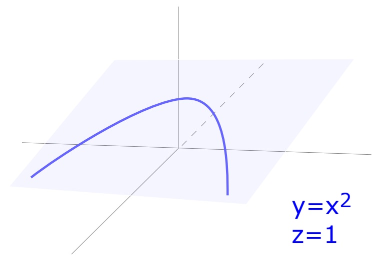
Curvas en el espacio

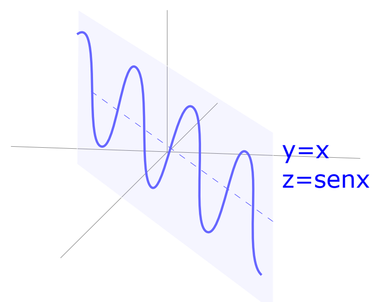
Las curvas en el espacio son objetos geométricos unidimensionales, pueden describirse con un solo parámetro (como trayectorias en las que la posición depende del tiempo), o por medio de 2 ecuaciones (que dan las relaciones que hay entre las 3 coordenadas de sus puntos). A veces las curvas parametrizadas pueden pueden visualizarse mas fácilmente descomponiéndolas como sumas vectoriales de trayectorias mas simples, como una trayectoria horizontal (su sombra en el plano xy) y una vertical (su altura).

Ejemplos:

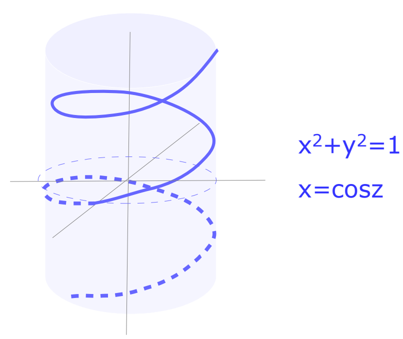
La trayectoria $p(\mathbf{t})=(\mathbf{t},\mathbf{t}^2,1)$ es una parábola a altura 1.



La trayectoria $q(\mathbf{t})=(\mathbf{t},\mathbf{t},\mathrm{sen}\,\mathbf{t})$ es la suma de la trayectoria horizontal $(\mathbf{t},\mathbf{t},0)$ y la trayectoria vertical $(0,0,\mathrm{sen}\,\mathbf{t})$.
La sombra en el piso es una línea recta y la altura oscila, la trayectoria se ve así:

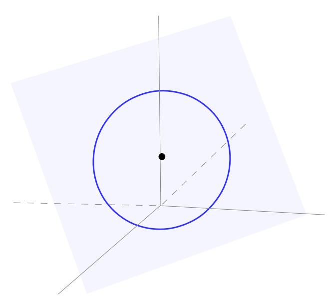


La trayectoria $p(\mathbf{t})=(\cos\mathbf{t},\mathrm{sen}\,\mathbf{t},\mathbf{t})$ tiene como sombra en el piso a un círculo, su altura crece con **t**. La trayectoria esta contenida en un cilindro vertical y se ve así:



Ejercicio. ¿Como puede parametrizarse el círculo de radio 3 centrado en (0,0,2) y perpendicular a (1,1,1)?
Dos vectores unitarios perpendiculares a (1,1,1) y perpendiculares entre si

son $U={}^1/_{\sqrt{2}}(1,0,-1)$ y ${}^1/_{\sqrt{6}}(1,-2,1)$.



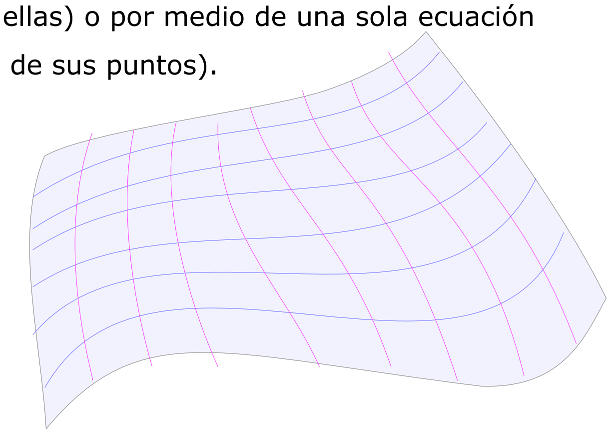
Así que el circulo puede parametrizarse como

