Transformaciones del espacio

Una **transformación** del espacio $\mathbf{R}^3$ es una función continua e invertible T de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$.
Para decir que la transformación T manda el punto (x,y,z) al punto (x',y',z') escribimos $T(x,y,z)=(x',y',z')$.

La **inversa** de T (la transformación que deshace lo que hace T) es $T^{-1}(x',y',z') = (x,y,z)$.

Hay una gran variedad de transformaciones del espacio, desde las que preservan las formas exactas (las transformaciones **rígidas**, como las traslaciones o las rotaciones), otras que las cambian ligeramente (como los estiramientos) y otras que las dejan casi irreconocibles. Aquí sólo hablaremos de las transformaciones mas simples: las que transforman líneas rectas en otras líneas rectas. Estas tienen expresiones algebraicas sencillas, que permiten ver como se transforman las curvas y superficies y como cambian sus ecuaciones.

Ejemplos.

- La transformación que mueve a todos los puntos del espacio en la dirección del vector (1,2,-3) esta dada por $T(x,y,z) = (x+1,y+2,z-3)$, o sea $(x',y',z')=(x+1,y+2,z-3)$.
  La transformación inversa es $T^{-1}(x',y',z') = (x'-1,y'-2,z'+3)$ ya que $(x,y,z) = (x'-1,y'-2,z'+3)$.

- Podemos estirar el espacio en distintas direcciones por distintos factores, haciendo transformaciones como $E(x,y,z) = (x,2y,{}^{1}/_{3}z)$.

- Podemos reflejar al espacio en el plano y=0 haciendo la transformación $T(x,y,z)=(x,-y,z)$.

- Podemos rotar 90° alrededor del eje z haciendo la transformación $R(x,y,z) = (-y,x,z)$ o sea La transformación inversa es $R^{-1}(x',y',z') = (y',-x',z')$.

Al hacer una transformación del espacio las posiciones y las formas de las figuras en general cambian, y por lo tanto sus ecuaciones también cambian.

Si $T(x,y,z) = (x',y',z')$, entonces los puntos que satisfacían una ecuación en las variables x,y,z van a satisfacer una nueva ecuación en las variables x',y',z'. Podemos hallar la nueva ecuación utilizando la transformación inversa $T^{-1}(x',y',z') = (x,y,z)$ para despejar (x,y,z) en términos de (x',y',z') y reescribiendo la ecuación que estaba en términos de (x,y,z) en términos de (x',y',z').

Ejemplos:

- Podemos estirar la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ verticalmente al doble haciendo la transformación $T(x,y,z) = (x,y,2z)$. La ecuación de la superficie transformada se obtiene reescribiendo la ecuación original en (x,y,z) en términos de las nuevas coordenadas (x',y',z'). Como $(x',y',z') = (x,y,2z)$ entonces $(x,y,z)=(x',y',z'/2)$ así que la nueva ecuación es $x'^2 + y'^2 + (z'/2)^2 = 1$.
- Podemos mover la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ para que su centro quede en (1,2,-3) haciendo la traslación $(x',y',z') = (x+1,y+2,z-3)$. Entonces $(x,y,z) = (x'-1,y'-2,z'+3)$ y la ecuación se convierte en $(x'-1)^2 + (y'-2)^2 + (z'+3)^2 = 14$ o sea $x^2 + y^2 + z^2 - 2x' -4y' + 6z' = 0$.
- Si aplicamos la transformación $(x',y',z') = (-y,x,z)$ (que gira al espacio 90º alrededor del eje z)

  El plano $x + 2y + 3z = 4$ se convierte en el plano $y' - 2x' + 3z' = 4$ o sea $-2x' + y' + 3z' = 4$.

  La ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, se convierte en $y'^2 + (-x')^2 - z'^2= 1$ o sea $x'^2 + y'^2 - z'^2 = 1$ que es igual a la original, así que el hiperboloide no cambia al rotarlo así.

Problemas

1. ¿Cual transformación gira el espacio 180° alrededor del eje x?

2. ¿Que hace geométricamente la transformación $T(x,y,z)=(y,z,x)$? *piensen bien*
   ¿A donde envía T al plano $x+2y+3z=4$?

3. Al aplicar la transformación $T(x,y,z)=(2x,y+1,y+2z)$ ¿a donde va la curva $p(t)=(t,t^2,t-3)$? ¿Que ecuaciones cumple la curva antes y después de la transformación?

