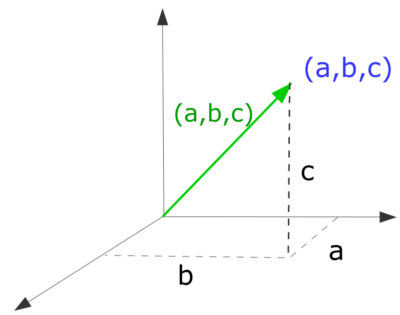
Vectores en el espacio

Un **vector** es una flecha o segmento dirigido. Dos vectores son iguales si tienen la misma dirección y el mismo tamaño, sin importar donde empiecen (pueden moverse libremente).

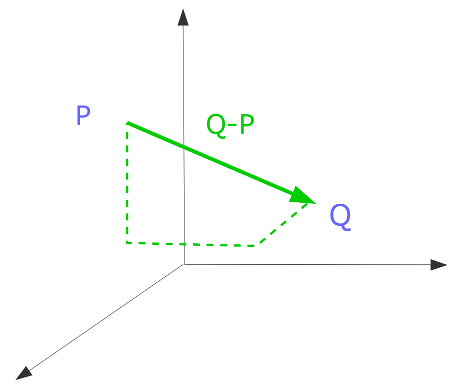
Si usamos coordenadas, al vector que va de (0,0,0) al punto (a,b,c) se denota también por (a,b,c).

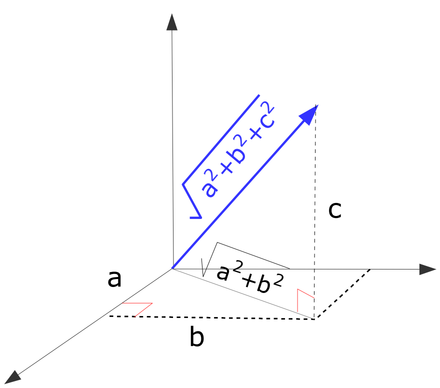


Si pensamos en un vector como un desplazamiento, sus coordenadas indican los desplazamientos en las direcciones de los ejes que dan el vector.

El vector que va del punto $P=(x_1,y_1,z_1)$ al punto $Q=(x_2,y_2,z_2)$ es la diferencia entre los vectores Q y P, es decir

$$Q-P=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

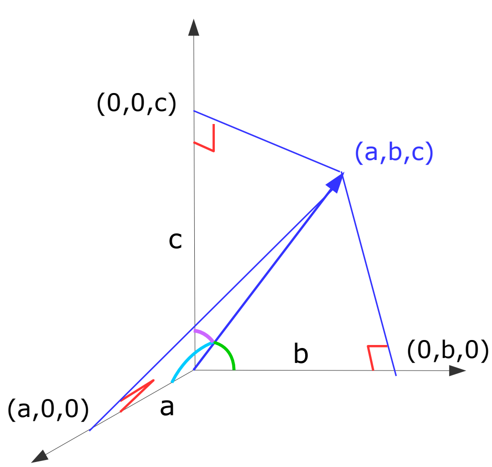




Al tamaño de un vector V se le llama la **norma** de V y se le denota por |V|.
La norma puede obtenerse de las coordenadas:
por el Teorema de Pitagoras, si V = (a,b,c) entonces

$$|V| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

A los vectores de norma 1 se les llama **unitarios**.



La dirección de un vector también puede obtenerse de sus coordenadas:
Como los ángulos rojos son rectos, los ángulos que el vector V= (a,b,c) forma con los ejes están dados por

$$\cos \alpha = {}^{a}/_{|V|}$$

$$\cos \beta = {}^{b}/_{|V|}$$

$$\cos \gamma = {}^{c}/_{|V|}$$

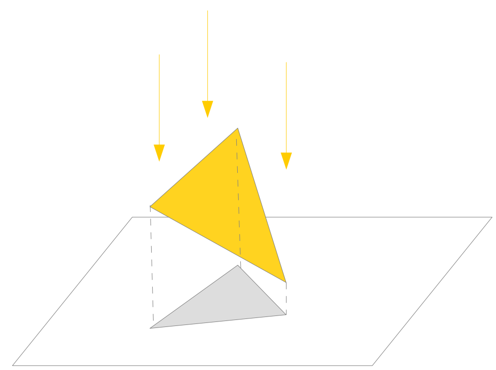
Ejemplos.

- El vector $V=(1,2,-2)$ tiene norma $|V| = \sqrt{1^2+2^2+(-2)^2} = 3$
- Un vector unitario en la dirección de V es $^{1}/_{|V|}V = {}^{1}/_{3}\,(1,2,-2) = (1/3,2/3,-2/3)$
- Los ángulos que el vector $V=(1,2,-2)$ forma con los ejes están dados por

  $\cos\alpha = {}^{1}/_{3}$ $\cos\beta = {}^{2}/_{3}$ $\cos\gamma = {}^{-2}/_{3}$

Problemas

1. Dibuja el triángulo con vértices (3,2,1) (2,0,3) y (-2,1,2). Calcula la longitud de sus lados y muestra que es un triángulo rectángulo.



