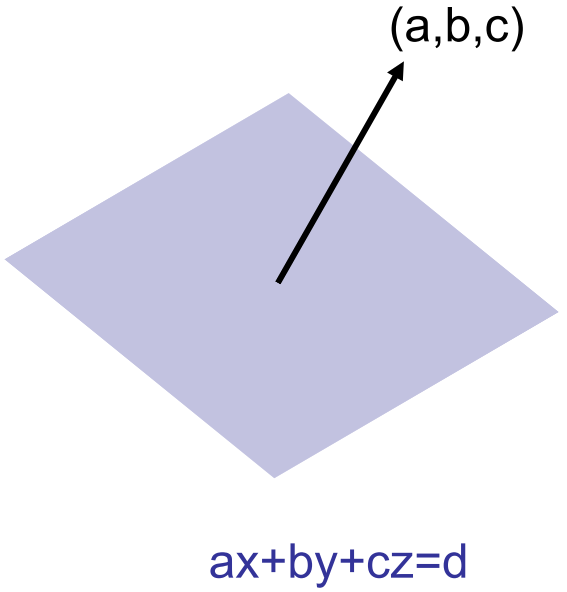
Igual que en R^2 se puede mostrar lo siguiente:

- $|U+V| \leq |U|+|V|$ (desigualdad del triángulo)
- $U \cdot U = |U|^2$ y $U \cdot V = 0$ si y solo si U y V son ortogonales.
- El ángulo entre los vectores U y V está dado por $\cos\theta = U \cdot V/|U||V|$.

Lema. En R^3 las ecuaciones $ax+by+cz = d$ determinan planos perpendiculares al vector (a,b,c).

Dem Veamos primero la ecuación $ax+by+cz = 0$. Esta se puede escribir como $(a,b,c)\cdot(x,y,z) = 0$. Los puntos (x,y,z) que satisfacen esta ecuación corresponden a vectores en el espacio que son perpendiculares al vector (a,b,c) y estos forman un plano.

Ahora consideremos la ecuación $ax+by+cz = d$. Si (x_1,y_1,z_1) es una solución, entonces para cualquier otra solución (x,y,z) se tiene $(a,b,c) \cdot (x_1-x, y_1-y, z_1-z) = 0$ por lo que las soluciones (x,y,z) se obtienen sumando a los vectores perpendiculares a (a,b,c) un vector fijo (x_1,y_1,z_1).



Un producto de vectores en R^3

Es natural preguntarse si existe una manera de multiplicar vectores en R^3 cuyo resultado sea independiente de las coordenadas elegidas (es decir, que si se rotan los vectores su producto rote de la misma forma) y que se comporte bien respecto a la suma: $(U+V)xW=UxW+VxW$.

Un producto así está determinado por sus valores en los vectores $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$ y $k = (0,0,1)$, ya que cada vector es combinación lineal de estos.

Un producto de vectores en R^3

Si definimos $i \times j = k$ entonces la invariancia bajo rotaciones determina que $j \times k = i$ y $k \times i = j$ y también que $j \times i = -k$ y $k \times j = -i$ y $i \times k = -j$. Además se puede mostrar que $i \times i = j \times j = k \times k = 0$.

Estas propiedades definen totalmente al producto:

Si $U = a_1 i + b_1 j + c_1 k$ y $V = a_2 i + b_2 j + c_2 k$

Entonces $U \times V = (b_1 c_2 - b_2 c_1) i - (a_1 c_2 - a_2 c_1) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$

Este producto puede pensarse como un determinante:

$$U \times V = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Un producto de vectores en R^3

Teorema. El *producto cruz* de vectores en R^3 dado por

$$U \times V = (b_1c_2-b_2c_1)i - (a_1c_2-a_2c_1)j + (a_1b_2-a_2b_1)k$$

tiene las siguientes propiedades:

1. Se distribuye bajo la suma.
2. U x V es ortogonal a U y V.
3. Es invariante bajo rotaciones.

Dem. Es inmediato de la definición que el producto se distribuye sobre la suma. Para probar que U x V es perpendicular a U y V basta ver que $(U \times V)\cdot U=(U \times V)\cdot V = 0$.

Que el producto es invariante bajo rotaciones se sigue de que su dirección y su norma lo son: el producto es ortogonal a ambos factores y se puede mostrar que su norma es $|U \times V| = |U|\,|V| \operatorname{sen}\varphi$ que es el área del paralelogramo formado por U y V.

Vectores en R^n

Los vectores en R^n están dados por n-adas de números reales. La suma y el producto interno de vectores en R^n se definen análogamente a como se hace en R^2 :

$$(a_1, a_2, a_3,\ldots, a_n) + (b_1, b_2, b_3,\ldots, b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3,\ldots, a_n+b_n)$$

$$(a_1, a_2, a_3,\ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, b_3,\ldots, b_n) = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n$$

Igual que en R^2 y R^3 en se puede mostrar lo siguiente:

- $|U+V| \leq |U|+|V|$
- $U\cdot U=|U|^2$ y $U\cdot V=0$ si y solo si U y V son ortogonales.
- El ángulo entre los vectores U y V en R^n está dado por $\cos\theta = U\cdot V/|U||V|$.

Vectores en R^n

Los vectores en R^n están dados por n-adas de números reales. La suma y el producto interno de vectores en R^n se definen análogamente a como se hace en R^2 :

Si $U = (a_1, a_2, a_3,\dots, a_n)$ y $V = (b_1, b_2, b_3,\dots, b_n)$ entonces

$U + V = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3,\dots, a_n+b_n)$

$U \cdot \underline{V = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}+\dots+a_nb_n$

$|U| = \sqrt{}a_1^2+a_2^2+a_3^2+\dots+a_n^2$

No es difícil mostrar:

- $|U+V| \leq |U|+|V|$
- $U\cdot U = |U|^2$ y $U\cdot V = 0$ si y solo si U y V son ortogonales.
- El ángulo entre los vectores U y V está dado por $\cos\theta = U\cdot V/|U||V|$.

Vectores en R^n

Los vectores $V_1,V_2,...,V_k$ en R^n son *linealmente independientes* si ninguno es combinación lineal de los otros.

Lema. Los vectores $V_1,V_2,...,V_k$ son linealmente independientes si y solo si para cada combinación lineal $a_1V_1+a_2V_2+...+a_kV_k$ que da el vector 0 los coeficientes $a_1,a_2,...,a_k$ son 0.

Dem. Si una combinación lineal da el vector 0 con algún coeficiente a_i distinto de 0, entonces podemos despejar al correspondiente V_i como combinación de los otros.

Recíprocamente, si un vector V_i es combinación de los otros, podemos expresar al vector 0 como V_i menos esa combinación de los otros.

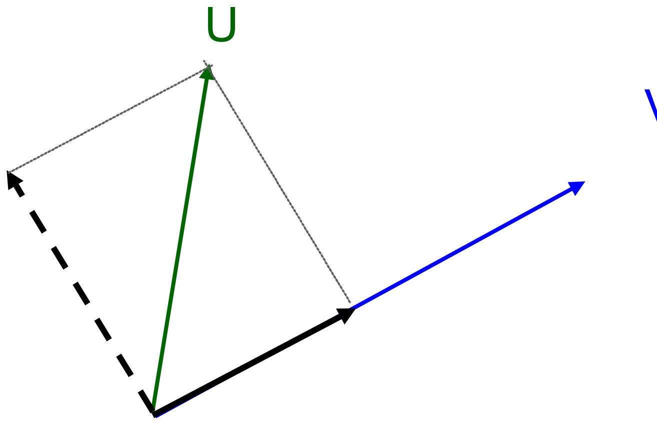
Subespacios de R^n

El *espacio generado por* k vectores $V_1, V_2, ..., V_k$ en R^n es el conjunto de todas sus combinaciones lineales : $\{a_1V_1+a_2V_2+...+a_kV_k\}$.

Queremos mostrar que el espacio generado por k vectores linealmente independientes en R^n tiene la misma forma que R^k (un espacio euclidiano de dimensión k). Para esto necesitamos el siguiente resultado:

Proyecciones

Lema. Si U y V son dos vectores en R^n, entonces U es la suma de un vector paralelo a V y uno perpendicular a V.



Lema. Si U y V son dos vectores en R^n, entonces U es la suma de un vector paralelo a V y uno perpendicular a V.

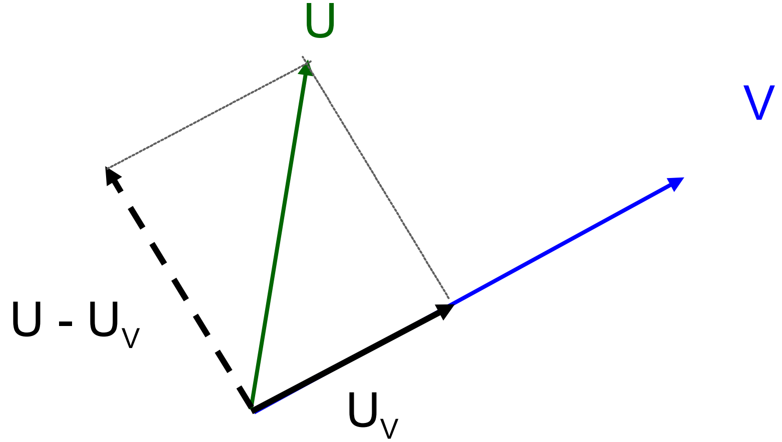
Dem. El vector $U_V = (U \cdot V / V \cdot V)V$ es paralelo a V.

