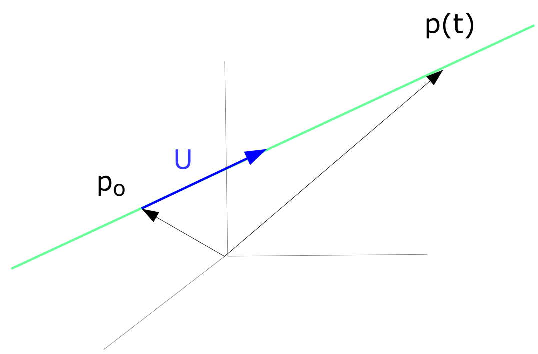
Rectas y planos en el espacio

Los puntos de cualquier recta en el espacio son de la forma $p(t)=p_o+tU$ donde p_o es punto de la recta y U es un vector en la recta.

Esta es una **parametrizacion** de la recta (los puntos de la recta están dados en función del parámetro t). Cada recta tiene una infinidad de parametrizaciones, ya que podemos empezar en cualquier punto de la recta y usar cualquier vector en la dirección de la recta.



Ejemplo. La recta que pasa por (1,4,2) y (3,0,5) tiene la dirección del vector (3,0,5)-(1,4,2)= (2,-4,3)

asi que puede parametrizarse como P(t) = (1,4,2) + t (2,-4,3) = (2t+1,-4t+4,3t+2)

La recta tiene muchas otras parametrizaciones, como P(s) = (3,0,5) - 2s (2,-4,3) = (3-4s,8s,5+6s).

Ejemplo. Los puntos de la forma p(t) = (1+2t,4t+5,3-3t) forman una recta ya que pueden escribirse como

p(t) = (1,5,3)+t(2,4,-3) que pasa por el punto (1,5,3) y tiene la dirección del vector (2,4,-3)

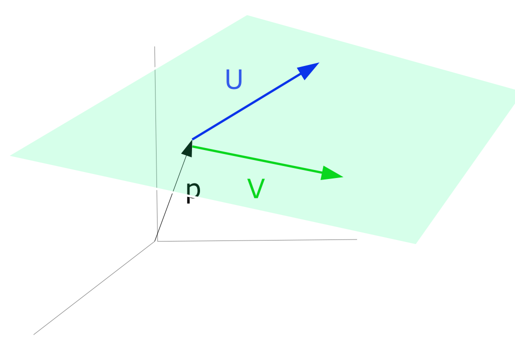
Para saber si un punto está en la recta hay que ver si corresponde a algún valor del parámetro.
Por ejemplo, (-3,12,-4) esta en la recta porque cuando t=-2, p(t)=(2(-2)+1,-4(-2)+4,3(-2)+2)=(-3,12,-4).

Los puntos de un plano en el espacio son de la forma

$p(t) = p+tU+sV$

donde p_o es un punto del plano y U y V son dos vectores no paralelos en el plano.

Cada plano tiene una infinidad de parametrizaciones, ya que podemos tomar a cualquier punto del plano y a cualquier par de vectores no paralelos.



Ejemplo. Para el plano que pasa por (1,0,0), (0,2,0) y (0,0,3). podemos tomar los vectores del plano

(0,2,0)-(1,0,0) = (-1,2,0) y (0,0,3)-(1,0,0) = (-1,0,3) y obtener la parametrización
P(s,t)=(1,0,0)+s(-1,2,0)+t(-1,0,3) = (1-s-t,2s,3t)

Elegiendo otro punto base y otros vectores del plano obtenemos otras parametrizaciones, como
Q(u,v)=(0,2,0)+u(0,2,-3)+v(1,0,-3) = (v,2+2u,-3u-3v)

- Aunque las parametrizaciones se ven muy distintas, la relación entre las coordenadas es la misma:

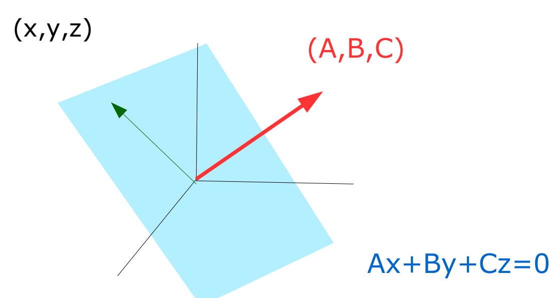
Para la primera	$x = 1-s-t$		$x = 1 - {}^{1}/_{2}\, y - z$	
	$y = 2s$	$s = {}^{1}/_{2}\, y$		
	$z = 3t$	$t = {}^{1}/_{3}\, z$		**6x +3y + 2z =6**
Para la segunda	$x = v$	$v = x$		
	$y = 2+2u$	$u = {}^{1}/_{2}\, y - 1$		
	$z = -3u-3v$		$z = -{}^{3}/_{2}\, y+3 - 3x$	

Esta relación es una *ecuación cartesiana* del plano.