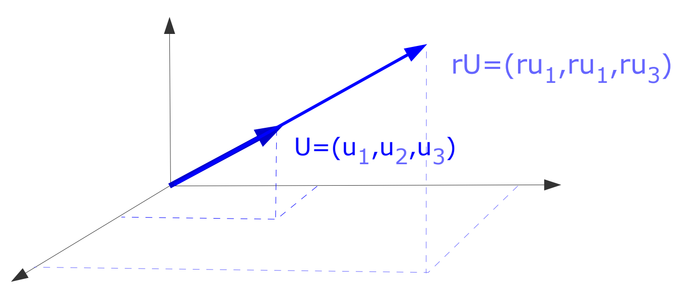
2. Considera un triángulo Δ en el espacio y la sombra Δ' que proyecta en el piso al iluminarse verticalmente.

a. Demuestra analíticamente que los lados de Δ' no pueden ser mas grandes que los lados de Δ.

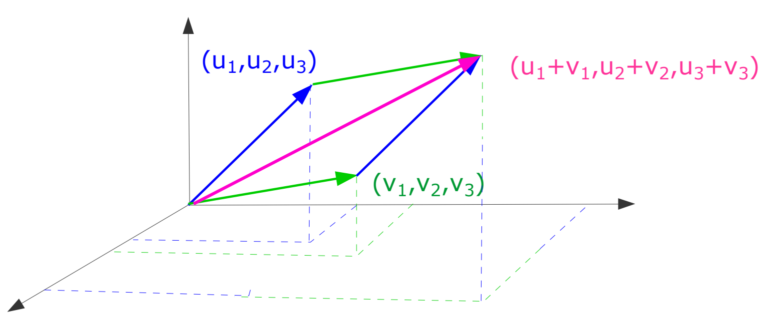
b. ¿Hay alguna relación entre los ángulos de Δ' y los de Δ?

Sumas, múltiplos y combinaciones lineales de vectores.

Los vectores en el espacio puede escalarse (alargándolos o encogiéndolos) y pueden sumarse tomando la diagonal del paralelogramo determinado por dos de ellos.



Los escalamientos de un vector U se obtienen multiplicando sus coordenadas por un número real:
Si $U=(u_1,u_2,u_3)$ entonces $rU = (ru_1,ru_2,ru_3\,)$.



Y la suma de los vectores U y V se obtiene sumando sus coordenadas:
si $U=(u_1,u_2,u_3)$ y $V=(v_1,v_2,v_3)$ entonces

$U+V = (u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ u_3+bv_3$

A los vectores que se obtienen sumando múltiplos de otros vectores se les llama **combinaciones lineales** de esos vectores.

Ejemplos.

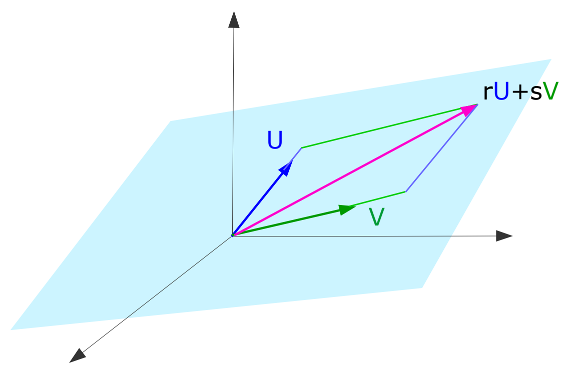
- Una combinación lineal de los vectores (1,2,3) y (2,0,1) es el vector 3(1,2,3)-2(2,1,-1)=(-1,4,11)

- ¿El vector (4,4,7) es combinación lineal de los vectores (1,2,3) y (2,0,1)?
  Hay que ver si existen reales r y s tales que r(1,2,3)+s(2,0,1)=(4,4,7)
  o sea r+2s=4, 2r=4 y 3r+s=7. Resolviendo las ecuaciones se obtiene r=2 y s=1
  y podemos comprobar que 2(1,2,3)+1(2,0,1)=(4,4,7).

Si U es un vector no 0, los múltiplos de U forman una linea recta, *la recta generada por* U.

Lema. Si los vectores U y V no están en una recta, las combinaciones lineales de U y V forman un plano, *el plano generado por* U y V.

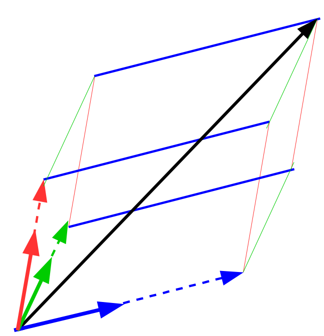
Demostración. Como los múltiplos de un vector en un plano están en el plano, y la suma de dos vectores en un plano están en el plano, entonces todas las combinaciones lineales de 2 vectores U y V están en el plano que los contiene.



Recíprocamente, si W es cualquier vector del plano que contiene a U y V, entonces hay un paralelogramo con lados paralelos a U y V que pasa por laos extremos de W, así que W es suma de múltiplos de U y V. •

Lema. Si 3 vectores U, V y W no están en un mismo plano, sus combinaciones lineales son todos los vectores del espacio.