El vector $U - U_V$ es perpendicular a V ya que

$(U-U_V) \cdot V = (U - (U \cdot V / V \cdot V)V) \cdot V =$

$= U \cdot V - (U \cdot V / V \cdot V) V \cdot V = U \cdot V - U \cdot V = 0$

Ahora podemos escribir $U = U_V + U - U_V$.



El vector U_V es la *proyección vectorial de* U *en la dirección de* V.

Teorema. k vectores linealmente independientes en R^n generan un espacio euclidiano de dimensión k.

Dem. El espacio generado por $V_1,V_2,\ldots,V_k$ es $E = \{ a_1V_1+a_2V_2+\ldots+a_kV_k \}$

Si los vectores son linealmente independientes, la función $\varphi : R^k \to E$ dada por $\varphi(a_1,a_2,\ldots,a_k) = a_1V_1+a_2V_2+\ldots+a_kV_k$ es biyectiva y manda rectas en rectas, lo que dice que E *se parece* a R^k. Pero para ver que E tiene exactamente la misma forma que R^k esto no basta: hay que dar una función $\lambda : R^k \to E$ que preserve distancias.

La función φ preserva distancias si y solo si los vectores $V_1,V_2,\ldots,V_k$ tienen norma 1 y son ortogonales. Si no lo son, debemos reemplazarlos por otros vectores con estas características que generen el mismo espacio.

Para esto usamos el lema anterior:

Sea $V°_1=V_1$.

Sea $V°_2$ igual a V_1 menos su proyección en la dirección de $V°_1$.

Sea $V°_3$ igual a V_3 menos sus proyecciones en las direcciones de $V°_1$ y de $V°_2$.

Sea $V°_i$ igual a V_i menos sus proyecciones en las direcciones de los $V°_j$´s anteriores.

Es fácil ver usando el producto punto que los vectores $V°_1,V°_2,\ldots,V°_k$ son ortogonales. Podemos hacerlos unitarios dividiéndolos entre su norma.

Subespacios de R^n

Corolario. El espacio generado por cualesquiera k vectores en R^n es un subespacio euclidiano de dimensión menor o igual a k.

Corolario. Cada conjunto de k puntos en R^n está contenido en un subespacio euclidiano de dimensión a lo mas k-1.

TAREA 13/14

1. ¿Cuántos puntos puedes hallar en R^n de modo que las distancias entre todos ellos sean iguales?

2. Parametriza y grafíca la trayectoria de Marte alrededor del Sol vista desde la Tierra.

3. Encuentra un vector que sea perpendicular a los vectores (1,2,3) y (4,5,6).

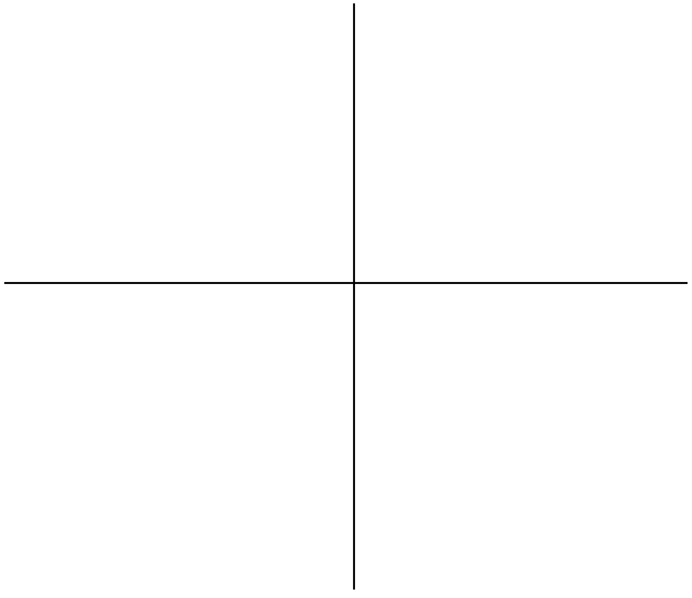
4. ¿Qué ángulo forman los planos $x+2y+3z=4$ y $5x+4y-3z=2$?

Clase 15

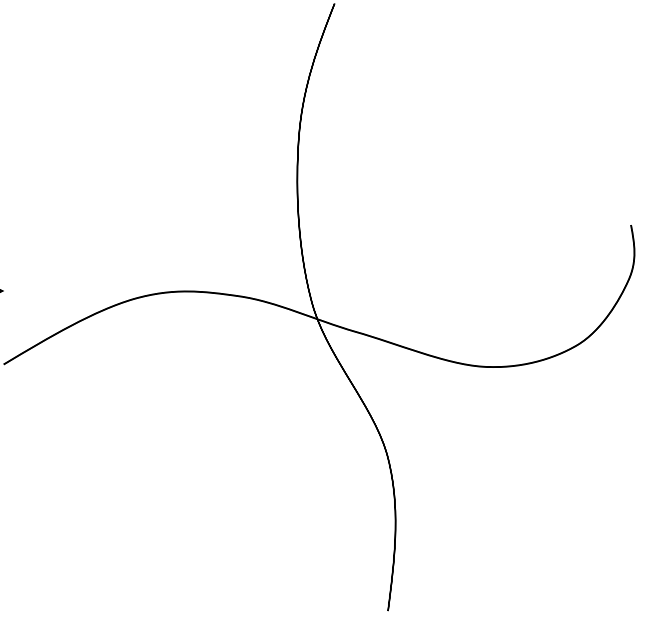
Transformaciones

Transformaciones

Una *transformación* de R^n es una función biyectiva $T: R^n \to R^n$ que es continua y tiene inversa continua.



$\xrightarrow{T}$



Transformaciones

Ejemplos en R^2 :

- Traslaciones, como $T(x,y) = (x+1,y+2)$
- Rotaciones, como $T(x,y) = (y,-x)$
- Reflexiones, como $T(x,y) = (y,x)$
- Homotecias, como $T(x,y) = (3x,3y)$
- Estiramientos, como $T(x,y) = (2x,3y)$
- Funciones como:
  - $T(x,y) = (x+2y,3x-4y+5)$ (manda rectas a rectas)
  - $T(x,y) = (x,y+x^2)$ (manda rectas verticales a rectas verticales y todas las demás rectas a parábolas)
  - $T(x,y) = (x^3,y^3)$ (manda a las rectas horizontales, a las verticales y las que pasan por el origen a rectas, las otras rectas no van a dar a rectas)

Transformaciones

Teorema. Las transformaciones de R^n forman un grupo.

Dem.

- La identidad es una transformación.
- La composición de funciones es asociativa, la composición de transformaciones es una transformación
- Cada transformación tiene una inversa que también es una transformación.

Transformaciones

Los siguientes son algunos *subgrupos* del grupo de transformaciones de R^n:

- Las transformaciones que preservan distancias
- Las transformaciones que preservan áreas.
- Las transformaciones que preservan ángulos.
- Las transformaciones que preservan rectas.

Transformaciones

Ejemplos en R^2:

- $T(x,y) = (2x,y/2)$ preserva áreas pero no preserva longitudes ni ángulos.
- $T(x,y) = (3x,3y)$ preserva ángulos pero no preserva longitudes ni áreas.
- $T(x,y) = (2x,y/3)$ preserva rectas pero no preserva longitudes ni áreas ni ángulos.
- $T(x,y) = (x,y+x^2)$ preserva áreas pero no preserva rectas, ni longitudes ni ángulos.

Tarea: Si una transformación del plano preserva rectas, ángulos y áreas entonces debe preservar longitudes.

La geometría según Klein

La geometría estudia las propiedades de un espacio que son invariantes bajo un grupo de transformaciones.

Isometrías

Las transformaciones que preservan las distancias entre puntos se llaman *isometrías*.

Ejemplo. Las rotaciones y las traslaciones son isometrías.

Teorema. Las isometrías de R^n mandan rectas en rectas.

Dem. Supongamos que existen puntos alineados P,Q,R en R^n cuyas imágenes bajo T TP,TQ,TR no están alineadas. Entonces Dist(P,R)=Dist(P,Q)+Dist(Q,R) y Dist(TP,TR)<Dist(TP,TQ)+Dist(TQ,TR). Así que T no puede preservar distancias (ya que entonces preservaría sus sumas)

Teorema. Si una transformación $T:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ manda rectas en rectas y fija el origen entonces preserva la suma de vectores y su producto por escalares.

Dem.

1. Una transformación T del plano que manda rectas en rectas debe mandar paralelas en paralelas: Si L y M son rectas y sus imágenes TL y TM se intersectan entonces como T es biyectiva el punto de intersección debe venir de un punto de intersección de L y M.