Ejemplo. Los puntos de la forma (3t+s+1,2t-s-2,t-2s+4) con s,t $\in$ R forman un plano, ya que pueden escribirse como p(t,s)=(1,2,-4)+t(3,1,0)+s(1,-1,2), que es el plano que pasa por los puntos (1,2,4), (4,3,-4) y (2,1,-2)

Teorema. Las soluciones de cada ecuación lineal **Ax+By+Cz=D** forman un plano, y cada plano en el espacio esta formado por las soluciones de una ecuación lineal.

Demostración.



Si D= O, la ecuación **Ax+By+Cz = 0** puede escribirse como **(A,B,C)·(x,y,z)=0** , así que sus soluciones corresponden a los vectores (x,y,z) que son perpendiculares a (A,B,C) y estos vectores forman un plano.

Consideremos ahora la ecuación **Ax+By+Cz = D** con D≠0.

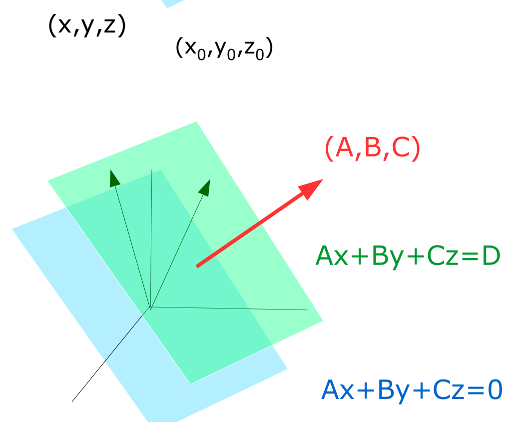
Si (x_o,y_o,z_o) es una solución particular de la ecuación, es decir si $Ax_o+By_o+Cz_o = D$ entonces para cualquier otra solución (x,y,z)

se cumple $Ax+By+Cz = Ax_o+By_o+Cz_o$ así que

$A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o) = 0$

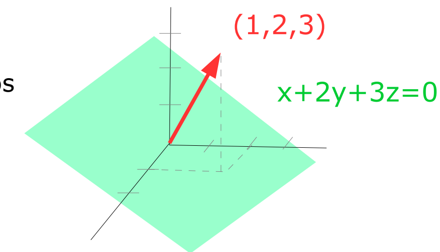
Esto dice que los vectores $(x-x_o,y-y_o,z-z_o)$ forman un plano, y los puntos (x,y,z) se obtienen sumándoles el vector fijo (x_o,y_o,z_o).

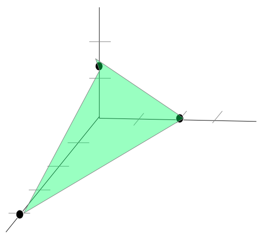
Así que las soluciones de Ax+By+Cz = D forman un plano que se obtiene trasladando a Ax+By+Cz = 0 por el vector (x_o,y_o,z_o).



Ejemplo. ¿Como se ve el plano **x+2y+3z=0** ?

Un punto del plano es (0,0,0) y un vector normal es (1,2,3), podemos dibujar este vector y luego un plano por el origen perpendicular a el.





Ejemplo. Las soluciones de la ecuación **x+2y+3z=4** forman un plano paralelo a **x+2y+3z=0** ya que es perpendicular al mismo vector (1,2,3). Podemos dibujar al plano hallando sus intersecciones con los ejes coordenados, que son (4,0,0), (0,2,0) y (0,0,4/3).

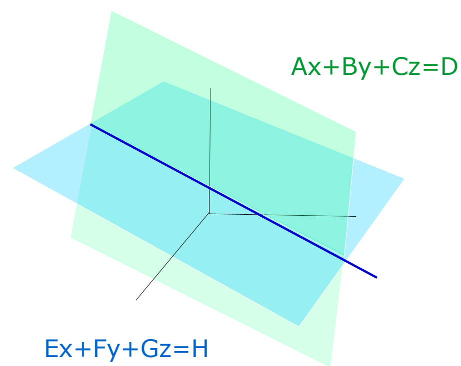
Ejemplo. ¿Que ecuación cartesiana cumplen los puntos del plano p(t,s) = (3t+s+1,2t-s-2,t-2s+4) s,t $\in$ **R** ?

Una manera de obtener la ecuación es observando que el vector (3,2,1)x(1,-1-,2) = (-3,7,-5) es perpendicular al plano, así que el plano tiene ecuación **-3x+7y-5z = D**. Como el punto (1,-2,4) debe estar entonces -3·1+7·(-2)-5·4 = D y la ecuación del plano es **-3x+7y-5z =-37**.

¿El punto (6,1,4) esta en el plano? Podríamos tratar de ver si existen s y t tales que P(s.t)=(6,1,4) pero es mucho mas fácil ver si el punto cumple la ecuación: 3(6)-7(1)+5(4) = 31 ≠ 37 así que no.