Demostración (geometrica). La suma de 3 vectores basados en el mismo punto está dada por la diagonal del paralelepípedo determinado por los 3 vectores.



Dado cualquier vector Z basado en el mismo punto que U, V y W, podemos dibujar planos paralelos a los generados por U y V, U y W y V y W que pasen por los extremos de Z. Estos 6 planos determinan un paralelepípedo del que Z es una diagonal, sus aristas dan los múltiplos de U, V y W cuya suma es Z. •

Ejemplos.

- ¿Los vectores (1,1,1), (1,2,3) y (1,4,7) están en el mismo plano)?

  Los vectores (1,1,1) y (1,2,3) no son colineales, así que generan un plano. El vector (1,4,7) está en el plano si es combinación lineal de ellos, o sea si (1,4,7)=s(1,1,1)+t(1,2,3) para algunos s y t.

  $s+t=1$ — $s=1-t$ — $1-t=4-2t$ — $t=3$

  $s+2t=4$ — $s=4-2t$ — $s=1-3=-2$

  $s+3t=7$

  y podemos comprobar que -2(1,1,1)+3(1,2,3) = (1,4,7) así que si están en el mismo plano.

- Muestra algebraicamante que (-2,2,0) es una combinación lineal de (1,-1,2), (3,0,1) y (1,1,0).

  Tenemos que ver que (-2,2,0) = s(1,-1,2)+t(3,0,1)+u(1,1,0) para algunos valores de s,t,u.

  $-2=s+3t+u$ $\quad$ $-2=s+3(-2s)+(2+s)=-4s+2$ $\quad$ $4s=4$ $\quad$ $s=1$

  $2=-s+u$ $\quad$ $u=2+s$ $\quad$ $u=2+1=3$

  $0=2s+t$ $\quad$ $t=-2s$ $\quad$ $t=-2(1)=-2$

  y podemos checar que 1(1,-1,2)-2(3,0,1)+3(1,1,0)=(2,2,0)

Problemas.

3. ¿Cuales de estos vectores están en el plano generado por los vectores (1,2,3) y (3,2,1)?

   a. (3,4,5) $\qquad$ b. (-4,-5,-6) $\qquad$ c. (4,3,5)

4. Muestra algebraicamente que cada vector (x,y,z) de $\mathbf{R}^3$ es una combinación lineal de los vectores (1,2,3), (2,-1,1) y (3,0,2).

5. Muestra geométricamente que si se toman 4 vectores en el espacio, uno de ellos es una combinación lineal de los otros 3 (considera todos los casos posibles).

El Producto punto

Si $U = (u_1,u_2,u_3)$ y $V = (v_1,v_2,v_3)$ el **producto punto** o **producto interno** o **producto escalar** de U y V es el número

$$U \cdot V = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

Ejemplo. Si U=(1,2,3) y V=(4,5,-6) entonces $U \cdot V = 1\cdot4+2\cdot5-3\cdot6 = 4+10-18 = -4$

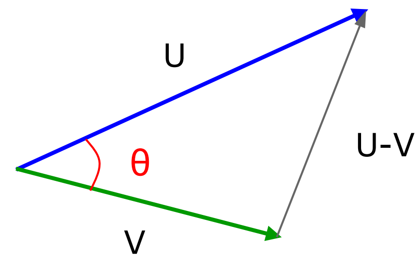
Por su definición, el producto punto tiene las siguientes propiedades:

- $U \cdot V = V \cdot U$ $\qquad$ *es conmutativo*
- $U \cdot (V+W) = U \cdot V + U \cdot W$ $\qquad$ *se distribuye con la suma*
- $U \cdot \lambda V = \lambda\, U \cdot V$ $\qquad$ *saca escalares*

El producto punto, que esta definido algebraicamente, tiene una interpretación geométrica.

Lema. $U \cdot V = |U||V| \cos\theta$

donde θ es el ángulo que forman U y V



Demostración. Si $U = (u_1,u_2,u_3)$ y $V = (v_1,v_2,v_3)$

entonces en el plano generado por U y V la ley de los cosenos dice

$|U-V|^2 = |U|^2 + |V|^2 - 2|U||V| \cos\theta$

en coordenadas esto es

$(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+(u_3-v_3)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2|U||V| \cos\theta$

desarrollando y simplificando queda

$$- 2u_1v_1-2u_2v_2-2u_3v_3 = -2|U||V| \cos\theta$$

y dividiendo entre -2 queda

$$u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3 = |U|\ |V| \cos\theta$$

Ejemplo. El ángulo entre los vectores U=(1,2,-3) y V=(4,0,1) esta dado por

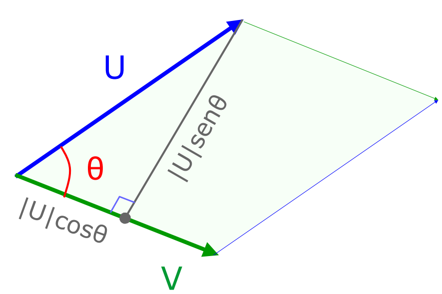
$\cos\theta = U\cdot V / |U|\ |V| = (1\cdot4+2\cdot0-3\cdot1) / (1^2+2^2+3^2)^{1/2}(4^2+0^2+1^2)^{1/2} = 1/\sqrt{14}\sqrt{9} = 1/3\sqrt{14}$

Corolario. El producto punto cumple:

- $U\cdot U = |U|^2$
- $U\cdot V \leq |U||V|$ y la igualdad se da solo si U y V tienen la misma dirección y sentido.
- $U\cdot V = 0$ si y solo si U y V son ortogonales (perpendiculares).