$p(t) = (0,0,2) + {}^3/_{\sqrt{2}}\cos\mathbf{t}\,(1,0,-1) + \mathrm{sen}\,\mathbf{t}\,{}^3/_{\sqrt{6}}(1,-2,1) =$

$= ({}^3/_{\sqrt{2}}\cos\mathbf{t} + {}^3/_{\sqrt{6}}\mathrm{sen}\,\mathbf{t}\ ,\ -{}^6/_{\sqrt{6}}\mathrm{sen}\,\mathbf{t}\ ,\ 2 - {}^3/_{\sqrt{2}}\cos\mathbf{t} - {}^3/_{\sqrt{6}}\,\mathrm{sen}\,\mathbf{t})$

Superficies

Las superficies en el espacio son objetos bidimensionales, pueden describirse con dos parámetros (que reflejan los 2 grados de libertad para moverse en ellas) o por medio de una sola ecuación (que da una relación numérica entre las 3 coordenadas de sus puntos).



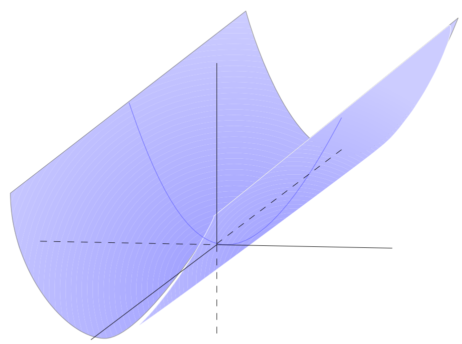
Si en la parametrización de una superficie fijamos el valor de uno de los parámetros obtenemos una curva, y la unión de estas curvas es toda la superficie.

Ejemplo. ¿Como se ve la superficie $p(s,t)=(s,t,t^2)$?

Para $s=c$ se ve $P(t)=(c,t,t^2)$ que es una parábola en el plano $x=c$.

Para $t=c$ se ve $P(s)=(s,c,c^2)$ que es una línea recta en la dirección x.

Es un *cilindro parabólico*.

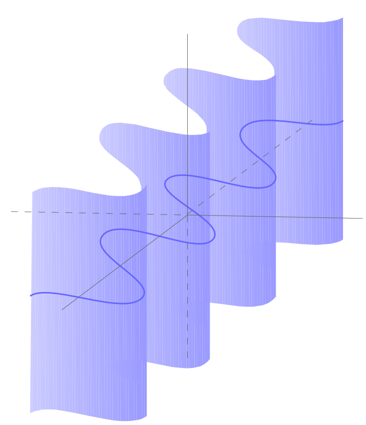


Cilindro parabólico

¿Que ecuación cumplen los puntos de la superficie? $z = y^2$

(la coordenada x no aparece porque puede tomar cualquier valor)

Ejemplo. ¿Como se ve la superficie $q(s,t)=(s,\text{sen}s,t)$?



Para $s=c$ se ve $q(t)=(c,\text{sen}c,t)$ que es una línea recta vertical.

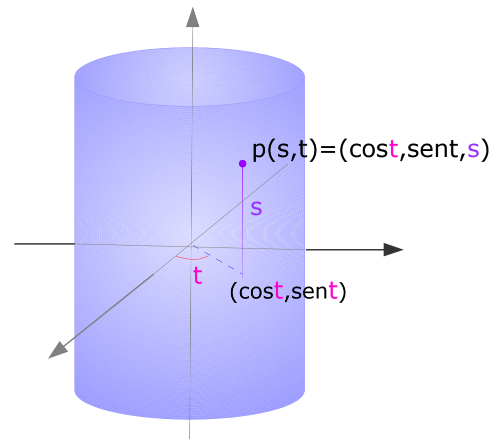
Para $t=c$ se ve $q(s)=(s,\text{sen}s,c)$ que es una curva senoidal horizontal.

La superficie se ve como una cortina.

¿Que ecuación cumplen sus puntos? $y = \text{sen}x$

La coordenada z no aparece porque puede tomar cualquier valor.

Ejemplo. ¿Como se puede parametrizar al cilindro de radio 1 alrededor del eje z?



Podemos cubrir al cilindro con círculos horizontales de radio 1,

tomando $p(s,t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,s)$

donde s da la altura del punto y t es el ángulo con el eje x.