4. Da una transformación que convierta al elipsoide $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$ en una esfera.

Traslaciones, homotecias y estiramientos

Las transformaciones mas sencillas de $\mathbf{R}^3$ son las traslaciones $(x´,y´,z´) = (x+h,y+k,z+l)$.
Si aplicamos una traslación a la superficie determinada por la ecuación cuadrática

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz = J$$

su ecuación cambia a

$$A(x'-h)^2 +B(y'-k)^2 +C(z'-l)^2 +D(x'-h)(y'-k) +E(y'-k)(z'-l) +F(x'-h)(z-l)+G(x'-h)+H(y'-k)+I(z'-l) = J$$

y desarrollando y agrupando los términos similares queda:

$$Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + Dx'y' + Ey'z' + Fx'z' + (G-2Ah-Dk-Fl)x' + (H-2Bk-Dh-El)y' + (I-Ek-Fh)z' =$$
$$= (J -Ah^2 -Bk^2 -Cl^2 -Dhk-Ekl-Fhl +Gh+Hk+Il)$$

Así que los coeficientes de los términos cuadráticos no cambian, pero los términos lineales y el término constante pueden cambiar mucho.

Lema. Para cada ecuación cuadrática de la forma $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz = J$ hay una traslación de $\mathbf{R}^3$ que la convierte en otra ecuació donde cada variable aparece solo una vez.

Demostración. Si una variable aparece 2 veces podemos agrupar el términos cuadrático y el lineal y completar el cuadrado, así que haciendo una traslación podemos quitar el término lineal. •

Ejemplo:

$x^2 - 2y^2 + 3x + 4y + 5z = 6$

$(x^2 + 3x) - 2(y^2 - 2y) + 5z = 6$ *agrupar los términos con las mismas variables*

$(x^2 + 3x + {}^9/_4) - 2(y^2 - 2z + 1) + 5z = 6 + {}^9/_4 - 2 = {}^{25}/_4$ *completar los cuadrados*

$(x+{}^3/_2)^2 - 2(y-1)^2 + 5z = {}^{25}/_4$ *hacer* $(x',y',z') = (x+{}^3/_2, y-1, z)$

$x'^2 - 2y'^2 + 5z' = {}^{25}/4$ *En esta ecuación cada variable aparece una vez.*

Y como queda un termino lineal, ahora podemos hacer otra traslación para quitar el termino constante:

$x'^2 - 2y'^2 + 5z' - {}^{25}/4 = 0$

$x'^2 - 2y'^2 + 5(z' - {}^5/_4) = 0$ *y haciendo* $(x'',y'',z'') = (x, y, z' - {}^5/_4)$ *la ecuación queda*

$x''^2 - 2y''^2 + 5z'' = 0$ *que es la ecuación de un paraboloide hiperbólico.*

Ejemplo. ¿Como es el conjunto de puntos del espacio tales que su distancia a un punto fijo P es k veces su distancia a otro punto fijo Q?

Si no nos importa la posición ni el tamaño del conjunto, sino solo su forma, podemos elegir los puntos P=(0,0,1) y Q=(0,0,0).

dist[(x,y,z),(0,0,1)]= k dist[(x,y,z).(0,0,0)] *la condición geométrica*

$\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2} = k \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ *la condición escrita algebráicamente*

$x^2+y^2+(z-1)^2 = k^2 [x^2+y^2+z^2]$ *elevando al cuadrado*

$x^2+y^2+z^2-2z +1 = k^2x^2 +k^2y^2 +k^2z^2$ *desarrollando*

$1 = (k^2-1)x^2 +(k^2-1)y^2 +(k^2-1)z^2 +2z$ *agrupando del lado derecho*

${}^1/_{k^2-1} = x^2 + y^2 + z^2 + {}^2/_{k^2-1}\, z$ *dividiendo entre* k^2-1 *(suponiendo que* $k \neq 1$*)*

${}^1/_{k^2-1} + {}^1/_{(k^2-1)^2} = x^2 + y^2 + [z^2 + {}^2/_{k^2-1}\, z + {}^1/_{(k^2-1)^2}]$ *completando cuadrados*

${}^{k^2}/_{(k^2-1)^2} = x^2 + y^2 + [z+{}^1/_{k^2-1}]^2$ y *si hacemos* $(x',y',z')=(x,y,z+{}^1/_{k^2-1})$ *la ecuación queda*

$x'^2 + y'^2 + z'^2 = {}^{k^2}/_{(k^2-1)^2}$

Así que el conjunto es una esfera de radio ${}^k/_{k^2-1}$ *, si* $k \neq 1$*.*

Una **homotecia** es una transformación de la forma $T(x,y,z) = (kx,ky,kz)$, que estiran o encojen en todas las direcciones por un factor k y por lo tanto cambian el tamaño de las figuras sin cambiar su forma.