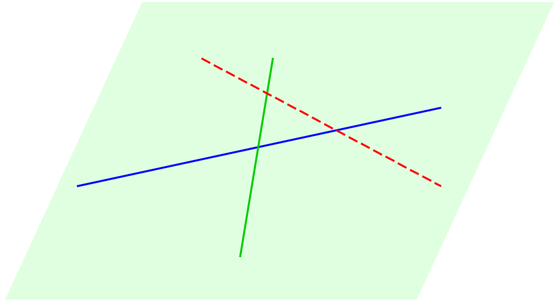
2. Si T preserva rectas y manda 0 al 0 entonces T debe enviar el paralelogramo determinado por U y V al paralelogramo determinado por T(U) y T(V), por lo tanto preserva la suma de vectores:

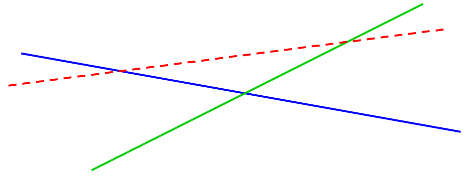
3. Si T preserva rectas y manda 0 al 0 entonces T preserva puntos medios y por lo tanto T(rU)=rT(U) para cada escalar racional r. Por continuidad, T(rU)=rT(U) para cada r real.

Teorema. Si una transformación $T:R^n \rightarrow R^n$ manda rectas en rectas y fija el origen entonces preserva la suma de vectores y su producto por escalares.

Dem. Para mostrar que T preserva la suma de vectores y el producto por escalares basta ver que T manda rectas paralelas en rectas paralelas.

- Primero veamos que T manda planos en planos. Sea P un plano y L y M dos rectas no paralelas en P. Entonces T(L) y T(M) se intersectan y por lo tanto determinan un plano. Cada punto p en P está en una recta que va de un punto de L a uno de M, por lo tanto T(p) está en la recta que une a un punto de T(L) y uno de T(M), así que T(p) está en el plano determinado por las rectas T(L) y T(M).





- Ahora tomemos dos rectas paralelas en R^n y sea P el plano que las contiene. Por el inciso 1 T(P) es un plano y por la prueba cuando n=2, T(L) y T(M) son rectas paralelas en T(P), por lo tanto son paralelas en R^n

Transformaciones Lineales

Las transformaciones que preservan la suma de vectores y su producto por escalares se llaman *lineales*.

$T: R^n \rightarrow R^n$ es lineal si para cada par de vectores U y V:

- $T(U+V) = T(U)+T(V)$
- $T(\lambda U) = \lambda T(U)$

Las transformaciones lineales de R^n forman un grupo.

Dem. Basta ver que la identidad es una transformación lineal, que la composición de transformaciones lineales es una transformación lineal y que la inversa de una transformación lineal también es lineal.

Teorema. Una transformación de R^n es lineal si y solo si manda rectas en rectas y fija el origen.

Dem.

$\rightarrow$ Una recta es un conjunto de la forma {tU+V / t real} para dos vectores fijos U y V. La imagen de este conjunto bajo una transformación lineal T es el conjunto {T(tU+V) / t real} = {tT(U)+T(V) / t real}, que es otra recta.

$\leftarrow$ Ya mostramos antes que las transformaciones que preservan rectas y fijan el origen deben preservar la suma de vectores y su producto por escalares

Corolario. Una transformación de R^n manda rectas en rectas si y solo si es la composición de una transformación lineal con una traslación.

Dem. Una recta es un conjunto de la forma X={tU+V / t real} para dos vectores fijos U y V. La imagen de este conjunto bajo una transformación lineal T es el conjunto T(X)={tT(U)+T(V) / t real}, que es otra recta. Y ya mostramos antes que las transformaciones que preservan rectas y fijan el origen deben preservar la suma de vectores y su producto por escalares.

Un conjunto de vectores $U_1, U_2, \ldots, U_n$ *generan* a R^n si cada vector V en R^n se puede escribir como combinación lineal de los V_i.

Teorema. Cada transformación lineal de R^n está determinada por sus valores en n vectores $U_1, U_2, \ldots, U_n$ que generen a R^n. Para cualesquiera n vectores $V_1, V_2, \ldots, V_n$ que generen a R^n existe una transformación lineal de R^n que envía a cada U_i a V_i.

Dem.

$\rightarrow$ Si $W = a_1U_1 + a_2U_2 + \ldots + a_nU_n$ y T es lineal entonces $T(W) = a_1T(U_1) + a_2T(U_2) + \ldots + a_nT(U_n)$ por lo que T está determinada por sus valores en $U_1, U_2, \ldots, U_n$.

$\leftarrow$ La transformación definida como $T(a_1U_1 + a_2U_2 + \ldots + a_nU_n) = a_1V_1 + a_2V_2 + \ldots + a_nV_n$ preserva la suma de vectores y su producto por escalares.

Matrices

Teorema. Cada transformación lineal T de R^n está representada por una matríz M de nxn, cuyas columnas son las imágenes de los vectores $e_i=(0,0,0,\ldots0,1,0,\ldots,0)$. El valor de la función en el punto $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ está dado por el producto de MX.

Ejemplo: La transformación T(x,y,z)=(x+2y+3z,4x-5y+6z,7x+8y) está representada por la matríz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

Teorema. La transformación lineal T de R^n representada por la matríz M es una isometría si y solo si M es *ortonormal* (sus columnas son vectores ortogonales y de tamaño 1).

Dem.

$\longrightarrow$ Las columnas de M son las imágenes bajo T de los vectores básicos $e_1, e_2, \ldots, e_n$, así que si T es una isometría las columnas deben tener el mismo tamaño que los e_i´s. Y como los e_i´s son ortogonales las columnas también deben ser ortogonales ya que si no los vectores $e_i - e_j$ no tendrían el mismo tamaño que sus imágenes.

$\longleftarrow$ Si los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son ortogonales y de tamaño 1 entonces (por el Teo. de Pitágoras) el vector $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$ tiene norma $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$, que es la norma del vector $a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n$. Así que si $T(e_i) = v_i$, la transformación T preserva la norma de los vectores.

Determinantes

Teorema.

1. El determinante de una matriz de 2x2 mide el área del paralelogramo determinado por los 2 vectores columna.
2. El determinante de una matriz de 3x3 mide el volumen del paralelepípedo determinado por los 3 vectores columna.
3. El determinante de una matriz de nxn mide el "hipervolumen" del paralelotopo determinado por los n vectores columna.

TAREA 15

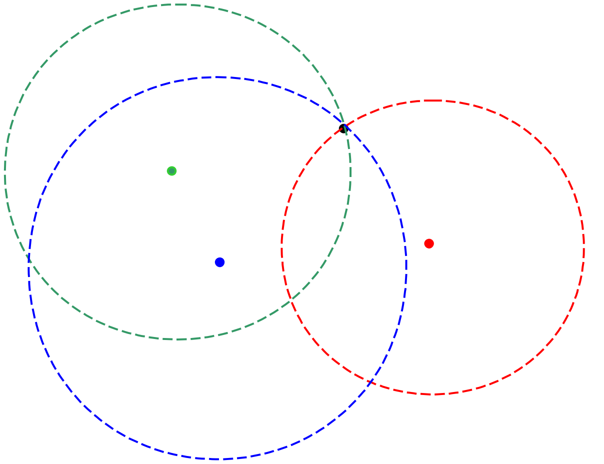
1. Si una transformación lineal de R^2 preserva ángulos y áreas entonces preserva longitudes.

2. ¿Puedes hallar una transformación lineal de R^3 que preserve áreas y no preserve longitudes?

Clase 16

Isometrías

Lema. La posición de un punto en el plano euclidiano está determinada por sus distancias a 3 puntos no coplanares.

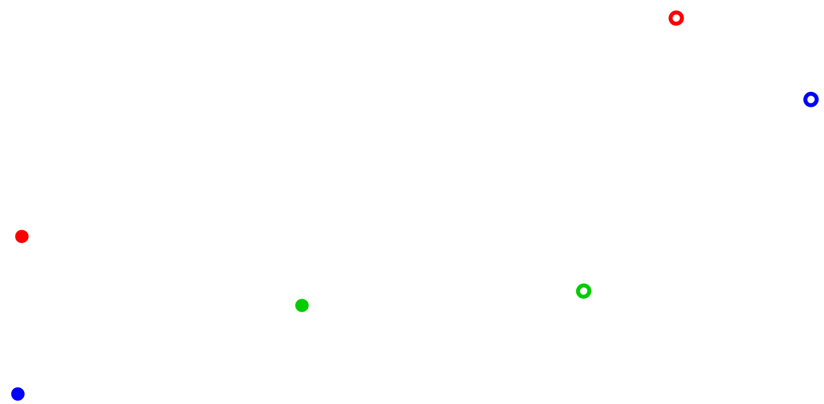


Corolario. Cada isometría del plano está determinada por la imagen de 3 puntos no colineales.

Dem. Sea T es una isometría y a,b,c tres puntos no colineales. Entonces para cada punto p del plano, T(p) es el punto del plano cuyas distancias a T(a), T(b) y T(c) son iguales a las distancias de p a a, b y c.