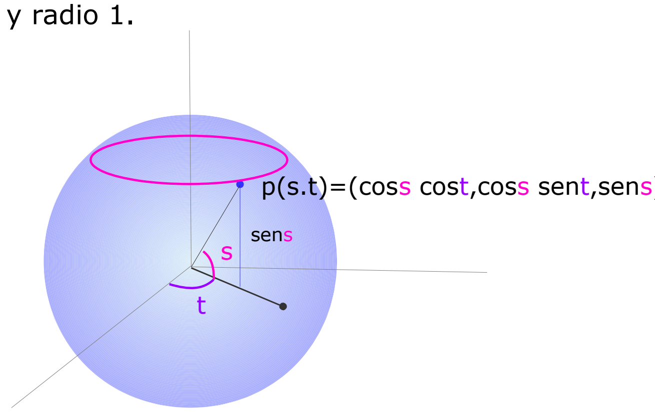
Para $s=c$ es un círculo horizontal a altura c.

Para $t=c$ es una recta vertical.

Los puntos del cilindro satisfacen la ecuación $x^2+y^2 = 1$

(la coordenada z no aparece porque no tiene ninguna restricción)

Ejemplo. Parametrizar la esfera con centro en el origen y radio 1.



Podemos cubrir a la esfera con círculos horizontales. El círculo formado por los vectores unitarios a un ángulo **s** del plano xy tiene radio $\cos \mathbf{s}$ y altura $\operatorname{sen} \mathbf{s}$, así que la esfera puede parametrizarse

$$p(\mathbf{s},\mathbf{t}) = (\cos \mathbf{s} \cos \mathbf{t}, \cos \mathbf{s} \operatorname{sen} \mathbf{t}, \operatorname{sen} \mathbf{s})$$

donde **s** da el ángulo de elevación **t** el ángulo con el eje x.

Los puntos de la esfera satisfacen la ecuación $x^2+y^2+z^2= 1$.

Problemas

1. ¿Como se ven las siguientes curvas en el espacio? ¿Que ecuaciones cumple cada una?
   a. $p(t) = (\mathbf{t}^2, \mathbf{t}, \mathbf{t}^2)$
   b. $q(t) = (\cos \mathbf{t}, \cos \mathbf{t}, \mathbf{t})$
   c. $r(t) = (\mathbf{t}, \cos \mathbf{t}, \operatorname{sen} \mathbf{t})$
   d. $s(t) = (\cos \mathbf{t}, \operatorname{sen} \mathbf{t}, \operatorname{sen} \mathbf{t})$

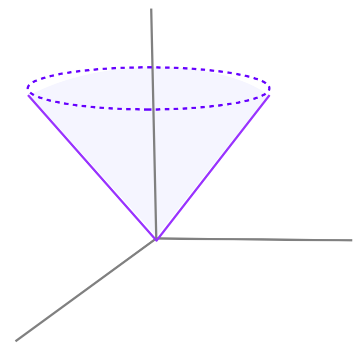
2. Encuentra parametrizaciones para:
   a. Un círculo en el plano **x**=**y**
   b. Un resorte en la dirección del vector (1,1,1).

3. Muestra que la estera de radio 1 con centro en el origen puede parametrizarse como

$$F(u,v) = (\mathbf{u}\cos\mathbf{v}, \mathbf{u}\operatorname{sen}\mathbf{v}, \sqrt{1-\mathbf{u}^2})$$

4. Esboza las siguientes superficies en el espacio y di que ecuaciones satisfacen.
   a. $p(s,t) = (\mathbf{t}, \mathbf{s}, \mathbf{t}+\mathbf{s}^2)$
   b. $q(t,s) = (\operatorname{sen}\mathbf{t}, \mathbf{s}, \cos\mathbf{t})$
   c. $r(s,t) = (\mathbf{t}, \mathbf{s}, \operatorname{sen}\mathbf{s})$

5. Encuentra una parametrización para un cono vertical y di que ecuación cartesiana satisfacen sus puntos.



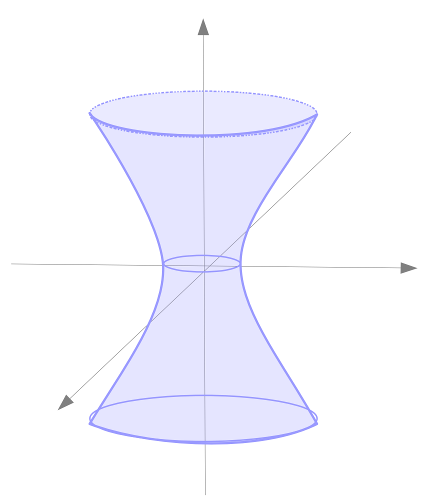
Cuádricas.