Al aplicar la homotecia a la superficie determinada por una ecuación cuadrática

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz = J$ su ecuación cambia a

$A/_{k^2}\, x'^2 + B/_{k^2}\, y'^2 + C/_{k^2}\, z'^2 + D/_{k^2}\, x'y' + E/_{k^2}\, y'z' + F/_{k^2}\, x'z' + G/_k\, x' + H/_k\, y' + I/_k\, z' = J$

así que los términos cuadráticos se dividen entre k^2, los términos lineales se dividen entre k y el término constante no cambia.

Las transformaciones de la forma $T(x,y,z) = (kx,ly,mz)$ estiran al espacio en las direcciones de los ejes x,y,z y lo reflejan en los planos X=0,y=0 o z=0 si k, l o m son negativos.

Recordar que las superficies que se obtienen estirando a las esferas, hiperboloides y paraboloides de revolución y a la silla de montar se llaman *elipsoides*, *hiperboloides* y *paraboloides elípticos* y *paraboloides hiperbólicos* respectivamente.

Lema. Las ecuaciones cuadráticas de la forma $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$ corresponden a un elipsoide (o esfera), un hiperboloide, un cono, un cilindro, 2 planos, 1 plano, una recta, un punto o el vacío, dependiendo de los signos de A, B, C y D.

Demostración. Si $A,B,C\neq 0$ y aplicamos la transformación $(x',y',z') = (\sqrt{|A|}x , \sqrt{|B|}y , \sqrt{|C|}z)$ la ecuación se convierte en $\pm x'^2 \pm y'^2 \pm z'^2 = D$. Si A, B o C son 0, hay una transformación similar que convierte a los coeficientes distintos de 0 en 1 o -1, y ya sabemos como son las soluciones de estas ecuaciones donde los coeficientes son 1, -1 o 0. Intercambiando los papeles de x,y,z los posibles casos son:

$x^2 + y^2 + z^2 = k$	*esfera, punto o el vacío, dependiendo de que k>0, k=0 o k<0*
$x^2 + y^2 - z^2 = k$	*hiperboloide de 1 o 2 hojas o cono, dependiendo de k>0, k<0 o k=0*
$x^2 - y^2 - z^2 = k$	*hiperboloide de 2 o 1 hojas o cono, dependiendo de k>0, k<0 o k=0*
$x^2 + y^2 = k$	*cilindro elíptico, recta o el vacío dependiendo del signo de k*
$x^2 - y^2 = k$	*cilindro hiperbólico o par de planos que se cruzan, dependiendo si k≠0 o si k=0*
$x^2 = k$	*dos planos paralelos, un plano o el vacío dependiendo del signo de k* ▪

Corolario. Las ecuaciones cuadráticas de la forma $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz = G$ corresponden a las anteriores o a paraboloides y cilindros parabólicos.

Demostración. Podemos completar cuadrados y hacer una traslación para convertir la ecuación en una en la que cada variable aparezca una sola vez. Ahora podemos aplicar un estiramiento para ajustar todos los coeficientes a 1,-1 o 0. Ademas de los casos anteriores, aparecen

$x^2 + y^2 + z = k$	*paraboloide eliptico*	$x^2 + y + z = k$	*cilindro parabóloico*
$x^2 - y^2 + z = k$	*paraboloide hiperbólico*	$x^2 + y = k$	*cilindro parabóloico*

Ejemplos.