El área del paralelogramo generado por dos vectores U y V es

Area = base x altura = $|U||V| \operatorname{sen}\theta$.



Podemos calcular el área usando el producto interno ya que

$|U|^2|V|^2 \operatorname{sen}^2\theta + |U|^2|V|^2 \cos^2\theta = |U^2|V|^2$

Así que $\text{Area}^2 = |U|^2|V|^2 - (U\cdot V)^2$

Ejemplo. El área del paralelogramo generado por los vectores U=(1,2,-3) y V=(4,0,1) es

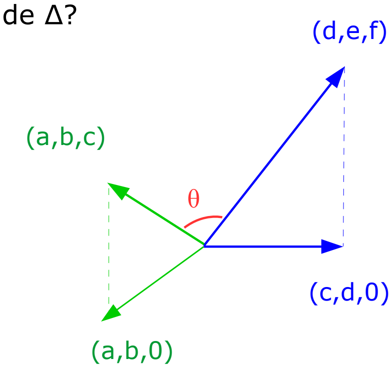
$$\text{Area} = \sqrt{|U|^2|V|^2 - (U\cdot V)^2} = \sqrt{(1^2+2^2+3^2)\,(4^2+0^2+1^2) - (1\cdot4+2\cdot0-3\cdot1)^2} = \sqrt{14\cdot9 - 1^2} = 15$$

Problemas

6. Si U=(2,-2,1) y V=(3,1,2), encuentra:
   a. La norma de U y V y el ángulo entre ellos.
   b. Los ángulos que forma U con los ejes **x** y **y** y con el plano **xy**.

7. Si Δ es el triángulo con vértices en (1,2,3), (2,1,0) y (3,1,1)
   ¿Cuanto miden los ángulos de Δ? ¿Cual es el área de Δ?

8. Si se proyectan dos vectores (a,b,c) y (d,e,f) en el espacio a dos vectores horizontales (a,b,0) y (d,e,0) ¿En que casos el ángulo que forman aumenta y en que casos disminuye?



Vectores ortogonales

En el espacio es fácil hallar vectores ortogonales a un vector dado, porque hay una infinidad de direcciones ortogonales a una dirección dada y hay una infinidad de vectores en cada dirección. Observar que los vectores ortogonales a un vector dado forman un plano.

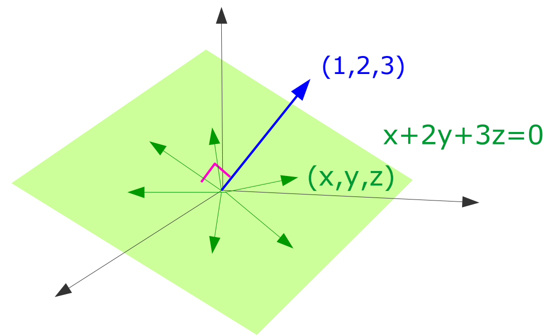
Ejemplo. Encuentra varios los vectores ortogonales a (1,2,3).
Los vectores ortogonales a (1,2,3) son los vectores (x,y,z) que satisfacen
(1,2,3) · (x,y,z) = 0 o sea los que satisfacen la ecuación **x + 2y + 3z = 0**
y esta ecuación lineal tiene muchas soluciones fáciles de adivinar, podemos fijar los valores de dos de las variables y obtener un valor para la tercera, por ejemplo (0,3,-2), (2,-1,0), (1,1,-1)

Lema. Los vectores del espacio que son ortogonales a un vector U≠0 forman un plano.

Demostración. Esto es intuitivamente claro, pero vamos a tratar de demostrarlo con mas rigor.
Cada plano que contiene a U hay una recta formada por vectores ortogonales a U.
Como hay una infinidad de planos que contienen a U, hay una infinidad de direcciones ortogonales a U.
Si 2 vectores V y W son ortogonales a U entonces sus combinaciones lineales son ortogonales a U ya que U·(aV+bW)=aU·V+bU·W = a 0 + b 0 = 0. Estas combinaciones lineales de V y W forman un plano.
Falta ver que todos los vectores ortogonales a U están en el mismo plano.
Si existieran 3 vectores V, W y Z ortogonales a U que que no están en el mismo plano, estos generarían a R^3, y todos los vectores de R^3 serían ortogonales a U. •

Ejemplo.

Los puntos (x,y,z) del espacio que satisfacen la ecuación x+2y+3z=0 forman un plano, que contiene a los vectores (x,y,z) basados en el origen que son ortogonales al vector (1,2,3).