Saber como se ven las superficies definidas por ecuaciones puede ser mucho mas difícil que cuando están dadas por parametrizaciones: no hay ni siquiera una manera infalible de hallar puntos de la superficie. Esto puede hacerse solamente con las ecuaciones mas sencillas.
Ya sabemos que las ecuaciones lineales corresponden a planos. Veamos ahora a que superficies corresponden las ecuaciones cuadráticas.

Al tratar de dibujar las soluciones de una ecuación es útil tener en cuenta lo siguiente:

- Al hallar simetrías de la ecuación podemos hallar simetrías en la superficie.
- Fijando una coordenada, podemos ver como cruza a los planos horizontales o verticales.

Ejemplo. ¿Como se ve la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 1$?



Corta a los planos $z=c$ en las curvas $x^2+y^2= 1+c^2$ que son círculos.

Corta a los planos $x=c$ en las curvas $y^2-z^2= 1-c^2$ que son hipérbolas.

Corta a los planos $y=c$ en las curvas $x^2-z^2= 1-c^2$ que son hipérbolas.

Si giramos los puntos (x,y,z) alrededor del eje z, los valores de z y de x^2+y^2 no cambian, así que las soluciones de $x^2+y^2-z^2= 1$ siguen siendo soluciones, por lo que forman una superficie de revolución alrededor del eje z.

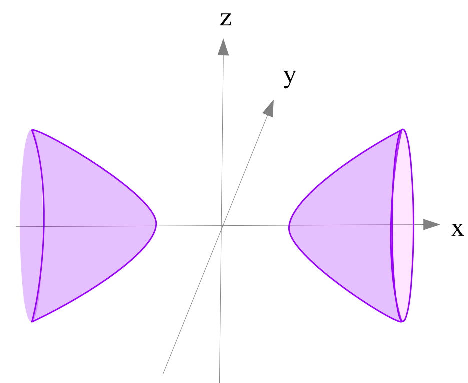
Ejemplo. ¿Como se ve la superficie $x^2 - y^2 - z^2 = 1$?

Corta a $z=c$ en las curvas $x^2 - y^2 = 1+c^2$ que son hipérbolas.

Corta a $x=c$ en las curvas $y^2+z^2 = c^2-1$ que son círculos si $|c|>1$.

Corta a $y=c$ en las curvas $x^2 - z^2 = 1+c^2$ que son hipérbolas.

Si giramos los puntos (x,y,z) alrededor del eje x, los valores de x y de $y^2 + z^2$ no cambian, así que las soluciones de $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ forman una superficie de revolución alrededor del eje x.



Ojo: los ejes están girados para poder ver mejor la superficie

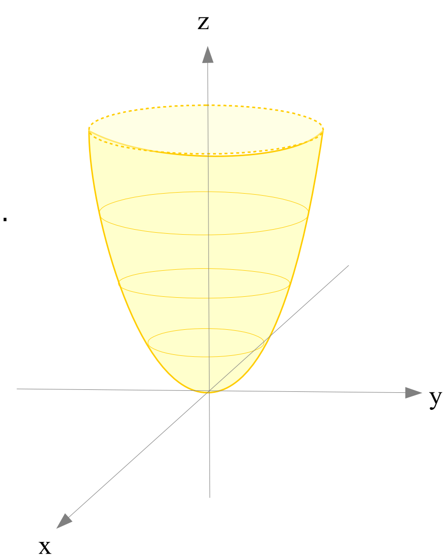
Ejemplo. ¿Como se ve la superficie $x^2 + y^2 = z$?

Corta a los planos $z=c$ en las curvas $x^2+y^2 = c$ que son círculos si $c>0$.

Corta a los planos $x=c$ en las curvas $z = y^2+c^2$ que son parábolas.

Corta a los planos $y=c$ en las curvas $z = x^2+c^2$ que son parábolas.