Si las ecuaciones lineales en el espacio corresponden a planos ¿entonces como son las ecuaciones de las rectas?

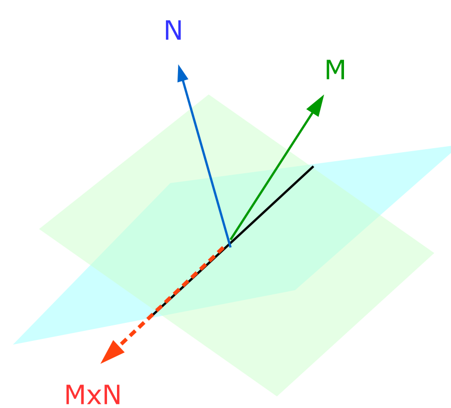
Cada recta es la intersección de dos planos, así que los puntos de la recta son los que satisfacen las ecuaciones de los dos planos.



Ejemplos.

- Los puntos de la recta (t+1,2t+4,-3t+2) satisfacen varias ecuaciones simultáneamente: por ejemplo **2x-y=-2**, **3x +z=5**, **3y+2z=16**, **x+y+z=7**. Cada una representa un plano que contiene a la recta, y cualesquiera dos de estas ecuaciones la determinan a la recta.

Si dos planos no paralelos se intersectan en una recta. Si M y N son vectores normales a los planos, entonces la recta de intersección es perpendicular a M y a N, así que la recta debe tener la dirección del vector MxN.



Ejemplo. La recta de intersección de los planos **x+2y-3z=4** y **3x-y+4z=2** es perpendicular a los vectores normales a los planos, que son (1,2,-3) y (3,-1,4) así que tiene la dirección del vector (1,2,-3) x (3,-1,4) = (5,-13,-7).

Problemas

1. Da una parametrización de la recta que pasa por (4,1,2) y (1,-2,3) y dí que ecuaciones cartesianas cumple. ¿En que puntos cruza la recta a los planos **x=0**, **y=0** y **z=0**?
2. Da una parametrización para el plano que pasa por los puntos (9,5,2), (1,7,3) y (6,4,8) y dí que ecuación cartesiana cumple. ¿En que puntos intersecta el plano a los ejes x, y, z?
3. ¿Como se ve el plano **2x-3y+4z=12**?
4. Da parametrizaciones de 2 rectas distintas en el plano **x+2y+3z=4**.
5. Da la ecuación cartesiana de un plano inclinado (no horizontal ni vertical) que contenga a la recta p(t)=(t+2,3t+4,5t+6).
6. Da una parametrización de la recta de intersección de los planos

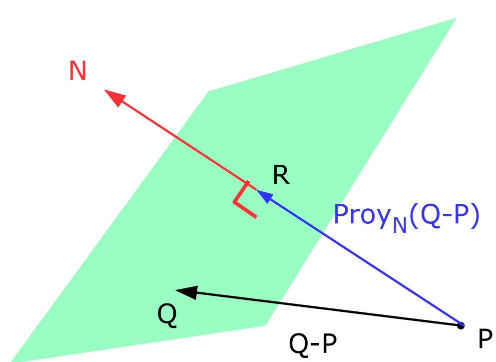
   x+2y−z=3 y **4x−y+3z=1**
7. ¿En que punto se intersectan la recta que pasa por (1,2,3) y (4,5,6) y el plano que pasa por (0,2,1), (3,0,4) y (-1,3,0)?
8. Desde el punto (3,4,9) se lanza una pelota con velocidad [1,-2,-3], que se mueve en linea recta y rebota cada vez que toca alguno de los planos coordenados xy, xz y yz. Da una parametrización del movimiento de la pelota.

Distancias y ángulos

La distancia de un punto P a un plano es la distancia de P a al punto mas cercano del plano.

Si Q es cualquier punto del plano entonces la proyección del vector Q-P en la dirección del vector N normal al plano es un vector que va de P al plano, y que es mas corto o igual que Q-P. Por lo tanto

Distancia = $|Proy_N(Q-P)|$



El punto R del plano que esta mas cerca de P es

R = P + $Proy_N(Q-P)$.

Ejemplo. ¿Cual es la distancia del punto P=(1,4,2) al plano **3x+2y-z=4**?

Un punto del plano es Q=(1,1,1) y un vector normal al plano es N=(3,2,-1)

Distancia= $|\ \mathrm{Proy}_N(Q-P)\ | = |\ \mathrm{Proy}_{(3,2,-1)}(1-1,1-4,1-2)\ | =$

$= |{}^{(3,2,-1)\cdot(0,-3,-1)}/_{(3,2,-1)\cdot(3,2,-1)}(3,2,-1)| = |-{}^{5}/_{14}\ (3,2,-1)| = 5/\sqrt{14}$.