Hallar un vector que sea ortogonal a dos vectores dados no es tan fácil, porque solo hay una dirección ortogonal a dos direcciones distintas.

Ejemplo. Hallar todos los vectores que son ortogonales a (1,2,3) y a (4,5,6)

Los vectores ortogonales a (1,2,3) y (4,5,6) son los vectores (x,y,z) que satisfacen

$(1,2,3) \cdot (x,y,z) = 0$ y $(4,5,6) \cdot (x,y,z) = 0$

o sea os que satisfacen el sistema de ecuaciones

$\mathbf{x + 2y + 3z = 0}$ y $\mathbf{4x + 5y + 6z = 0}$

Adivinar la solución no es tan fácil (hay que resolver el sistema) pero se puede mostrar que las soluciones son los múltiplos de (-1,2,-1).

Problemas

9. a. Encuentra un vector ortogonal a (1,5,2) y a (3,-1,4), usando solamente el producto punto.

   b. Encuentra dos vectores ortogonales a (1,1,1) que sean ortogonales entre si, usando el producto punto.

10. ¿Como se ven los vectores en el espacio (basados en el origen) que forman un ángulo constante con un vector V? ¿Y los vectores cuyo producto punto con un vector fijo es constante?

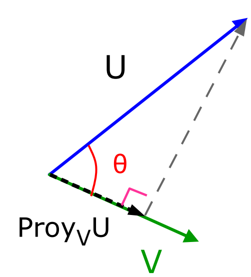
Proyecciones vectoriales

La **proyección** de un vector U en la dirección del vector V es la "sombra" de U al iluminarse perpendicularmente hacia V se le denota por $Proy_V U$.

$Proy_V U$ es un múltiplo de V de tamaño $|U|\cos\theta = {}^{1}/_{|V|}\, U\cdot V$,

Como el vector unitario en la dirección de V es ${}^{1}/_{|V|}\, V$ entonces

$$Proy_V U = {}^{U\cdot V}/_{|V|^2}\, V = {}^{U\cdot V}/_{V\cdot V}\, V$$

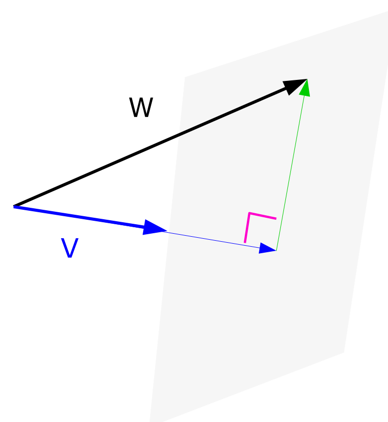


Ejemplo. La proyección de (3,5,7) en la dirección del vector V=(1,2,2) es

$\text{Proy}_V U = {}^{(3,5,7)\cdot(1,2,2)}/_{(1,2,2)\cdot(1,2,2)}\ (1,2,2) = {}^{(3\cdot1+5\cdot2+7\cdot2)}/_{(1\cdot1+2\cdot2+2\cdot2)}\ (1,2,2) = {}^{27}/_{9}\ (1,2,2)$

Lema. Si V es un vector en el espacio distinto de 0, entonces cada vector en el espacio puede descomponerse de manera única como suma de un vector paralelo a V y uno perpendicular a V.

Demostración. Basemos a V y W en el origen. Si P es el plano perpendicular a V que pasa por la punta de W entonces hay un múltiplo V' de V cuya punta esta en el plano. Entonces W= V' + (W-V') donde W-V' es un vector del plano ortogonal a V.



Esto puede verse analíticamente: $V' = \text{Proy}_V W = {}^{W\cdot V}/_{V\cdot V}\ V$
y $W - \text{Proy}_V W$ es perpendicular a V ya que

$V \cdot (W - \text{Proy}_V W) = V \cdot (W - {}^{W\cdot V}/_{V\cdot V}\ V) =$
$= V\cdot W - {}^{W\cdot V}/_{V\cdot V}\ V\cdot V = V\cdot W - W\cdot V = 0$ •

Ejemplo. El vector (3,2,-4) se puede descomponer como suma de un vector paralelo y uno perpendicular a (1,-2,-1).

$\text{Proy}_{(1,-2,-1)}(3,2,-4) = {}^{(3,2,-4)\cdot(1,-2,-1)}/_{(1,-2,-1)\cdot(1,-2,-1)}\ (1,-2,-1) = {}^{3}/_{6}\ (1,-2,-1) = ({}^{1}/_{2},-1,-{}^{1}/_{2})$

$(3,2,-4) = ({}^{1}/_{2},-1,-{}^{1}/_{2}) + (3,2,-4)-({}^{1}/_{2},-1,-{}^{1}/_{2}) = ({}^{1}/_{2},-1,-{}^{1}/_{2}) \quad + \quad ({}^{5}/_{2},3,-{}^{1}/_{2})$

paralelo a (1,-2—1) *perpendicular a* (1,-2,-1)

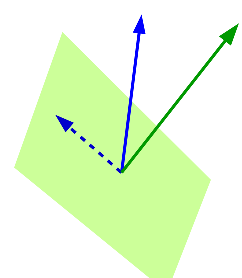
ya que es un múltiplo *ya que* $({}^{5}/_{2},3,-{}^{1}/_{2})\cdot(1,-2,-1)=0$

Problemas

11. Si U=(2,-2,1) y V=(3,1,2) encuentra:
   a. La proyección de U en la dirección de (1,0,0).
   b. La proyección de (1,0,0) en la dirección de V.
   c. La proyección de U en la dirección de V y la proyección de V en la dirección de U.