- La ecuación $4x^2 - 5y^2 + 6z = 7$ puede convertirse en una donde los coeficientes de x,y y z sean 1,-1 y 1 escribiéndola primero como $(2x)^2 - (\sqrt{5}y)^2 + 6z = 7$ y haciendo $x'=2x$, $y'=\sqrt{5}y$, $z'=6z$ queda $x'^2 - y'^2 + z' = 0$. Ya sabemos que esta correspondiente a un paraboloide hiperbólico, asi que la ecuación original corresponde al paraboloide encogido a la mitad en la dirección x, estirado $\sqrt{5}$ veces en la dirección y y estirado al séxtuple en la dirección z.
- Las superficies determinadas por las ecuaciones $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$ y $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D'$ tienen la misma forma y solo difieren por el tamaño si $DD'>0$.
  Para ver esto hagamos la homotecia $(x',y'.z') = (\sqrt{D'/D}\,x, \sqrt{D'/D}\,y, \sqrt{D'/D'}\,z)$
  entonces $(x,y.z) = (\sqrt{D/D'}\,x, \sqrt{D/D'}\,y, \sqrt{D/D'}\,z)$
  $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D \quad \rightarrow \quad A\,{}^{D}/_{D'}\,x'^2 + B\,{}^{D}/_{D'}\,y'^2 + C\,{}^{D}/_{D'}\,z'^2 = D \quad \rightarrow \quad Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 = D'$
  Ojo: si $DD'<0$ el resultado no es cierto!

Lema. El conjunto de puntos del espacio tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es constante es un elipsoide de revolución.

Demostración. Los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es constante forman una elipse. Si L es la línea que une a esos 2 puntos, entonces en cada plano que contiene a L vemos una elipse, y las elipses en todos los plano son idénticas. Así que la superficie se obtiene rotando una elipse alrededor de la línea L. •

Otra demostración. Digamos que los puntos son (0,0,c) y (0,0,-c) y que la suma de las distancia es 2a, entonces la condición es

$\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2} + \sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2} = 2a$ *pasar una raiz al otro lado*

$\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2} = 2a - \sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2}$ *elevar al cuadrado*

$x^2+y^2+(z-c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2} + x^2+y^2+(z+c)^2$ *desarrollar*

$x^2+y^2+ z^2-2cz+c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2} + x^2+y^2+ z^2+2cz+c^2$ *simplificar*

$-4cz-4a^2 = - 4a\sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2}$ *dividir entre -4*

$cz+a^2 = a\sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2}$ *elevar al cuadrado*

$c^2z^2+2a^2cz+a^4 = a^2x^2+a^2y^2+a^2(z+c)^2$ *simplificar*

$c^2z^2+a^4 = a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+a^2c^2$ *agrupar*

$a^4-a^2c^2 = a^2x^2+a^2y^2+(a^2-c^2)z^2$ *voltear y agrupar*

$a^2x^2+a^2y^2+(a^2-c^2)z^2 = (a^2-c^2)a^2$

como $a>c$ entonces $a^2-c^2>0$ así que esta ecuación corresponde al elipsoide de revolución, que se obtiene estirando a una esfera en la dirección de z. •

Lema. El conjunto de puntos del espacio tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es una constante es un hiperboloide de revolución de dos hojas.

Demostración. Los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es constante forman una hipérbola. Si L es la línea que une a esos dos puntos, entonces en cada plano que contiene a L vemos una hipérbola, y las hipérbola en todos los plano son idénticas.
Así que la superficie se obtiene rotando una hipérbola alrededor de L.

Otra demostración. Si los puntos son (0,0,c) y (0,0,-c) y que la diferencia de las distancia es 2a, *entonces*

$\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2} - \sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2} = 2a$

Trabajando igual que antes esta ecuación puede simplificarse a

$a^2x^2+a^2y^2+(a^2-c^2)z^2 = (a^2-c^2)a^2$

como $a<c$ *entonces* $a^2-c^2<0$ así que esta ecuación corresponde a un hipérboloide de revolución de 2 hojas. •

Teorema. El conjunto de puntos de espacio cuya distancia a un punto p es e veces la distancia a un plano es una cuádrica de revolución.

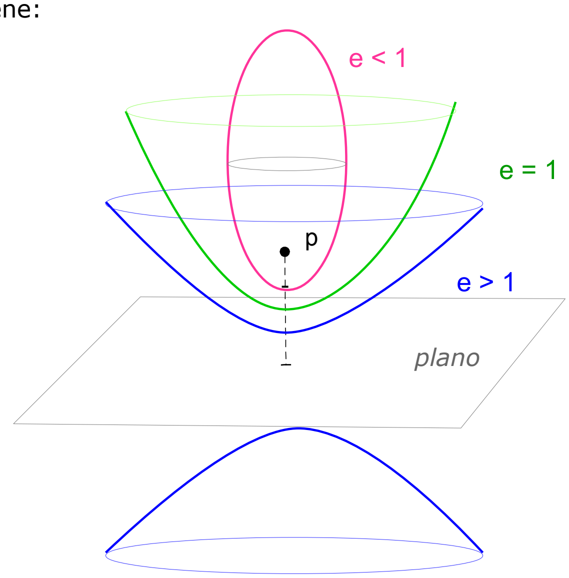
Demostración. Si elegimos las coordenadas de modo que el punto sea (0,0,1) y el plano sea z=0 entonces para los puntos (x,y,z) que satisfacen la condición se tiene:

$\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2} = e\,|z|$

$x^2 + y^2 + z^2- 2z + 1 = e^2z^2$

$x^2+ y^2 + (1-e^2)z^2 - 2z = -1$

Todas estas son superficies de revolución alrededor del eje z (ya que las otras dos variables aparecen combinadas como $x^2+ y^2$)



- *Si* $e=1$ el coeficiente de z^2 es 0, así que la superficie es un *paraboloide de revolución.*
- *Si* $0<e<1$ el coeficiente de z^2 es positivo, y la superficie es un *elipsoide de revolución.*
- Si $e>1$ el coeficiente de z^2 es negativo, y la superficie es un *hiperboloide de revolución de 2 hojas.*

Problemas

5. ¿Que forma tiene el conjunto de soluciones de la ecuación $x^2-2y^2+3z^2-4x+5y-6z = -5$?

6. ¿Que ecuación *simplificada* cumplen los puntos del espacio que están al doble de distancia de (1,2,3) que de (5,-1,-6)? ¿A que superficie debería corresponder esta ecuación?

7. ¿Que ecuación cumplen los puntos del espacio cuya distancia al punto (1,0,0) es el doble de su distancia al plano x=0 ? ¿A que superficie corresponde esta ecuación?

8. ¿Que ecuación cumplen los puntos del espacio cuya distancia al punto (1,0,0) es el doble de su distancia al eje x ? ¿A que superficie corresponde esta ecuación?

9. Muestra que las superficies $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$ y $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D'$ tienen la misma forma (salvo por el tamaño) si DD'>0, y que tienen formas distintas si DD'<0.

Transformaciones afines.

Geométricamente, las transformaciones mas sencillas de $\mathbf{R}^3$ son las que envían líneas rectas en líneas rectas (decimos que *preservan* líneas rectas). Estas transformaciones se llaman **afines**.

Los ejemplos mas sencillos de transformaciones afines son las transformaciones **rígidas**, que preservan las distancias, como las traslaciones, las rotaciones y las reflexiones, otros ejemplos son los estiramientos. Observar que la inversa de una transformación afín es una transformación afín, y que la composición de transformaciones afines también es transformación afín.

Algebraicamente, las transformaciones mas sencillas de $\mathbf{R}^3$ son las de la forma

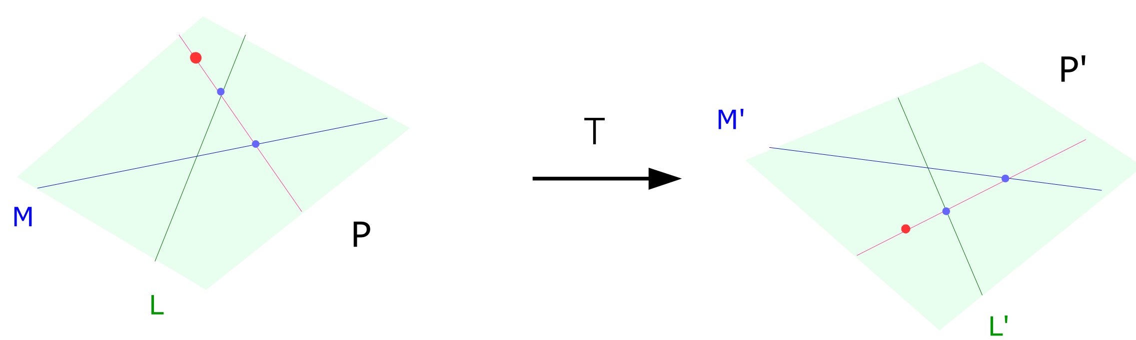
$T(x,y,z)=(ax+by+cz+m \,,\, dx+ey+fz+n \,,\, gx+hy+iz+o\,)$ donde a,b,c,... son constantes.

Veremos que las transformaciones afines de $\mathbf{R}^3$ son precisamente a estas.

Lema. Las transformaciones afines del espacio envían planos en planos y rectas paralelas en rectas paralelas.

Demostración. Veamos primero que T debe mandar planos en planos.