Ejemplo. ¿Cual es el punto del plano **3x+2y-z=4** mas cercano a (1,4,2)?

Un punto del plano es Q=(1,1,1) y el vector N=(3,2,-1) es normal al plano. El punto mas cercano es

$R = P + \mathrm{Proy}_N Q\text{-}P = (1,4,2) + \mathrm{Proy}_{(3,2,-1)}(0,-3,-1) = (1,4,2) - {}^{5}/_{14}\ (3,2,-1) = ({}^{-1}/_{14},{}^{46}/_{14},{}^{33}/_{14})$.

Otra manera: la recta perpendicular al plano que pasa por P tiene parametrización P(t) = P + tN = (1,4,2) + t (3,2,-1) = (3t+1,2t+4,-t+2). La recta cruza al plano donde se cumple la ecuación 3x+2y-y=4, es decir 3(3t+1)+2(2t+4)-1(-t+2)=4, o sea 9t+3+4t+8+t-2=4, 14t=-5, t=- ${}^{5}/_{14}$ y el punto es $P(-{}^{5}/_{14}) = (-{}^{1}/_{14},{}^{46}/_{14},{}^{33}/_{14})$.

Lema. La distancia del punto (x_0,y_0,z_0) al plano **Ax+By+Cz+D=0** es $|Ax_0+By_0+C_0+D| / \sqrt{A^2+B^2+C^2}$

Demostración. La distancia es $|\mathrm{Proy}_{(A,B,C)}(x_0\text{-}x,\ y_0\text{-}y,\ z_0\text{-}z)| = |(x_0\text{-}x,\ y_0\text{-}y,\ z_0\text{-}z)\cdot(A,B,C)|\ /|(A,B,C)| =$

$= |Ax_0+By_0+C_0\text{-}Ax\text{-}By\text{-}Cz|/|(A,B,C)| = |Ax_0+By_0+C_0+D|\ /\ \sqrt{A^2+B^2+C^2}$ •

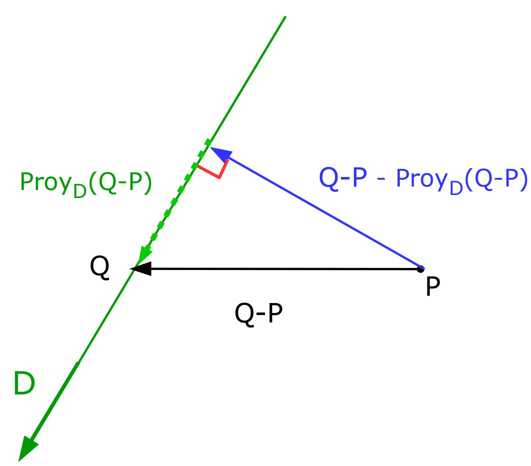
Ejemplo. La distancia del punto (1,4,2) al plano 3x+2y-z=4 es $|3(1)+2(4)-1(2)-4|\ /\ \sqrt{3^2+2^2+4^2} = 5/\sqrt{14}$

La distancia de un punto P a una recta R es la distancia de P al punto mas cercano de R.

Si la recta tiene dirección D y Q es cualquier punto de la recta, entonces el vector V = (Q-P) - Proy_D(Q-P) es perpendicular a la recta y por lo tanto da la distancia mas corta de P a la recta.

El punto de la recta mas cercano a P es

V-P = Q – Proy_D(Q-P) .



Ejemplo. ¿Cual es el punto de la recta $p(t)=(1+2t,3-t,5+4t)$ mas cercano a $(3,4,2)$?

Un punto de la recta es $Q=(1,3,5)$ y la dirección de la recta es $(2,-1,4)$.
El vector de P a Q es $(1,3,5)-(3,4,2) = (-2,-1,3)$.

$\text{Proy}_{(2,-1,4)}(-2,-1,3) = {}^{(-2,-1,3)\cdot(2,-1,4)}/_{(2,-1,4)\cdot(2,-1,4)}\ (2,-1,4) = {}^{9}/_{21}\ (2,-1,4) = ({}^{6}/_{7},{}^{-3}/_{7},{}^{12}/_{7})$

El vector que va de P a la recta y es perpendicular a la recta es

$V = (-2,-1,3) - \text{Proy}_{(2,-1,4)}(-2,-1,3) = (-2,-1,3) - ({}^{6}/_{7},{}^{-3}/_{7},{}^{12}/_{7}) = ({}^{-20}/_{7},{}^{-4}/_{7},{}^{9}/_{7})$.