Isometrías del plano

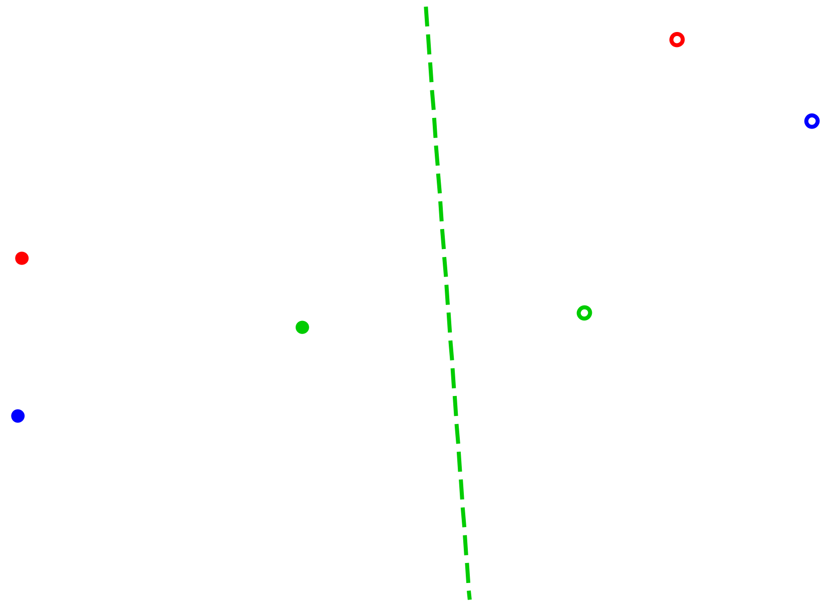
Teorema. Cada isometría del plano es composición de a lo mas 3 reflexiones.



Dem. Como cada isometría del plano está determinada por las imágenes de 3puntos, necesitamos ver que 3 reflexiones bastan para llevar un triángulo a cualquier posición.

Isometrías del plano

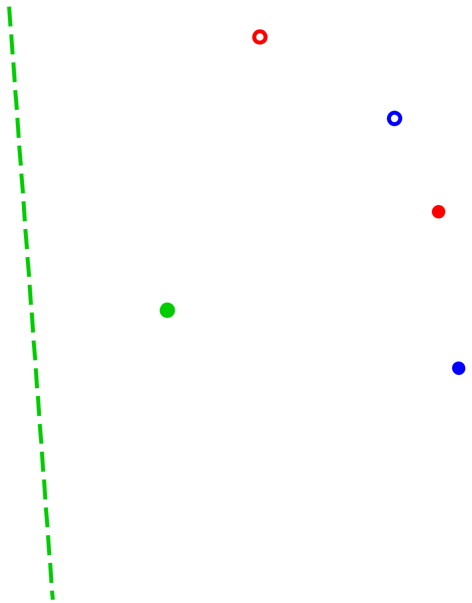
Teorema. Cada isometría del plano es composición de a lo mas 3 reflexiones.



Dem.(cont) Con una reflexión podemos acomodar el vértice verde.

Isometrías del plano

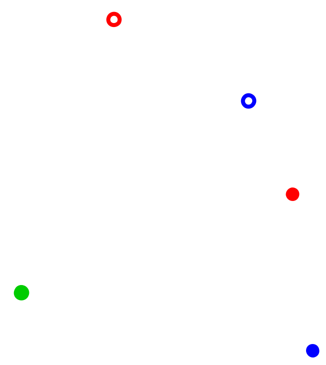
Teorema. Cada isometría del plano es composición de a lo mas 3 reflexiones.



Dem.(cont) Con una reflexión podemos acomodar el vértice verde.

Isometrías del plano

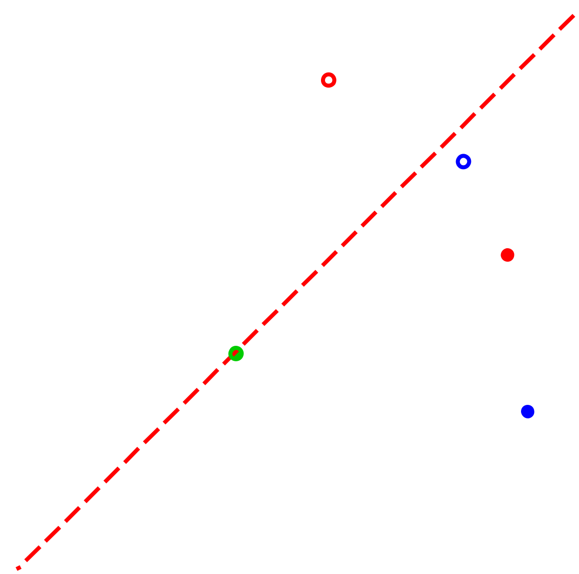
Teorema. Cada isometría del plano es composición de a lo mas 3 reflexiones.



Dem.(cont) El vertice verde ya está en su lugar.

Isometrías del plano

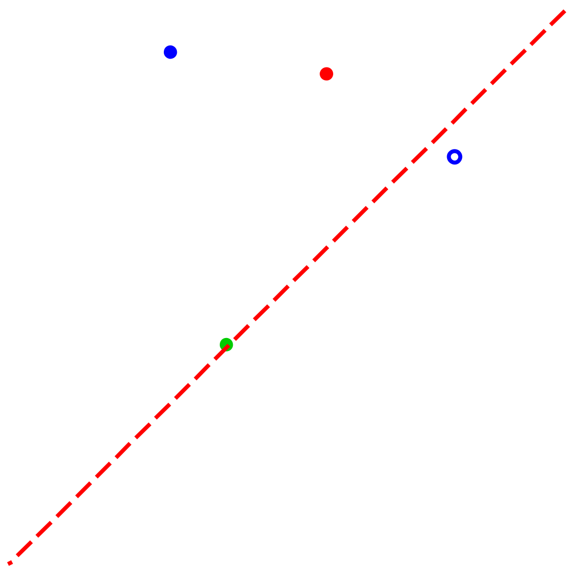
Teorema. Cada isometría del plano es composición de a lo mas 3 reflexiones.



Dem.(cont) Ahora con una reflexión podemos acomodar el vértice rojo. Como el vértice verde está a la misma distancia de los dos rojos, esta reflexión no mueve al verde.

Isometrías del plano

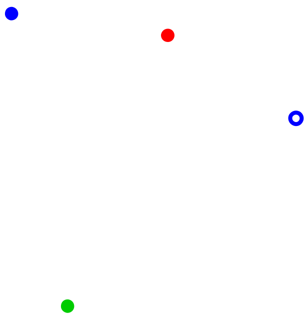
Teorema. Cada isometría del plano es composición de a lo mas 3 reflexiones.



Dem.(cont) Ahora con una reflexión podemos acomodar el vértice rojo. Como el vértice verde está a la misma distancia de los dos rojos, esta reflexión no mueve al verde.

Isometrías del plano

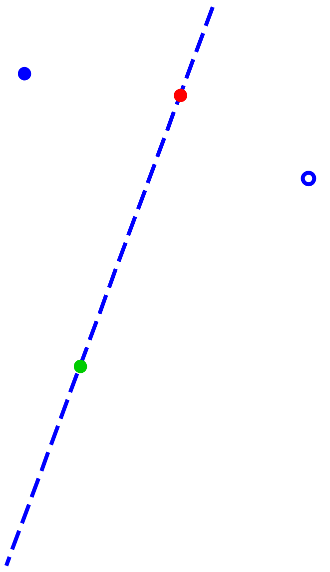
Teorema. Cada isometría del plano es composición de a lo mas 3 reflexiones.



Dem.(cont) Ahora los vértices verde y rojo están en su lugar..

Isometrías del plano

Teorema. Cada isometría del plano es composición de a lo mas 3 reflexiones.



Dem.(cont) Finalmente con una reflexión podemos acomodar el vértice azul. Como el vértice verde y el rojo están a las mismas distancias de los dos azules, esta reflexión no mueve al verde ni al rojo.

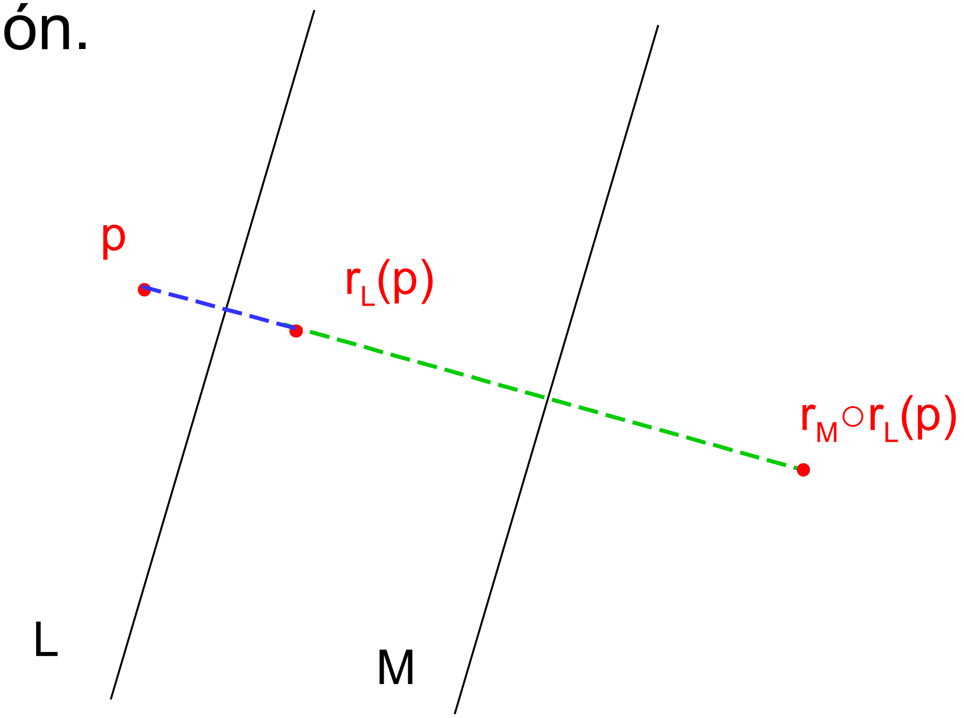
Isometrías del plano

Teorema. Cada isometría del plano es composición de a lo mas 3 reflexiones.