12. a. Escribe al vector (0,3,7) como suma de un vector paralelo y otro perpendicular a (1,2,3).
    b. Ahora intercambia los papeles de los dos vectores.

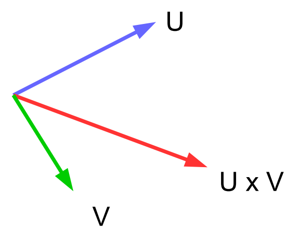
13. Dado un plano y cualquier vector V en el espacio, demuestra que es posible descomponer a V como la suma de un vector en el plano y uno perpendicular al plano.

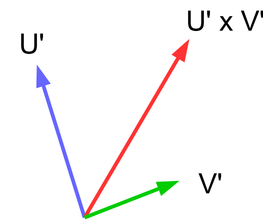


14. Encuentra la proyección del vector (1,2,3) hacia el plano perpendicular al vector (3,1,4). Hint: ¿quien debe ser el vector menos su proyección?

Un producto vectorial.

¿Será posible definir un producto de vectores en R^3 cuyo resultado sea un vector, de modo que sea independiente de las coordenadas y que se distribuya con la suma y el producto por escalares?





¿Que debería ser el producto de un vector por si mismo?

Al girar alrededor de la recta generada por U el vector U no cambia, así que UxU no debería cambiar. Los únicos vectores que no cambian al girar en esa recta son los múltiplos de U, así que UxU = aU.

Si ahora giramos U para convertirlo en -U el producto debe girar igual, así que

-U x -U = -aU. Pero si el producto saca escalares entonces -U x -U = (-1)(-1) U x U = U x U

así que -aU = aU por lo tanto a =0, por lo tanto **U x U = 0**.

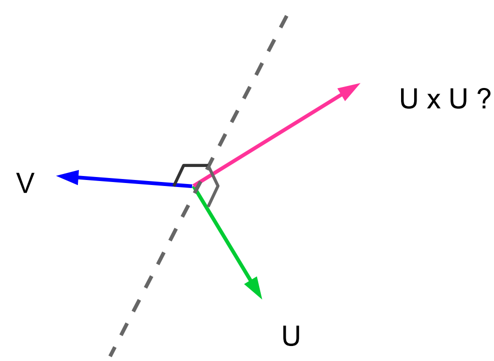
Si el producto saca escalares entonces queda determinado por el producto de vectores unitarios

Si U y V son vectores unitarios y no paralelos, entonces podemos girar alrededor de la recta perpendicular a U y a V, para que U se convierta en -U y V es convierta en -V, así que U x V debería convertirse en -U x -V. Pero -U x -V = U x V así que U x V no cambia. Como los únicos vectores que no cambian al girar alrededor de una recta son los vectores de la recta, U x V debe estar en esa recta, así que **UxV** *debe ser perpendicular* a **U** y **V**.

Ahora podemos intercambiar a U y V haciendo un giro,

y los vectores perpendiculares a U y V se voltean, así que **VxU = -UxV**.

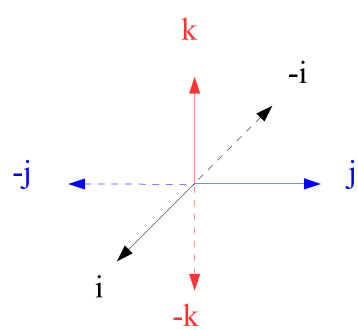
Esto dice que el producto x *debe ser anticonmutativo.*

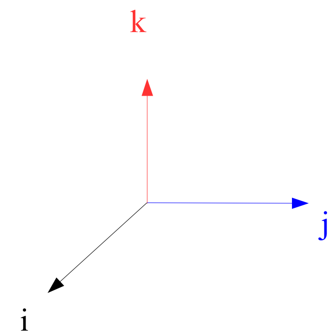


Resulta que estas propiedades casi determinan al producto x.

Veamos como definirlo en términos de los vectores básicos

i = (1,0,0) **j** = (0,1,0) **k** = (0,0,1).