La distancia de $(3,4,2)$ a la recta es $|V| = |({}^{-20}/_{7},{}^{-4}/_{7},{}^{9}/_{7})| = {}^{\sqrt{497}}/_{7}$

y el punto mas cercano es $(3,4,2) + ({}^{-20}/_{7},{}^{-4}/_{7},{}^{9}/_{7}) = ({}^{1}/_{7},{}^{24}/_{7},{}^{23}/_{7})$

- Otra manera de hallar el punto mas cercano: En ese punto la diferencia $p(t)-(3,4,2)$ es perpendicular al vector de dirección de la recta, que es $(2,-1,4)$:

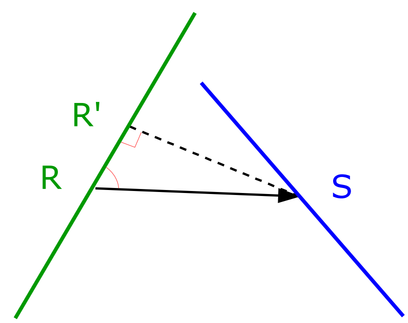
  $(p(t)-(3,4,2)) \cdot (2,-1,4) = (-2+2t,-1-t,3+4t)\cdot(2,-1,4) = -4+4t+1+t+12+16t = 21t+9 = 0, \quad t={}^{-3}/_{7}$

  $p({}^{11}/_{21}) = (1+2({}^{-3}/_{7}),\ 3-({}^{-3}/_{7}),\ 5+4({}^{-3}/_{7})) = ({}^{1}/_{7},\ {}^{24}/_{7},\ {}^{23}/_{7})$

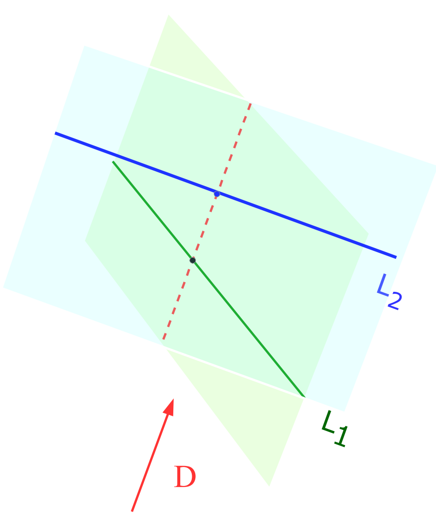
La **distancia entre dos rectas** es la distancia mínima entre dos puntos en esas rectas.

Lema. Si R y S son los puntos mas cercanos de las rectas entonces R-S es perpendicular a las dos rectas.

Demostración. Si R-S no fuera perpendicular al vector D que da la dirección de la recta por R, entonces $R' = R + \text{Proy}_D(S-R)$ seria un punto en esa recta mas cercano S. Un argumento similar muestra lo mismo para la otra recta. •



El argumento anterior muestra que los puntos mas cercanos de las rectas deben estar en una recta perpendicular a ambas, pero no demuestra que exista tal recta.



Lema. Para cada par de rectas no paralelas en el espacio, hay una única recta que las intersecta y es perpendicular a ambas.

Demostración. Dadas dos direcciones distintas en el espacio, solo existe una dirección perpendicular a ambas. Supongamos que L_1 y L_2 son dos rectas no paralelas, y que D es la dirección perpendicular a ambas. Sea P el plano que contiene a la recta L_1 y a la dirección D y sea Q el plano que contiene a L_2 y a la dirección D. Entonces los planos P y Q se intersectan en una recta en la dirección de D que cruza a L_1 y L_2 •

Ejemplo. ¿Cuales son los puntos mas cercanos de las rectas $p(t)=(t+1,2t-2,-t)$ y $q(s)=(2s-3,-s+4,3s+2)$?

El vector que une los puntos $p(t)$ y $q(s)$ es $p(t)-q(s) = (t-2s+4,2t+s-7,-t-3s-2)$. Cuando $p(t)$ esta mas cerca de $q(s)$ el vector $p(t)-q(s)$ es perpendicular a las direcciones de ambas rectas, que son $(1,2,-1)$ y $(2,-1,3)$, así que el producto punto de $p(t)-q(s)$ con $(1,2,-1)$ y con $(2,-1,3)$ debe ser 0:

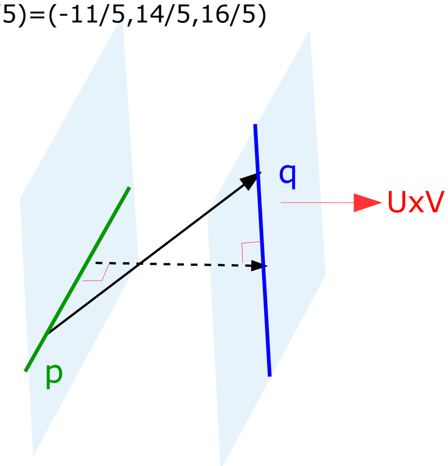
$0 = (t-2s+4,\ 2t+s-6,\ -t-3s-2) \cdot (1,2,-1) = t-2s+4 +4t+2s-12 +t+3s+2 = 6t+3s-6$