Si giramos los puntos (x,y,z) alrededor del eje z, las soluciones de la ecuación $x^2 + y^2 - z = 0$ no cambian: forman una superficie de revolución alrededor del eje z.



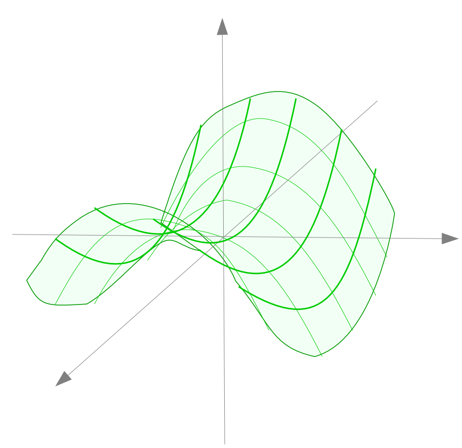
Ejemplo. ¿Como se ve la superficie $x^2 - y^2 = z$?

Corta a los planos $z=c$ en las curvas $x^2 - y^2 = c$ que son hipérbolas

Corta a los planos $x=c$ en las curvas $z = -y^2 + c^2$ que son parábolas que abren hacia abajo.

Corta a los planos $y=c$ en las curvas $z = x^2 - c^2$ que son parábolas que abren hacia arriba.

Esta superficie *no es* de revolución.



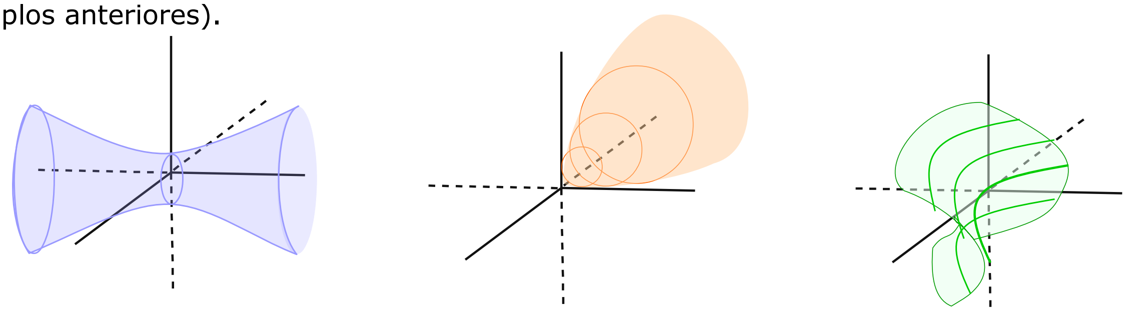
Problemas

6. ¿Como se ven las soluciones de estas ecuaciones en el espacio ?

a. $x^2 + z^2 = 0$ b. $x^2 + z^2 = 1$

c. $x^2 + z^2 = y$ d. $x^2 + z^2 = y^2$

7. Da ecuaciones cuadráticas cuyos conjuntos de soluciones se vean mas o menos así (sin ver los ejemplos anteriores).



8. ¿Como cortan estas superficies a los planos x=c, y=c, z=c ?

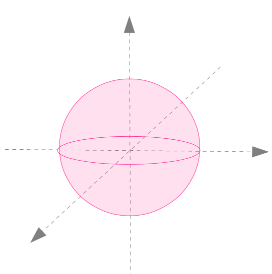
a. $xy = 0$ b. $xy = 1$ c. $xy = z$

¿Puedes imaginarte la forma de las superficies?

Las **cuádricas** son las superficies definidas por ecuaciones de segundo grado en 3 variables, es decir, todas las ecuaciones de la forma:

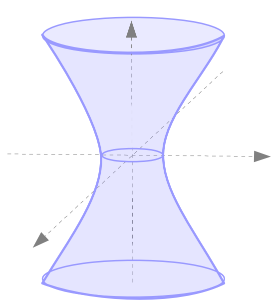
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz = J$$

Queremos saber cuales son las posibles formas de las cuádricas, y ver si podemos adivinar sus formas a partir de sus ecuaciones. Ya vimos algunas:



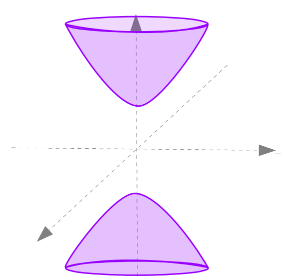
$x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Esfera