Dem.(conclusión) Ahora todos los vértices están en su lugar. ■

Isometrías del plano

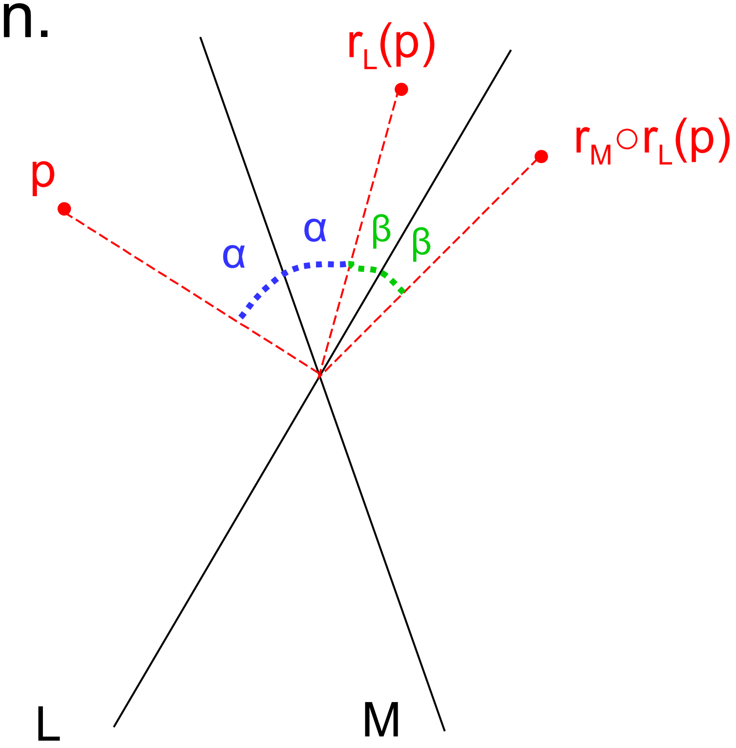
Teorema. La composición de 2 reflexiones es una rotación o una traslación.



Si L y M no se intersectan, el resultado de reflejar en L y después en M es una traslación por el doble de la distancia entre L y M.

Isometrías del plano

Teorema. La composición de 2 reflexiones es una rotación o una traslación.



Si L y M se intersectan, el resultado de reflejar en L y después en M es una rotación por el doble del ángulo entre L y M. ■

Isometrías del plano

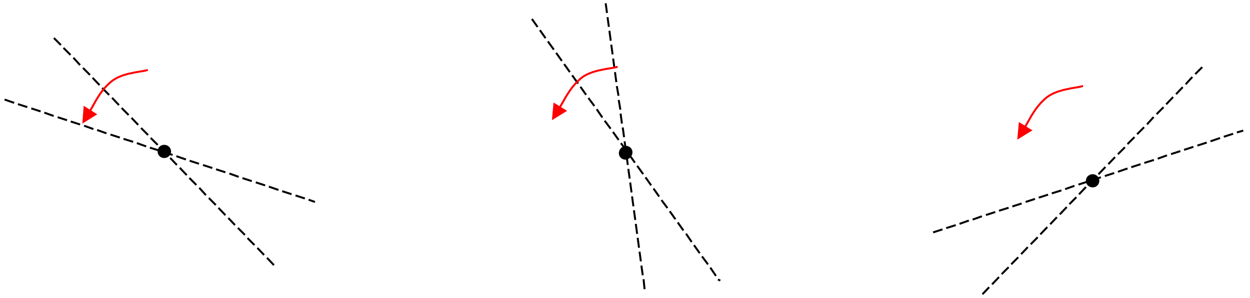
Es claro que la composición de traslaciones es una traslación y que la composición de rotaciones con el mismo centro es una rotación.

Ahora queremos ver como es la composición de dos rotaciones con distinto centro, y como es la composición de una rotación con una traslación, para esto usaremos el resultado anterior acerca de la composición de reflexiones.

Isometrías del plano

Teorema. La composición de rotaciones es una rotación o una traslación.

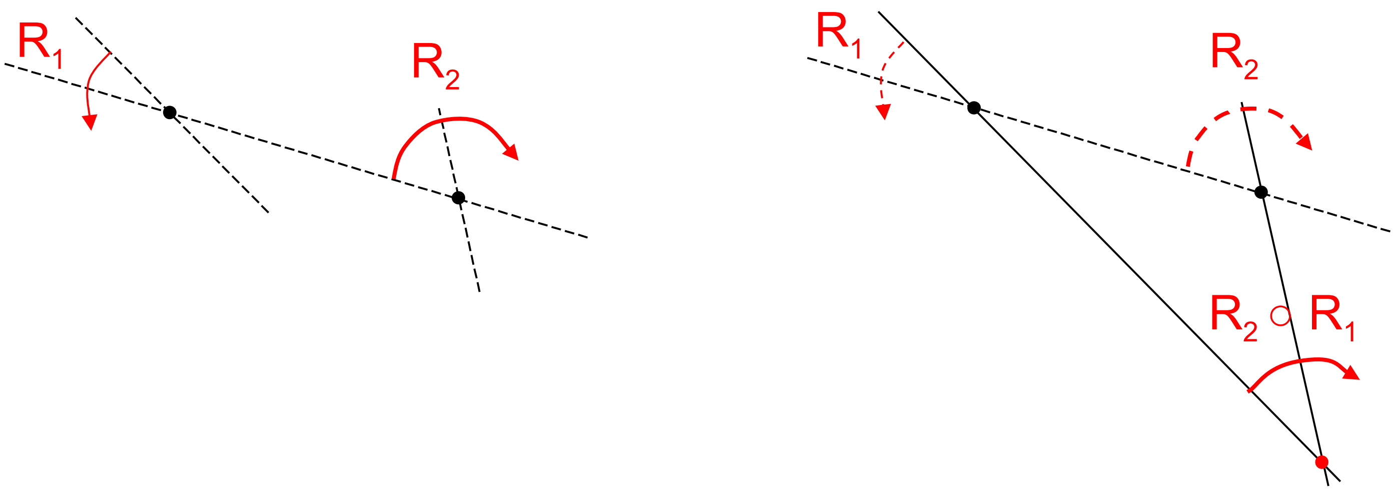
Dem. Una rotación con centro en un punto p y ángulo θ es la composición de dos reflexiones en *cualesquiera* dos rectas que pasen por p formando un ángulo θ/2:



Misma rotación

Teorema. La composición de rotaciones es una rotación o una traslación.

Dem. Si R_1 y R_2 son dos rotaciones con distintos centros p_1 y p_2, podemos expresar a R_1 como composición de reflexiones en dos rectas r_1 y r_2 de modo que r_2 pase por p_2, y podemos expresar a R_2 como composición de reflexiones en dos rectas r_3 y r_4 de modo que r_3 pase por p_1, es decir $r_3 = r_2$.



Entonces $R_2 \circ R_1 = (r_4 \circ r_3) \circ (r_2 \circ r_1) = r_4 \circ (r_3 \circ r_2) \circ r_1 = r_4 \circ r_1$ (ya que $r_3 \circ r_2 = id$).

Así que la composición de 2 rotaciones es igual a la composición de 2 reflexiones.■

Corolario. Cada isometría del plano que preserva orientación es una traslación o una rotación. Cada isometría del plano que invierte orientación es una reflexión o una reflexión con deslizamiento.

Dem. Sabemos que toda isometría es composición de a lo mas 3 reflexiones. Las isometrías que preservan la orientación son las composiciones de un número par de reflexiones y las isometrías que invierten la orientación son composición de un número impar. Como ya probamos que las composición de 2 reflexiones es una rotación o una traslación, falta ver que la composición de 3 reflexiones es una reflexión o una reflexión con deslizamiento

Isometrías del espacio

Lema. La posición de un punto en el espacio está determinada por sus distancias a 4 puntos no coplanares.

Corolario. Cada isometría del espacio está determinada por la imagen de 4 puntos no coplanares.

Teorema. Cada isometría del espacio es composición de a lo mas 4 reflexiones en planos.