Como hay un giro que lleva **i** a **j**, **j** a **k** y **k** a **i** entonces todos los productos entre vectores básicos están determinados por los productos **i** x **i** =0 y **i** x **j** = a**k**. Si elegimos a=1 y el producto no depende de las coordenadas entonces

i x **i** = **0**	**j** x **j** = **0**	**k** x **k** = **0**
i x **j** = **k**	**j** x **k** = **i**	**k** x **i** = **j**
j x **i** = **-k**	**k** x **j** = **-i**	**i** x **k** = **-j**

Si queremos que el producto se distribuya con la suma y producto por escalares, entonces el producto de $U = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $V = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ debe ser

$$U \times V = (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}) \times (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) =$$

$$u_1v_1\,\mathbf{i}\times\mathbf{i} + u_1v_2\,\mathbf{i}\times\mathbf{j} + u_1v_3\,\mathbf{i}\times\mathbf{k} +$$

$$+ u_2v_1\,\mathbf{j}\times\mathbf{i} + u_2v_2\,\mathbf{j}\times\mathbf{j} + u_2v_3\,\mathbf{j}\times\mathbf{k} +$$

$$+ u_3v_1\,\mathbf{k}\times\mathbf{i} + u_3v_2\,\mathbf{k}\times\mathbf{j} + u_3v_3\,\mathbf{k}\times\mathbf{k} =$$

$$= u_1v_2\,\mathbf{k} - u_1v_3\,\mathbf{j} - u_2v_1\,\mathbf{k} - u_2v_3\,\mathbf{i} + u_3v_1\,\mathbf{j} - u_3v_2\,\mathbf{i}$$

Y esta es en esencia la única definición posible de un producto de vectores en el espacio que es independiente de las coordenadas y saca sumas y escalares.

Definimos el **producto vectorial** (o **producto cruz**) de dos vectores usando la fórmula anterior:

$$(u_1,u_2,u_3) \times (v_1,v_2,v_3) = (u_2v_3 - u_3v_2\ ,\ u_3v_1 - u_1v_3\ ,\ u_1v_2 - u_2v_1)$$

En cada coordenada aparecen los productos cruzados de las otras dos coordenadas, con distintos signos.

La manera mas fácil de acordarse de esta fórmula es como un determinante:

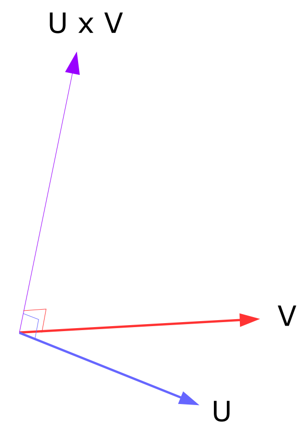
$$U \times V = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo. Si $U = (1,2,3)$ y $V = (4,5,6)$ entonces

$$U \times V = (2\cdot 6 - 5\cdot 3,\ 3\cdot 4 - 6\cdot 1,\ 1\cdot 5 - 4\cdot 2) = (-3,6,-3)$$

Se sigue de la definición que el producto vectorial tiene las siguientes propiedades algebraicas :

- $U \times U = 0$
- $U \times V = -V \times U$
- $U \times (V+W) = U \times V + U \times W$
- $U \times \lambda V = \lambda U \times V$



Teorema. U x V es un vector perpendicular a U y V.

Demostración.

Si $(u_1,u_2,u_3) \times (v_1,v_2,v_3)$ entonces

$U \times V = = (u_2v_3 - u_3v_2 ,\ u_3v_1 - u_1v_3 ,\ u_1v_2 - u_2v_1)$

Para ver que U x V es perpendicular a U usamos el producto punto:

$U \cdot (U \times V) = (u_1,u_2,u_3) \cdot (u_2v_3 - u_3v_2 ,\ u_3v_1 - u_1v_3 ,\ u_1v_2 - u_2v_1) =$

$= u_1\, u_2v_3 - u_1\, u_3v_2 + u_2u_3v_1 - u_2u_1v_3 + u_3u_1v_2 - u_3u_2v_1 = 0$

Así que U x V es perpendicular a U. De igual manera se prueba que U x V es perpendicular a V. •

Ejemplo. Encontrar dos vectores perpendiculares a (1,2,3) que sean perpendiculares entre si.

Hallar el primero es fácil, ya que hay muchas direcciones posibles, como (1,1,-1).

Encontrar el segundo es mas difícil porque solo hay una dirección posible. Podemos hallarla tomando el producto cruz de los dos: $(1,2,3) \times (1,1,-1) = (-21-13,31+11,11-12) = (-5,4,-1)$.

Lema. U x V = (0,0,0) si y solo si U y V son paralelos.

Demostración.

$U \times V = (u_2v_3 - u_3v_2 ,\ u_3v_1 - u_1v_3 ,\ u_1v_2 - u_2v_1)$ es el vector (0,0,0) si y solo si:

$$\left.\begin{array}{lll} u_2v_3 - u_3v_2 = 0 & \Leftrightarrow & u_2/v_2 = u_3/v_3 \\ u_3v_1 - u_1v_3 = 0 & \Leftrightarrow & u_3/v_3 = u_1/v_1 \\ u_1v_2 - u_2v_1 = 0 & \Leftrightarrow & u_1/v_1 = u_2/v_2 \end{array}\right\} \textit{estos 3 cocientes son iguales}$$

$u_1/v_1 = u_2/v_2 = u_3/v_3 = k \ \Leftrightarrow\ (u_1,u_2,u_3) = k\,(v_1,v_2,v_3) \ \Leftrightarrow\ (u_1,u_2,u_3)$ es paralelo a (v_1,v_2,v_3) •

Lema. $(U \cdot V)^2 + |UxV|^2 = |U|^2|V|^2$ para cada par de vectores U y V.