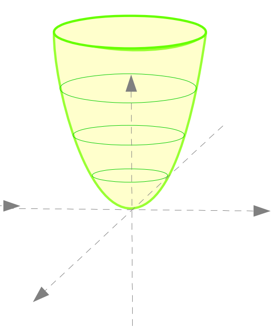
$x^2 + y^2 - z^2 = 1$

Hiperboloide de 1 hoja



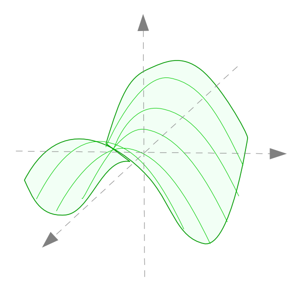
$x^2 + y^2 - z^2 = -1$

Hiperboloide de 2 hojas



$x^2 + y^2 + z = 0$

Paraboloide elíptico



$x^2 - y^2 + z = 0$

paraboloide hiperbolico

Casi todas estas son *superficies de revolución* (se obtienen girando una curva alrededor de una recta)

Es natural pensar que las ecuaciones “parecidas” tienen soluciones que son parecidas. Podemos entonces preguntarnos como afectan los cambios en los coeficientes de una ecuación al conjunto de sus soluciones.

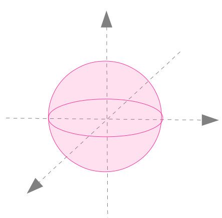
Ejemplo. Considerar ahora las ecuaciones cuadráticas

$x^2+y^2+z^2 = 1$ (1) (*una esfera*)

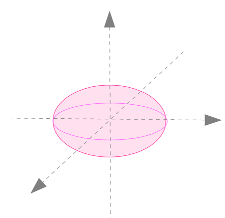
$x^2+4y^2+9z^2 = 36$ (2) (*¿que es?*)

observar que si (a,b,c) es solución de (1) entonces (6a,3b,2c) es solución de (2) así que las soluciones de (2) forman algo como una esfera alargada.

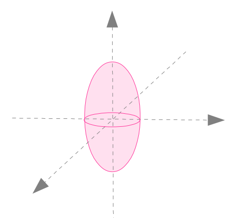
- Unos ejemplos visuales:



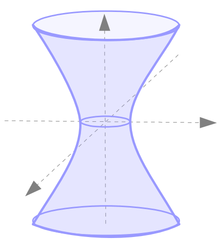
$x^2 + y^2 + z^2 = 1$



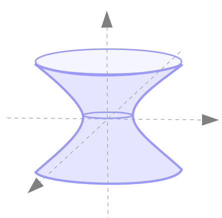
$x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$



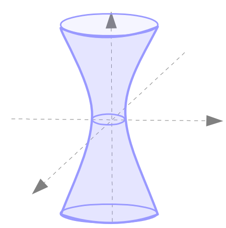
$4x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$



$x^2 + y^2 - z^2 = 1$



$x^2 + y^2 - 4z^2 = 1$



$4x^2 + 4y^2 - z^2 = 1$

Las cuádricas obtenidas estirando las cuádricas de revolución mencionadas antes llevan los mismos nombres, aunque solo tienen un número finito de simetrías.

Así que las ecuaciones de la forma $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$ corresponden a elipsoides si A,B,C,D tienen signos iguales y corresponden a hiperboloides si A,B,C no tienen el mismo signo.

Y las ecuaciones de la forma $Ax^2 + By^2 + Cz = D$ con A,B,C distintos de 0 corresponden a paraboloides elípticos si A y B tienen signos iguales o paraboloides hiperbólicos si A y B tienen signos distintos.

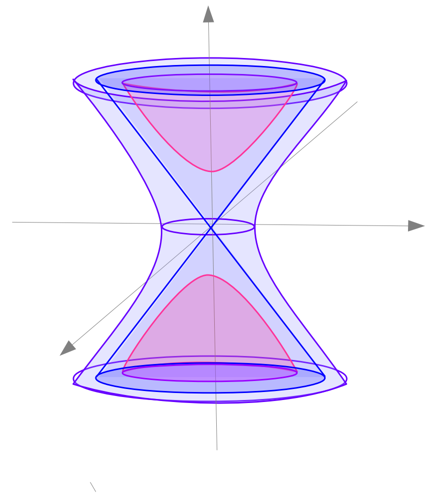
Mientras que algunos cambios en las ecuaciones cambian poco las soluciones, otros pueden cambiarlas radicalmente.