$0 = (t-2s+4,\ 2t+s-6,\ -t-3s-2) \cdot (2,-1,3) = 2t-4s+8 -2t-s+6 -3t-9s-6 = -3t-14s+8$

Podemos resolver el sistema de ecuaciones para hallar $s = 2/5$ $t = 4/5$
y os puntos mas cercanos son $p(4/5)=(9/5,-2/5,-4/5)$ y $q(2/5)=(-11/5,14/5,16/5)$

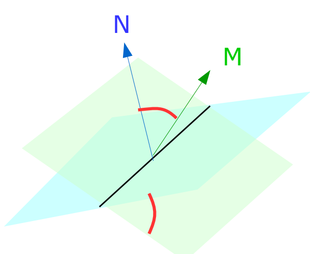
Lema. La distancia entre dos rectas que pasan por los puntos p y q con direcciones U y V es la norma de la proyección de p-q en la dirección normal a las dos rectas, es decir $|Proy_{UxV}(p-q)|$.

Demostración. Ejercicio.



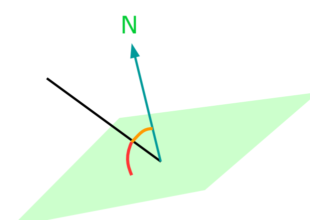
Por lo general una linea intersecta a un plano en un punto, y dos planos se intersectan en una linea.

Podemos hallar los ángulos de intersección usando el producto punto entre vectores apropiados:



El ángulo de intersección entre dos planos es igual al ángulo de intersección de sus vectores normales.

El ángulo de intersección entre una recta y un plano es el complemento del ángulo que forman la recta y el vector normal al plano.



Ejemplo. ¿Con que ángulo se intersectan los planos **2x-3y+z=4** y **x+4y-5z=6** ?

Los vectores normales son $(2,-3,1)$ y $(1,4,-5)$ y el ángulo entre ellos está dado por

$\cos\theta = \frac{(2,-3,1)\cdot(1,4,-5)}{|(2,-3,1)||(1,4,-5)|} = \frac{-15}{\sqrt{14}\sqrt{42}} = \frac{-15}{14\sqrt{3}}$ de donde $\theta \approx 51.78679°$

Ejemplo. ¿Con que ángulo cruza la recta p(t)=(4t-1,2t+3,5t) al plano **2x-3y+z=4**?

El vector de dirección de la recta es (4,2,5) y el vector normal al plano es (2,-3,1).

El ángulo entre estos dos vectores esta dado por

$\cos\theta = {}^{(2,-3,1)\cdot(4,2,5)}/_{|(2,-3,1)||(4,2,5)|} = {}^{7}/_{\sqrt{14}\sqrt{45}}$, de donde θ = arccos(-0.61858) ≈ 73.80623°

El ángulo que forma la recta con el plano es 90°-θ ≈ 16.19377°

Ejemplo. ¿Cual es la distancia entre las rectas p(t) = (2t+1, t+4, -t+2) y q(s) = (-s+2, 3s-1, 2s)?

p = (1,4,2) q = (2,-1,0) U = (2,1,-1) V = (-1,3,2) UxV = (5,-3,7)

Distancia = $|Proy_{UxV}(p-q)|$ = |(5,-3,7)·(-1,5,2)| /|(5,3,-7)| = |-5 15+14| /$\sqrt{5^2+3^2+7^2}$ = 6 / $\sqrt{83}$

Problemas.

9. ¿Cual es el punto del plano **2x-3y+4z = 12** mas cercano a (1,3,7)?

10. Encuentra la distancia del plano P(s,t)=(s+t+1, 2s+3,3t-4) al origen.

11. ¿Cual es el punto de la recta p(t)=(t+2,3t+4,5t+6) mas cercano a (1,2,3)?

12. ¿En que punto intersecta la recta p(t)=(1+3t,6-4t,5+2t) al plano **x+2y+3z = 4** ?
¿Con que ángulo se cruzan?

13. ¿En que recta y con que ángulo se cruzan los planos **3x-2y+4z = 1** y **x+5y-z = 4** ?

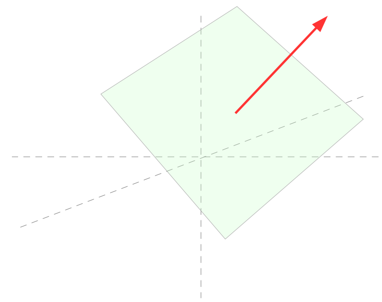
14. a. ¿Cual es la distancia entre las rectas p(t)=(3t-1, t+2,-4t+6) y q(s)=(2s+4, 6s-7, 3s)?
b. ¿Cuales son los puntos mas cercanos de estas rectas?
c. Da una parametrización de la recta que ias intersecta y es perpendicular a ambas.