Isometrías de R^n

Diremos que los puntos $p_1,p_2,...,p_k$ en R^n, están en *posición general* si ningún subconjunto de m puntos está en un subespacio de dimensión menor a m -1 (no debe haber 3 puntos en una línea, ni 4 puntos en un plano, ni 5 en un espacio de dimensión 3, etc.)

Lema. La posición de un punto en R^n está determinada por sus distancias a n+1 puntos en posición general.

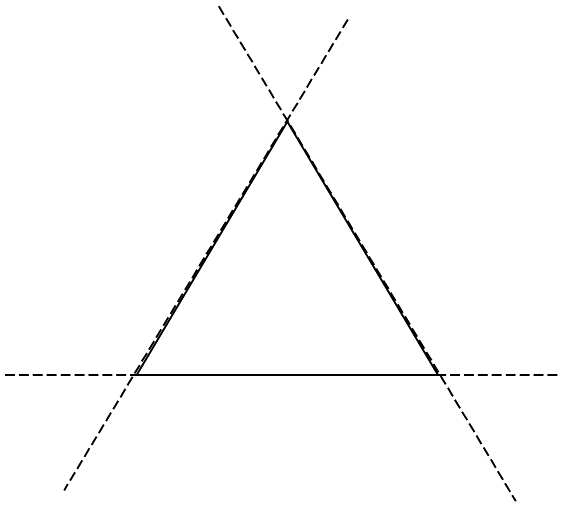
Corolario. Cada isometría de R^n está determinada por la imagen de n+1 puntos en posición general.

Teorema. Cada isometría de R^n es la composición de a lo mas n+1 reflexiones en hiperplanos.

TAREA 16

1. Muestra que la composición de una rotación con una traslación es una rotación.

2. ¿Cómo es la composición de las 3 reflexiones en los lados de un triángulo equilátero?

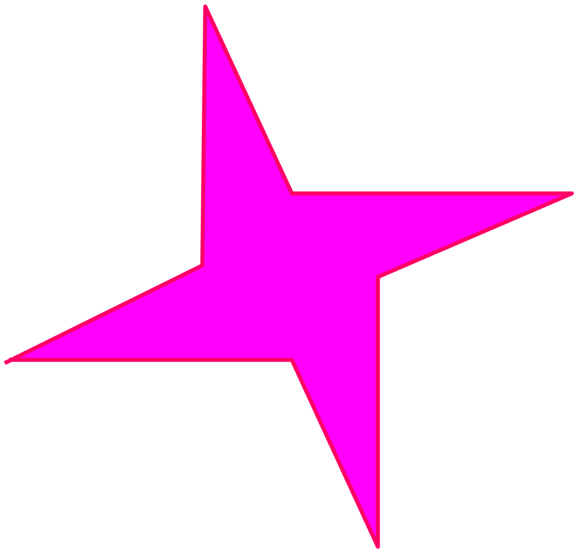


Clase 17

Simetría

Isometrías y simetrías

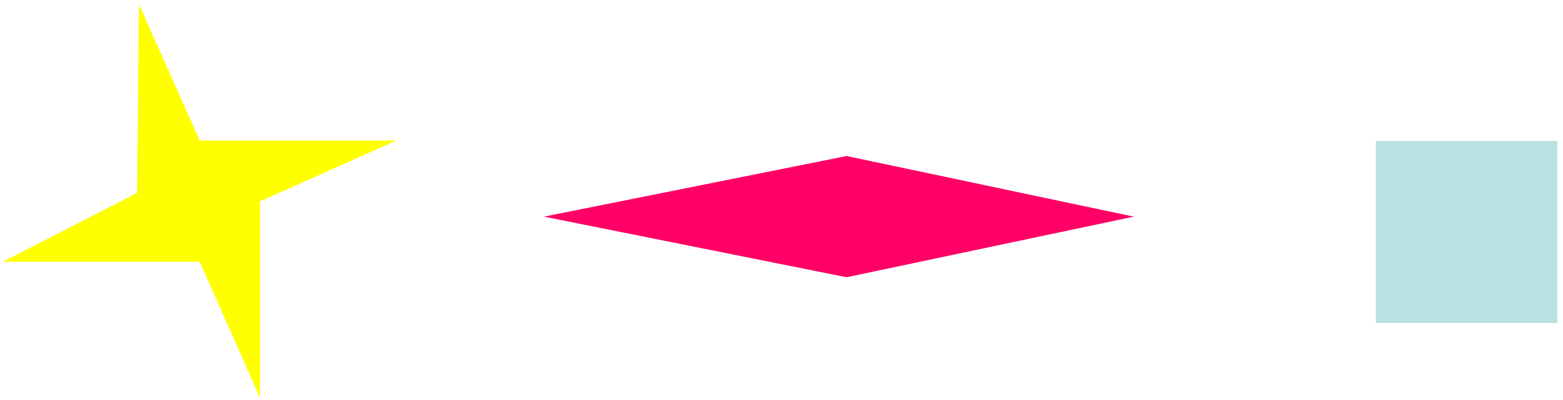
Las *simetrías* de una figura en el plano son las isometrías del plano que dejan a la figura invariante.



Las simetrías de una figura forman un grupo.

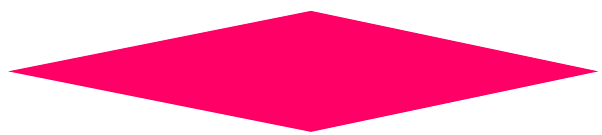
(originalmente grupo significaba grupo de simetrías)

¿Cómo son los grupos de simetría de las figuras planas?



¿Cómo son los grupos de simetría de las figuras planas?

Z_4

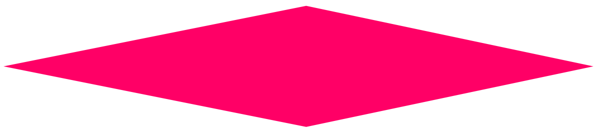


$Z_2 \times Z_2$

$Z_4 \rtimes Z_2$

¿Cómo son los grupos de simetría de las figuras planas?

Z_4

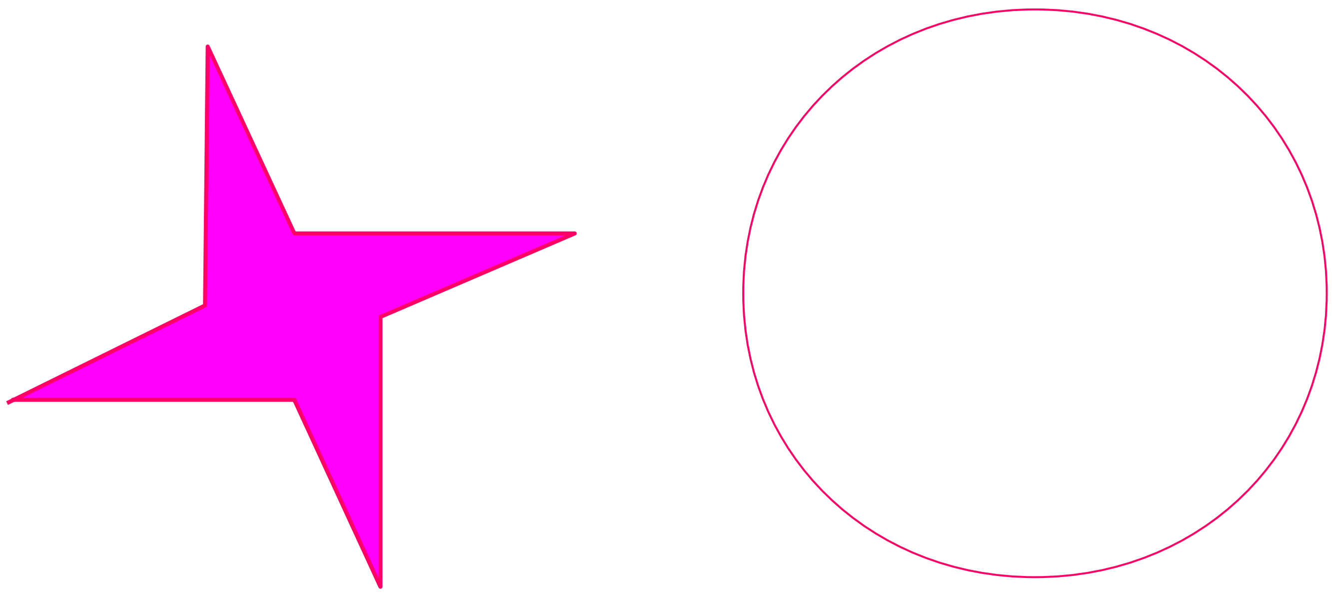


$Z_2 \times Z_2$

$Z_4 \rtimes Z_2$

¿Habrá una figura en el plano cuyo grupo de simetrías sea $Z_2 \times Z_4$ *o* $Z_3 \times Z_3$ *?*

Las simetrías de una figura fijan su centro de gravedad.