Ejemplo:

$x^2 + y^2 - z^2 = 0$ es un cono

$x^2 + y^2 - z^2 = 1$ es un hiperboloide de 1 hoja

$x^2 + y^2 - z^2 = -1$ es un hiperboloide de 2 hojas



Problemas

10. Da parametrizaciones para estas superficies, y dibújalas con cuidado.

    a. $9y^2 + 4z^2 = 36$ b. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$

11. Describe con cuidado a estas superficies, diciendo como se obtienen de otras mas simétricas:

    a. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$ b. $9x^2 - 4y^2 + z^2 = 36$ c. $x^2 - 4y^2 - 9z^2 = 36$

12. ¿Como se ven las soluciones de estas ecuaciones cuadráticas donde no aparece x?

    a. $y^2 + 2z^2 = 1$ b. $y^2 - 2z^2 = 1$ c. $y^2 - 2z = 1$

Cuádricas y cónicas.

Las cónicas son las curvas formadas por las soluciones de ecuaciones de 2o grado en 2 variables, las cuádricas son las superficies formadas por las soluciones de ecuaciones de 2o grado en 3 variables.

Lema. La intersección de una cuádrica con cualquier plano es una cónica.

Demostración. Los puntos de la cuádrica son los puntos del espacio que satisfacen una ecuación cuadrática

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz=J \qquad (1)$$

Los puntos del plano son los puntos de la forma p+tu+sv, donde p es un punto fijo del plano y u y v son vectores unitarios y ortogonales en el plano. Si $p = (a_1,a_2,a_3)$, $u = (b_1,b_2,b_3)$, $v = (c_1,c_2,c_3)$, entonces los puntos del plano tienen coordenadas $(x,y,z) = (a_1+tb_1+sc_1 , a_2+t_2+sc_2 , a_3+tb_3+sc_3)$.

Si sustituimos x,y,z en la ecuación (1) por sus valores en términos de s y t, entonces (como x,y,z son polinomios de grado 1 en s y t) obtenemos una ecuación de grado 2 en s y t, pero ya sabemos que todas las ecuaciones cuadráticas en dos variables representan cónicas. ▪

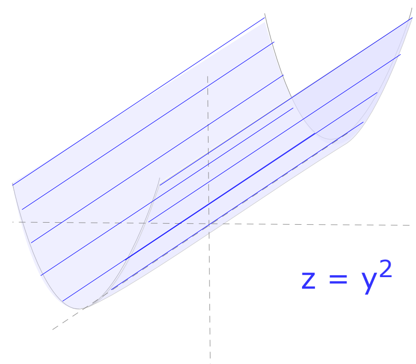
Ejemplos.

- Todos los cortes de un elipsoide deben se elipses (porque son las únicas cónicas acotadas).
- Algunos cortes de los hiperboloide son elipses y otros son hipérbolas. ¿habrán también parábolas?
- Todos los paraboloides contienen parábolas; algunos contienen elipses y otros hipérbolas. ¿podrán contener ambas?

Superficies regladas.

Las superficies que están formadas por líneas rectas se llaman *superficies regladas*.

Los ejemplos mas sencillos de estas superficies son los cilindros sobre una curva en un plano (como las soluciones de ecuaciones en x,y,z que no incluyen a una de las variables). Estos cilindros están formados por rectas en la misma dirección.



Una superficie formada por rectas en distintas direcciones es el cono.

Algo mas raro son las superficies *doblemente regladas,* en las que por cada punto pasan dos lineas rectas.

Teorema. Los hiperboloides de una hoja y los paraboloides hiperbólicos son superficies doblemente regladas.