Demostración. Hay que calcular las tres magnitudes usando coordenadas (es una cuenta laboriosa). •

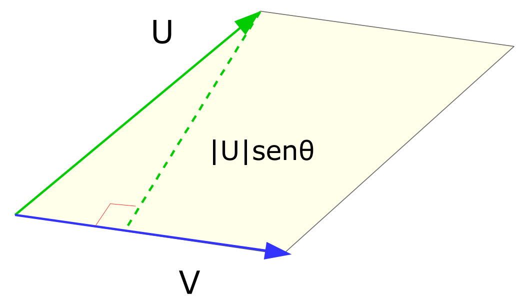
Corolario. $|U \times V| = |U||V|\text{sen}\theta$, que es el área del paralelogramo determinado por U y V.

Demostración. Como $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$ entonces

$$|U|^2|V|^2\cos^2\theta + |U|^2|V|^2\,\text{sen}^2\theta = |U|^2|V|^2$$

y por el lema anterior

$$(U \cdot V)^2 \quad + \quad |UxV|^2 \quad = \quad |U|^2|V|^2$$



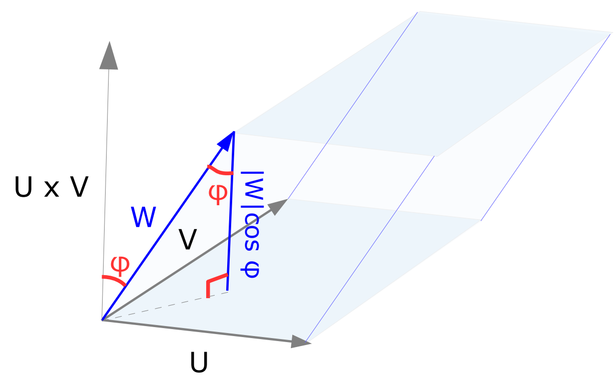
Como las cantidades azules son iguales y las verdes son iguales, las rojas deben ser iguales, así que $|UxV| = |U||V|\text{sen}\theta$ y el dibujo muestra que el área del paralelogramo es $|U||V|\ \text{sen}\theta$.

Ejemplo. Calcula el área del paralelogramo determinado por U = (1,2,3) y V = (4,5,6)

$U \times V = (2\cdot6-5\cdot3,\ 4\cdot3-6\cdot1,\ 1\cdot5-4\cdot2) = (-3,6,-3)$

El área es $|U \times V| = 3^2+6^2+3^2 = 54$

Lema. $(U \times V) \cdot W$ es el volumen (con signo) del paralelepípedo determinado por U, V y W.



Demostración.

$|(U \times V) \cdot W| =$

$= |U \times V||W| \cos\varphi$ donde φ es el ángulo entre U x V y W

$= |U||V|\text{sen}\theta\ |W|\cos\varphi$ donde θ es el ángulo entre U y V

= área base · altura •

Ejemplos.

- El área del paralelogramo determinado por (1,2,3) y (4,5,6) es $|(1,2,3) \times (4,5,6)| = |(3,6,-3)| = \sqrt{54}$
- El volumen del paralelepípedo determinado por (1,2,3), (4,5,6) y (7,8,-9) es $(1,2,3) \times (4,5,6) \cdot (7,8,-9) = (-3,6,-3) \cdot (7,8,-9) = -3\cdot7 + 6\cdot8 + 3\cdot9 = 54$

Problemas

14. Encuentra todos los vectores que son perpendiculares a los dos vectores (4,5,6) y (7,8,9).

15. Si U=(2,1,3), V=(1,4,2) y W=(1,-1,-2) calcula:

a) U x V	c) (U x V) · W	e) (U x V) x W
b) V x U	d) U · (V x W)	f) U x (V x W)

16. Encuentra 2 vectores perpendiculares a (1,2,3) que sean perpendiculares entre si.

17. a. Demuestra analíticamente que U x V es vertical si y solo si U y V son horizontales.

    b. Demuestra analíticamente que U x V es horizontal si y solo si las sombras de U y V en el plano xy son paralelas.

18. Calcula el área del paralelogramo generado por los vectores (1,2,3) y (2,1,3) usando el producto cruz.

19. Calcula el volumen del paralelepípedo generado por los vectores (1,2,3), (2,1,3) y (3,1,2).

21. Calcula el volumen del tetraedro con vértices en los puntos (1,5,3), (2,4,6), (0,1,2) y (7,9,8)

22. Demuestra que $|U\times V|^2 + |U\cdot V|^2 = |U|^2|V|^2$ y que por lo tanto $|U\times V|=|U||V||\operatorname{sen}\theta|$ donde θ es el ángulo que forman U y V.

23. a. Muestra geométricamente que U · (V x W) = (U x V) · W

    b. ¿Es cierto que U x (V x W) = (U x V) x W? Justifica tu respuesta