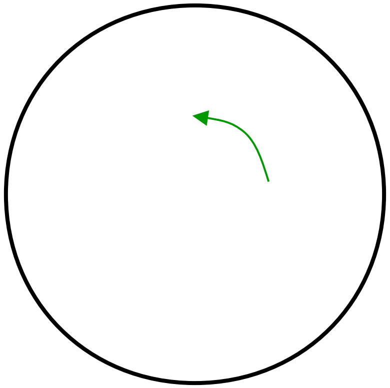
El grupo de simetrías de cualquier figura plana es un subgrupo del grupo de simetrías del plano que fijan el origen, y estas son las simetrías del círculo.

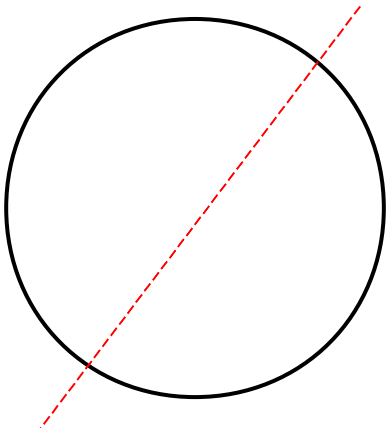
¿Como es el grupo de simetrías del círculo?

Es el grupo O(3) de matrices ortonormales de 2x2.

El grupo consiste de

- Rotaciones
- reflexiones.





Podemos identificar cada rotación con un ángulo θ y a cada reflexión con un par de ángulos $\{\theta,\theta+\pi\}$.

Así que las rotaciones forman un círculo y las reflexiones forman otro círculo mas pequeño. En total se ven como $S^1 \times S^0$.

Simetrías de figuras planas

Corolario. Los grupos de simetrías de las figuras planas son isomorfos a Z_2, Z_n o $Z_n \rtimes Z_2$.

Dem.

- Si el grupo no tiene reflexiones entonces consiste de rotaciones que son múltiplos de la rotación mas pequeña, así que es Z^n.

- Si el grupo tiene reflexiones entonces el subgrupo formado por las rotaciones es Z^n y el grupo total está generado por la rotación mas pequeña y por una reflexión, así que es $Z_n \rtimes Z_2$.

¿Como es el grupo de simetrías del plano?

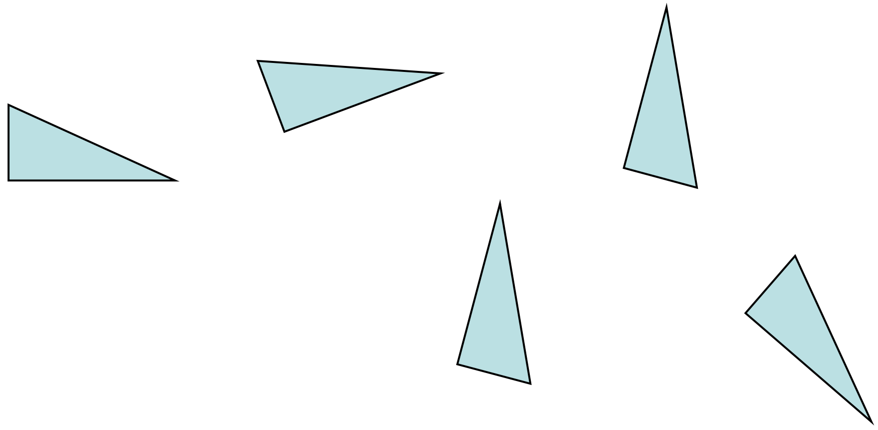
El grupo consiste de

- Traslaciones
- Rotaciones
- Reflexiones
- Reflexiones con deslizamiento

¿Qué forma tendrá el conjunto de todas las simetrías?

¿Como se ve el grupo de simetrías del plano?

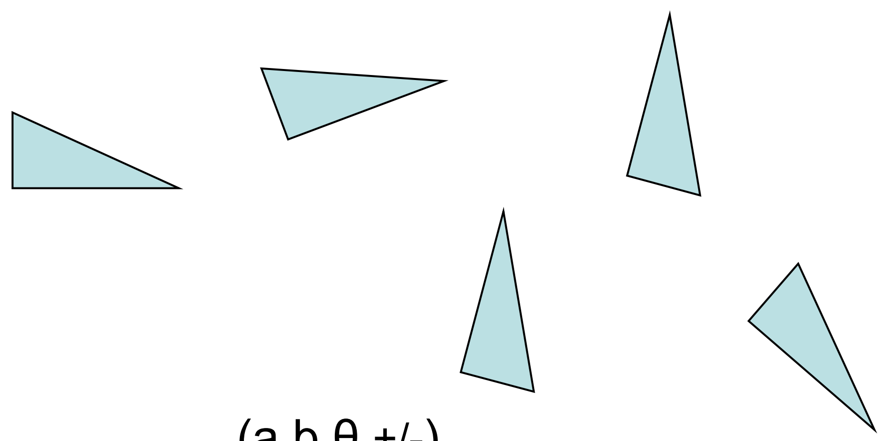
Podemos identificar al conjunto de isometrías del plano con el *espacio de posiciones* de una figura asimétrica.



La posición de una figura en el plano está determinada por un punto, una dirección y un signo (+ o -)

¿Como se ve el grupo de simetrías del plano?

Podemos identificar al conjunto de isometrías del plano con el *espacio de posiciones* de una figura asimétrica.

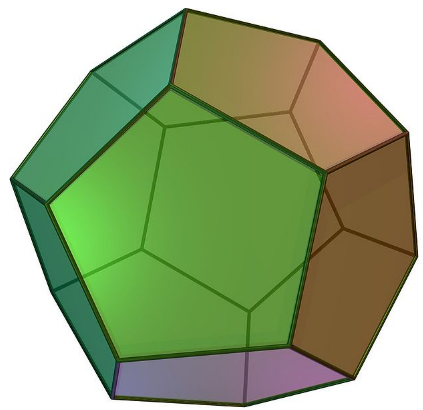


$(a,b,\theta,+/-)$

El conjunto de isometrías del plano tiene 3 dimensiones, y puede verse como $R^2 \times S^1 \times S^0$.

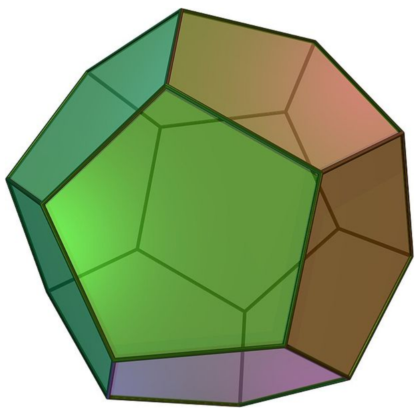
Simetrías en el espacio

Las *simetrías* de una figura en el espacio son las isometrías del espacio que dejan a la figura invariante.



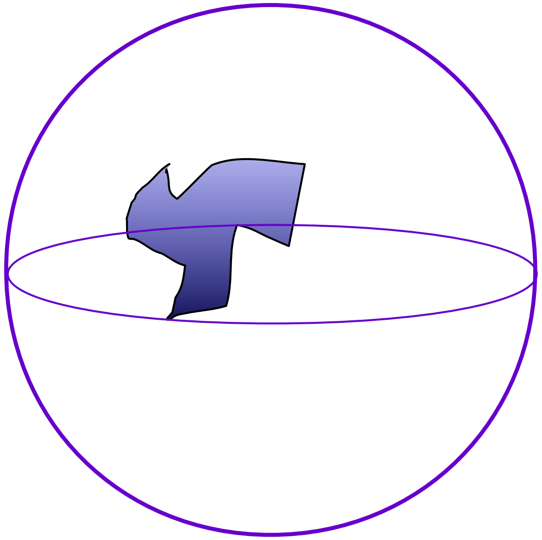
Las simetrías de una figura forman un grupo.

Simetrías en el espacio



Como las simetrías de la figura en el espacio fijan su centro de gravedad, su grupo de simetrías es un subgrupo del grupo de simetrías de la esfera, O(3).

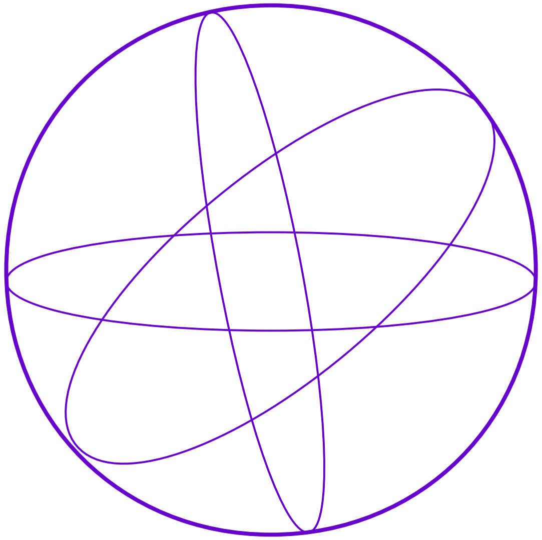
¿Como son las simetrías de figuras en la esfera?



Las simetrías de figuras “pequeñas” dejan su centro de gravedad invariante, por lo tanto (como en el caso del plano) su grupo de simetrías es un subgrupo del grupo de simetrías del círculo.

¿Como es el grupo de simetrías de la esfera?