Si P es un plano, tomemos dos rectas L y M en P que se intersecten. Las imágenes de L y M bajo T son dos rectas L' y M' que se intersectan y por lo tanto están contenidas en un plano P'. Todos los puntos de P están en rectas que cruzan a L y a M así que sus imágenes deben estar contenidas en rectas que cruzan a L' y a M', y todas estas rectas están contenidas en P'. Así que la imagen de P esta contenida en P'.



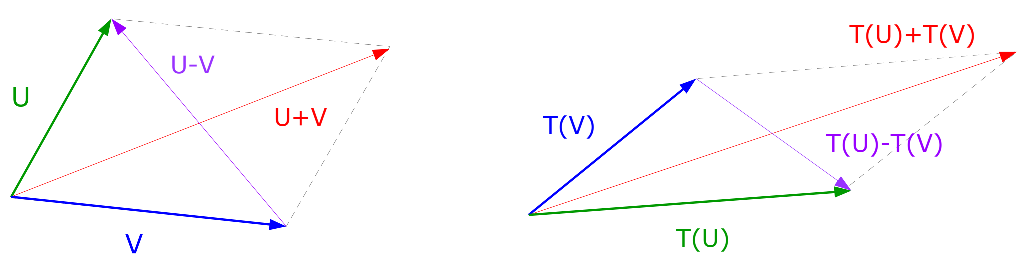
Veamos ahora que una transformación afín T debe mandar rectas paralelas en rectas paralelas.

Si L y N son dos rectas paralelas entonces están contenidas en un plano P. Por lo anterior sus imágenes bajo T son dos rectas L', N' contenidas en otro plano P'. Para ver que L' y N' son paralelas basta ver que no se intersectan, pero esto es cierto porque T es inyectiva. •

Corolario. Las transformaciones afines de $\mathbf{R}^3$ que fijan el origen mandan vectores por el origen a vectores por el origen preservando su suma y su producto por escalares.

Demostración. Por el lema anterior, una transformación afín T preserva paralelogramos, así que el paralelogramo determinado por dos vectores U y V basados en el origen debe ir a dar al paralelogramo determinado por los vectores T(U) y T(V) basados en el origen.

Así que las diagonales del primer paralelogramo van a las diagonales del segundo. Pero las diagonales del primero son U+V y U-V y las del segundo son T(U)+T(V) y T(U)-T(V), por lo tanto T(U+V)=T(U)+T(V) y T(U-V)=T(U)-T(V). Así que T preserva la suma y la resta de vectores.



Falta ver que T preserva múltiplos escalares de vectores. Como T preserva sumas de vectores entonces $T(nV)=nT(V)$ para cada $n \in \mathbf{N}$. Esto implica que $T({}^1/_n V)={}^1/_n T(V)$ para cada $n \in \mathbf{N}$, y por lo tanto $T({}^m/_n V)={}^m/_n T(V)$ para cada $m,n \in \mathbf{N}$.

Como cada numero real r puede aproximarse por racionales entonces la continuidad de T implica que $T(rU)=rT(U)$ para todo r. •

Las transformaciones afines de $\mathbf{R}^3$ que fijan el origen se llaman **transformaciones lineales**.

Lema. Las transformaciones lineales de $\mathbf{R}^3$ son todas las transformaciones de la forma

$$L(x,y,z) = (ax+by+cz , dx+ey+fz , gx+hy+iz) \qquad (1)$$

Demostración. Sea L una transformación lineal y sean L(1,0,0)=(a,d,g), L(0,1,0)=(b,e,h) y L(0,0,1)=(c,f,i).

Como (x,y,z)=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1) entonces

$$L(x,y,z) = xL(1,0,0)+yL(0,1,0)+zL(0,0,1) = x(a,d,g) +y(b,e,h) +z(c,f,i) = (ax+by+cz, dx+ey+fz, gx+hy+iz)$$

Y es fácil ver que todas las transformaciones de la forma (1) son lineales:

L(x+x',y+y',z+z')=(a(x+x')+b(y+y')+c(z+z'), d(x+x')+e(y+y')+f(z+z'), g(x+x')+h(y+y')+i(z+z'))=

= (ax+by+cz, dx+ey+fz, gx+hy+iz) + (ax'+by'+cz', dx'+ey'+fz', gx'+hy'+iz') = L(x,y,z) + L(x',y',z')