15. Un pato vuela en linea recta y a velocidad constante de modo que en t=0 esta en el punto (3,5,7) y en t=1 esta en (4,3,6). El Sol brilla en lo alto.
a. ¿Cual es la posición del pato en el tiempo t? ¿Y la posición de su sombra en el plano z=0?
b. ¿Con que rapidez se mueve el pato? ¿con que rapidez se mueve su sombra?
c. ¿En t=2 el pato se esta acercando o alejando del punto (1,2,3)? ¿Y su sombra?
d. ¿En que momento es que el pato pasa mas cerca del origen? ¿Y su sombra?

16. P(t)=(-3t,-t-2,4t) y Q(t)=(2t+7,-3t+10,t-4) dan las posiciones de dos puntos en movimiento.
a. ¿Cual es la distancia mínima los puntos?
b. ¿Cual es la distancia mínima entre sus trayectorias? *Las respuestas son distintas*

Sistemas de ecuaciones lineales

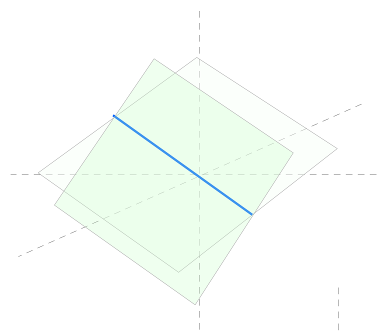
Los sistemas de ecuaciones lineales son importantes en el álgebra y tienen muchas otras aplicaciones. La geometría da una manera de entender y visualizar sus soluciones.
La siguiente discusión aplica a ecuaciones en 3 variables, pero puede generalizarse fácilmente a cualquier número de dimensiones.



Las soluciones de una ecuación lineal **Ax+By+Cz=D** forman un plano en $\mathbf{R}^3$ que es perpendicular al vector (A,B,C).

Como dos vectores tienen la misma dirección sii sus coeficientes son proporcionales, dos ecuaciones lineales cuyos coeficientes no son proporcionales tienen distintas soluciones.

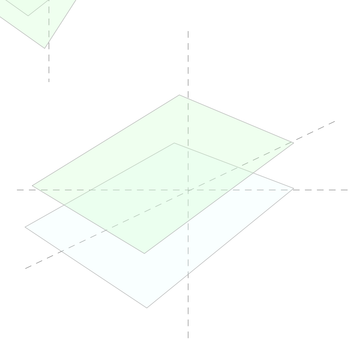
Ejemplo. ¿Como son las soluciones de la ecuación lineal **2x-4y+z = 5** ?
Las soluciones se obtienen de una solución particular, como (1,0,3) y sumándole vectores perpendiculares a (2,-4,5). Dos de estos vectores son (2,-1,0) y (0,5,4), así que todas las soluciones son de la forma
S(a,b) = (1,0,3)+a(2,-1,0)+b(0,5,4) o sea **x**=1+2a, **y**=-2a+5b, **z**=3+4b



Tomemos ahora un sistema de dos ecuaciones lineales:

Ax+By+Cz=D

Ex+Fy+Gz=H



Como las soluciones de cada ecuación son los puntos de un plano, las soluciones del sistema son los puntos en la intersección de los planos, así que forman una linea (si los planos se cruzan) o el vacío (si los planos son paralelos) o todo un plano (si los planos son iguales), y es fácil checar en que caso estamos viendo si los vectores (A,B,C) y (E,F,G) tienen direcciones distintas o iguales.

Ejemplo. ¿Como son las soluciones de este sistema de ecuaciones lineales?

x+2y+3z = 4

2x-4y+z = 5

Las soluciones del sistema son los puntos en la intersección de dos planos cuyos vectores normales son U=(1,2,3) y V=(2,-4,1), que no son colineales, así que las soluciones forman una recta en la dirección UxV.
Podemos dar todas las soluciones hallando una solución particular, como $(^{13}/_{4},{}^{3}/_{8},0)$ y sumándole un múltiplo del vector UxV=(14,5,-8)

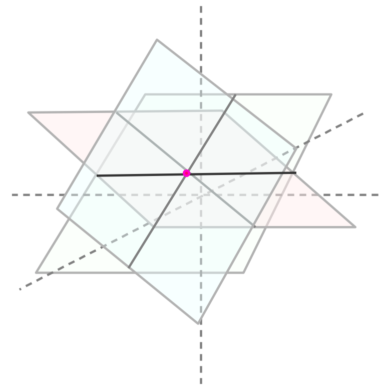
Así que las soluciones son $s(t)=(^{13}/_{4},{}^{3}/_{8},0)+t(14,5,-8)$ o sea **x**= $^{13}/_{4}$+14t **y**=$^{3}/_{8}$+5t **z**=-8t.