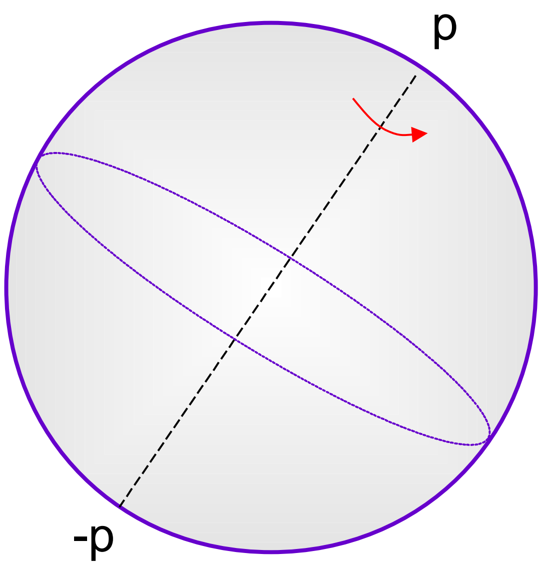
Algebráicamente, es el grupo de matrices ortonormales O(3).



Las isometrías de la esfera son composición de a lo mas 3 reflexiones.

Las isometrías que preservan orientación son rotaciones (así que dejan dos puntos fijos).

¿Como es el grupo de simetrías de la esfera?



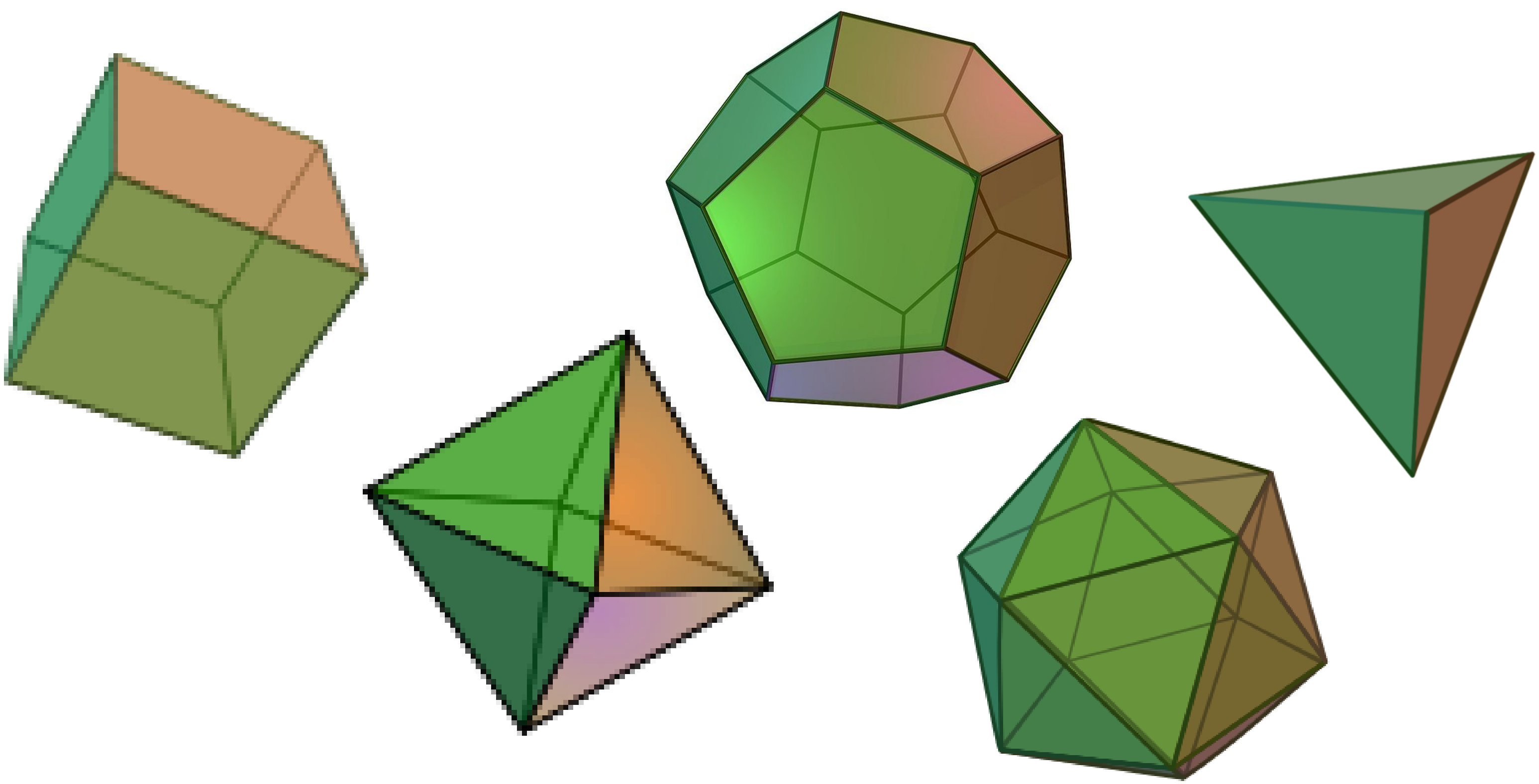
Podemos identificar cada rotación de la esfera con un par de puntos antípódas (p,-p) y un ángulo θ.

Al identificar los puntos antípodas de la esfera obtenemos una superficie llamada el *plano proyectivo* y denotada por P^2.

Así que parecería que el grupo $O^+(3)$ de rotaciones tiene la forma de P^2 x S^1, pero en realidad no es así.

Simetrías de figuras en el espacio.

Teorema. Los grupos de simetrías de figuras en R^3 son isomorfos a Z_n, $Z_n \times Z_2$ o al grupo de simetrías de uno de los 5 sólidos platónicos.



Simetrías en R^n

Las *simetrías* de una figura en R^n son las isometrías de R^n que dejan a la figura invariante.

- Las simetrías de una figura forman un grupo.
- Como las simetrías de una figura en R^n fijan su centro de gravedad, su grupo de simetrías es un subgrupo de $O(n)$ (las simetrías de la esfera en R^n).

Grupos de simetrías en R^n

¿Cuáles grupos pueden ser grupos de simetrías de una figura en R^n?

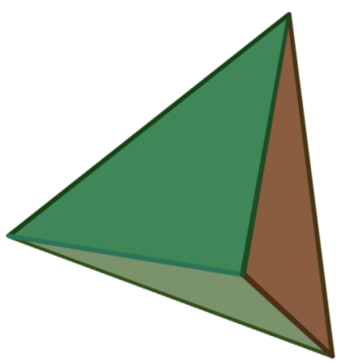
Teorema. Cada grupo finito es isomorfo al grupo de isometrías de una figura en algún R^n.

Grupos de simetrías en R^n

Teorema. Cada grupo finito es isomorfo al grupo de isometrías de una figura en algún R^n.

Dem. Si el grupo G tiene n elementos, podemos construir una figura en R^{n-1} cuyo grupo de simetrías sea isomorfo a G como sigue:

Sea Δ un simplejo regular con n vértices. El grupo de simetrías de Δ es el grupo de permutaciones de sus vértices (cualquier simetría permuta los vértices y cualquier permutación de los vértices puede lograrse con una simetría).

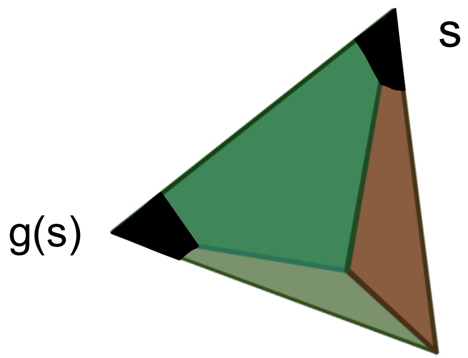


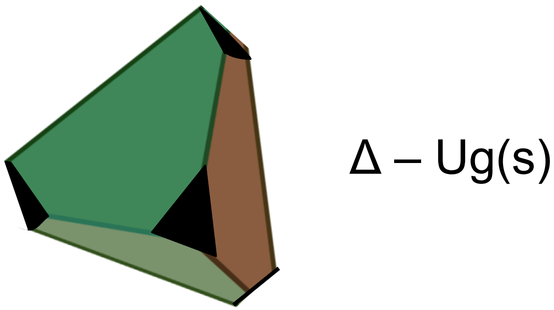
Grupos de simetrías en R^n

Teorema. Cada grupo finito es isomorfo al grupo de isometrías de una figura en algún R^n.

Dem. (cont.) Ahora queremos recortarle a Δ las esquinas para hacerlo menos simétrico, dejando sólo las simetrías correspondientes al subgrupo isomorfo a G.

Para esto, tomamos en una esquina de Δ un simplejito s cuyas aristas tengan todas distintas longitudes, y para cada elemento g de G (representado por una simetría de Δ) tomamos el simplejito g(s) en la esquina correspondiente de Δ. La figura se obtiene quitándole a Δ la unión de todos los g(s).





TAREA 17

1. Si dos simetrías de R^n conmutan entonces dejan los mismos puntos fijos.

2. ¿Que dimensión tiene el conjunto de isometrías del espacio R^3?