Demostración. Basta considerar las superficies determinadas por las ecuaciones

$x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (hiperboloide de 1 hoja) y $x^2 - y^2 = z$ (silla de montar)

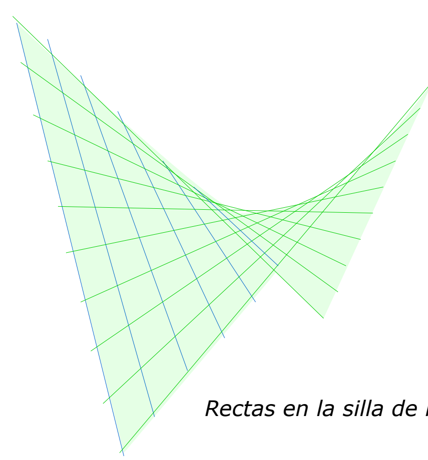
ya que todos los hiperboloides de una hoja y todos los paraboloides hiperbólicos se obtienen estirando a una de estas dos, y los estiramientos transforman rectas en rectas.

Veamos primero a $x^2 - y^2 = z$

esta ecuación se puede escribir como $(x-y)(x+y) = z$

Cuando $x-y=c$ la ecuación queda $c(x+y) = z$ que es una ecuación lineal, así que la intersección del paraboloide con los planos $x-y=c$ son lineas rectas: la intersección de los planos $x-y=c$ y $c(x+y)=z$.

Y cuando $x+y=c$ la ecuación queda $c(x-y)=z$, que es una ecuación lineal, así que la intersección del paraboloide con los planos $x+y=c$ son lineas rectas: la intersección de los planos $x+y=c$ y $c(x-y)=z$.



Rectas en la silla de montar

Veamos ahora cuales rectas del espacio están contenidas en el hiperboliide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Las rectas no horizontales que pasan por un punto (a,b,c) pueden parametrizarse como

$p(t)=(a,b,c)+t(d,e,1)=(a+dt,b+et,c+t)$

Para que una recta este contenida en el hiperboloide necesitamos que $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ o sea

$(a+dt)^2 + (b+et)^2 - (c+t)^2 = 1$ *para todos los valores de t*

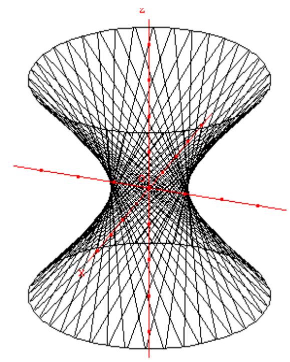
$a^2+2adt+d^2t^2 +b^2+2bet+e^2t^2 - c^2-2ct-t^2 = 1$ y *como (a,b,c) esta en el hiperboloide*, $a^2+ b^2 - c^2 = 1$

$2adt+d^2t^2+2bet+e^2t^2 -2ct-t^2 = 0$

$(d^2+e^2-1)t^2 + (2ad+2be-2c)t = 0$ y *como este polinomio es 0 para todo t, sus coeficientes deben ser 0*

$d^2+e^2 -1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad d^2+e^2 = 1$

$ad+be-c = 0 \quad \leftrightarrow \quad ad+be = c$



Las soluciones de $d^2+e^2 = 1$ son los puntos en el circulo unitario y las soluciones de $ad+be=c$ son los puntos de una recta perpendicular a (a,b) a distancia $c/\sqrt{a^2+b^2}$ del origen.

Como $c^2<a^2+b^2$, el circulo y la recta se intersectan en dos puntos. Así que para cada punto (a,b,c) hay dos valores de (d,e) que cumplen con las dos ecuaciones, esto da dos rectas que pasan por (a,b,c) y están contenidas en el hiperboloide.

(imagen http://debart.pagesperso-orange.fr/ts/paraboloide.html)

Problemas.

13. Demuestra que las cuádricas en $\mathbf{R}^3$ cruzan a cada linea recta en a lo mas 2 puntos, a menos que contengan toda la recta. (hint: parametriza las rectas con funciones lineales)

14. ¿Que curvas se obtienen al cortar a la superficie $x^2 - y^2 - z = 0$ con planos verticales? (considera todos los planos verticales, no solo los paralelos a x=0 o a y=0)

15. a. ¿Será cierto que al cortar un hiperboloide con planos en *cualquier dirección*, el resultado son hipérbolas y elipses? b. ¿Que curvas se obtienen al cortar un paraboloide hiperbólico?

16. Muestra directamente que la superficie $xy = z$ es doblemente reglada (es fácil).

17. Muestra que cada recta en $\mathbf{R}^3$ se puede describir con una sola ecuación cuadrática.
Hint: hay que combinar 2 ecuaciones para obtener una sola ecuación de segundo grado