L(rx,ry,rz) = (arx+bry+crz, drx+ery+frz, grx+hry+irz) = r (ax+by+cz, dx+ey+fz, gx+hy+iz) = r L(x,y,z) •

Teorema. Cada transformación afín de $\mathbf{R}^3$ es la composición de una transformación lineal con una traslación. Por lo tanto las transformaciones afines de $\mathbf{R}^3$ son de la forma

A(x,y,z)=(ax+by+cz+m , dx+ey+fz+n , gx+hy+iz+o). (2)

Demostración. Si A(0,0,0) = (m,n,o) podemos componer a A con la traslación T(x,y,z)=(x-m,y-n,z-o) para obtener una transformación afín L=T∘A que fija el origen. Por el lema anterior L lineal y es de la forma (1)

L(x,y,z)=(ax+by+cz, dx+ey+fz, gx+hy+iz)

Ahora A es la composición de L con la traslación inversa de T y por lo tanto A es de la forma

A(x,y,z)=(ax+by+cz+m , dx+ey+fz+n , gx+hy+iz+o) •

Aunque todas las funciones de la forma (2) mandan rectas en rectas, no todas son transformaciones de $\mathbf{R}^3$ porque no todas son inyectivas (como la proyección de $\mathbf{R}^3$ al plano z=0).

Ejemplos.

- En $\mathbf{R}^3$ todas las rotaciones en rectas y todas las reflexiones en planos son transformaciones afines, así que deben tener expresiones de la forma (2), el chiste es encontrar los coeficientes.
- Ninguna transformación de $\mathbf{R}^3$ cuya expresión en coordenadas tenga términos no lineales puede preservar a todas las rectas.

Problemas.

10. Si T es la transformación $T(x,y,z)=(x^3,y^3,z^3)$
    a. Muestra que T envía rectas por el origen a rectas por el origen.
    b. T no envía todas las rectas a rectas (da un ejemplo específico)
    c. ¿T envía planos por el origen a planos por el origen?

11. Escribe la transformación afín T(x,y,z)=(y+1,z-2,3-x)
    a. Como composición de una transformación lineal y una traslación.
    b. Como composición de una traslación y una transformación lineal.

    Ojo: no son lo mismo

Lema. Cada transformación lineal de $\mathbf{R}^3$ esta determinada por las imágenes de 3 vectores no coplanares.

Demostración. Si A, B , C son 3 vectores no coplanares, entonces cada vector V en R^3 puede escribirse como combinación lineal de ellos: V=rA+sB+tC y por lo tanto T(V)= T(rA+sB+yC)=rT(A)+sT(B)+tT(C), así que las imágenes de A, B y C determinan a la imagen de V. •

Ejemplo. Si una transformación lineal L del espacio envía los vectores (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) a los vectores (1,2,3), (4,0,-1) y (-2,4,-3) entonces como (x,y,z)=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)

L(x,y,z) = xL(1,0,0)+yL(0,1,0)+zL(0,0,1) =

= x(1,2,3)+y(4,0,-1)+z(-2,4,-3) =

= (x+4y-2z,2x+4z,3x-y-3z).

Lema. Si A,B,C son 3 vectores no coplanares y A',B',C' son otros 3 vectores no coplanares, entonces existe una única transformación lineal T de $\mathbf{R}^3$ tal que T(A)=A', T(B)=B' y T(C)=C'.

Demostración. Como A, B y C no son coplanares, cada vector V en $\mathbf{R}^3$ puede escribirse de una manera única como V=rA+sB+tC. Definamos T(V)= rA'+sB'+tC'. Hay que ver que esta función es lineal y biyectiva.

Si k es un escalar entonces kV= krA+ksB+ktC así que T(kV)=krA'+ksB'+ktC' = kT(V).

Y si U es otro vector, U=r'Á+s'B+t'C entonces U+V=(r+r')Á+(s+s')B+(t+t')C así que

T(U+V)=(r+r')Á'+(s+s')B'+(t+t')C' = T(U)+T(V) y esto muestra que T es lineal.

T es biyectiva ya que A', B' y C' no son coplanares así que cada vector V' de $\mathbf{R}^3$ puede escribirse de manera única como V'=rA'+sB'+tC'. Este vector es la imágen del vector V=rA+sB+tC, así que T es suprayectiva.