Finalmente consideremos un sistema de 3 ecuaciones lineales:

Ax+By+Cz = D

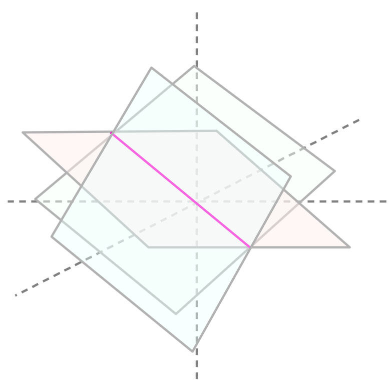
Ex+Fy+Gz = H

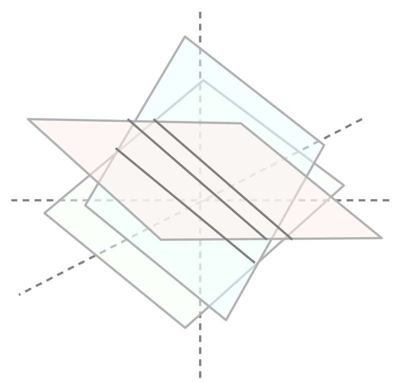
Ix+Jy+Kz = L



Las soluciones son los puntos en la intersección de 3 planos. Si los vectores (A,B,C) (E,F,G) y (I,J,K) no son coplanares (esto es lo mas probable, y podemos checarlo viendo si el triple producto de los 3 vectores no es 0) entonces los 3 planos deben cruzarse y la intersección es un punto, asi que hay exactamente una solución.

Si los 3 vectores normales son coplanares (lo que ocurre si su triple producto es 0) pero no hay 2 colineales, entonces cada par de planos se cruza en una línea recta y las 3 rectas tienen la misma dirección, así que coinciden o son paralelas, y su intersección es una recta o el vacío. Así que el sistema tiene una infinidad de soluciones o ninguna.





Si 2 de los vectores normales son colineales entonces los planos coinciden (y las 2 ecuaciones son equivalentes y podemos olvidarnos de una) o los planos son paralelos (y dos ecuaciones son contradictorias y el sistema no tiene soluciones).

Ejemplo. ¿Como son las soluciones del sistema de ecuaciones lineales

x + 3y +2z = 4

2x + 5y + z = 7

x + 4y - 7z = 2

Las soluciones son los puntos de intersección de 3 planos cuyos vectores normales son

U=(1,3,2), V=(2,5,1) y W=(1,4,-7).

Estos 3 vectores no son coplanares ya que el triple producto UxV·W = $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix}$ = 12 ≠ 0.

Así que el sistema debe tener exactamente una solución.

Ejemplo. ¿Como son las soluciones de este sistema de ecuaciones lineales?

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x + 5y + z &= 7 \\ x + 4y - 7z &= 2 \end{aligned}$$

Las soluciones son los puntos de intersección de 3 planos con vectores normales

U=(1,2,3), V=(2,5,1) y W=(1,4,-7).

Pero estos 3 vectores son coplanares ya que su triple producto UxV·W = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 0$.

Así que o las soluciones forman una recta o no hay soluciones.

Podemos checar que las soluciones forman una recta, viendo que la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras (es 2 veces la segunda menos 3 veces la primera) asi que las soluciones de las 3 ecuaciones son las soluciones de las 2 primeras.

Ejemplo. ¿Como son las soluciones de este sistema de ecuaciones?

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ 2x + 5y + z &= 7 \\ x + 4y - 7z &= 4 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son iguales a las del ejemplo anterior excepto por las constantes.

Los vectores normales son coplanares ya que su triple producto UxV·W es 0, pero en este caso la tercera ecuación no es combinación lineal de las 2 primeras, así que el tercer plano no contiene a la recta de intersección de los dos primeros y el sistema no tiene soluciones.

Problemas

17. Las edades de tres hermanas suman 30 años, la mayor tiene 7 años mas que la menor y hace 1 año la mediana tenia el doble de la edad que la menor. ¿Que edad tiene cada una? ¿Que tiene que ver esto con geometría?

18. Da todas las soluciones de estos sistemas de ecuaciones lineales, usando parámetros.

a. $\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y - z &= 1 \end{aligned}$

b. $\begin{aligned} 3x - 4y + 6z &= 2 \\ {}^{x}/_{4} - {}^{y}/_{3} + {}^{z}/_{2} &= {}^{1}/_{5} \end{aligned}$

19. Di cuantas soluciones tienen estos sistemas de ecuaciones lineales, sin resolverlos.

a. $\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 4 \\ x + 2y + z &= 5 \\ x + 4y + 3z &= 3 \end{aligned}$

b. $\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x - y - z &= 2 \\ x - y + z &= 3 \end{aligned}$

c. $\begin{aligned} 5x + 2y + z &= 5 \\ 3x + y + 2z &= 4 \\ 4x + y + 5z &= 3 \end{aligned}$

20. Da un sistema de 3 ecuaciones lineales cuyas soluciones incluyan a los puntos (0,1,0) y (1,2,3).