Y como dos vectores distintos de $\mathbf{R}^3$ son combinaciones lineales distintas de A,B,C, sus imágenes son combinaciones lineales distintas de A',B' y C', que no pueden dar el mismo vector, así que T es inyectiva. •

Ejemplo. ¿Cual es la transformación lineal de $\mathbf{R}^3$ que envía los vectores (1,0,1), (0,1,1) y (1,-1,1) a los vectores (1,1,1),(1,0,2) y (0,3,1)? Para saber a donde va el vector (x,y,z) hay que escribirlo como combinación lineal de los vectores (1,0,1), (0,1,1) y (1,-1,1):

(x,y,z)= a(1,0,1) + b(0,1,1) + c(1,-1,1)= (a+c,b-c,a+b+c)

x=a+c	x+y=a+b	x-z=-b	c=x-a=x-(2x+y-z)=-x-y+z
y=b-c	y+z=a+2b	2x+y-z=a	
z=a+b+c			

(aquí primero nos deshicimos de c, luego despejamos a y b y finalmente despejamos c)

Así que (x,y,z) = (2x+y-z)(1,0,1) + (z-x)(0,1,1) + (-x-y+z)(1,-1,1)

y por lo tanto T(x,y,z) = (2x+y-z)(1,1,1) + (z-x)(1,0,2) + (-x-y+z)(0,3,1) = (x+y,-x-2y+2z,-x+2z).

Observar que la composición de transformaciones lineales es una transformación lineal, y la inversa de una transformación lineal también es una transformación lineal.

Ejemplo. Sea $T(x,y,z) = (y, 3x+2z, x+y-z)$ y $S(x,y,z) = (x+z, x-y, x+2y+3z)$

Entonces la composición de T y S es $S\circ T(x,y,z) = S(y, 3x+2z, x+y-z) =$

$$= (y+(x+y-z), y-(3x+2y), y+2(3x+2z)+3(x+y-z)) = (x+2y-z, -3x-y, 9x+4y+z)$$

y la composición de S y T es $T\circ S(x,y,z) = T(x+z, x-y, x+2y+3z) =$

$$= (x-y, 3(x+z)+2(x+2y+3z), (x+z)+(x-y)-(x+2y+3z)) = (x-y , 5x+4y+9z, x-3y-2z)$$

observar que $S\circ T$ y $T\circ S$ son distintas!

Ejercicio. ¿Cual es la inversa de la transformación $T(x,y,z) = (y, 3x+2z, x+y-z)$?

La transformación envía el punto (x,y,z) al punto $(x',y',z')=(y, 3x+2z, x+y-z)$. La inversa regresa el punto (x',y',z') al punto (x,y,z), para hallarla tenemos que escribir a (x,y,z) en términos de (x',y',z').

$x'=y$		$y=x'$
$y'=3x+2y$	$y'-2x'=3x$	$x=-\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'$
$z'=x+y-z$	$3z'-y'-x'=-3z$	$z=\frac{1}{3}x'+\frac{1}{3}y'-z'$

(primero despejamos y *y luego despejamos* x *y* z*)*

Así que la inversa es $T^{-1}(x',y',z') = (-\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y', x', \frac{1}{3}x'+\frac{1}{3}y'-z')$

Problemas.

12. Si T es la transformación lineal T de $\mathbf{R}^3$ que envía los puntos (1,0,0), (2,1,0) y (3,2,1) a los puntos (1,0,0), (0,1,3) y (1,-2,3), calcula

    a. T(0,1,0) b. T(0,0,1) c. T(1,2,3) d. T(x,y,z)

13. Para las transformaciones lineales $S(x,y,z) = (y, x+z, y-z)$ y $T(x,y,z) = (x,x-y,x+y+z)$

    a. Calcula las composiciones $T\circ S$, $S\circ T$ y $S\circ S$.

    b. Calcula las inversas de S y de T.

14. a. Encuentra la transformación lineal T de $\mathbf{R}^3$ que lleva el punto (1,0,0) al punto (2,3,0) pero no mueve los puntos del plano x=y.

    b. ¿Cual es la imagen del plano 3x+2y+z=4 al aplicar T?

    c. ¿Y la imagen de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$?

15. Da varios ejemplos de transformaciones lineales del espacio que sean iguales a sus inversas. ¿Como serán todas las transformaciones lineales del espacio con esta propiedad?

16. Demuestra que si {a,b,c,d} y {a'.b',c',d'} son dos conjuntos de 4 puntos no coplanares, entonces existe una única transformación *afín* de $\mathbf{R}^3$ que envía los primeros a los segundos (hint: un lema y un teorema anteriores)