Matrices y transformaciones lineales

Las transformaciones lineales tienen una representación muy conveniente usando matrices. Usualmente los vectores en $\mathbf{R}^3$ se escriben como *renglones* (x,y,z) pero si los escribimos como *columnas* entonces la transformación lineal T(x,y,z) = (ax+by+cz,dx+ey+fz,gx+hy+iz) puede escribirse como el producto de una matriz con el vector:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Los renglones de la matriz son los coeficientes con que aparecen x,y,z en las nuevas coordenadas. Las columnas de la matriz son las imágenes de los vectores básicos (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1).

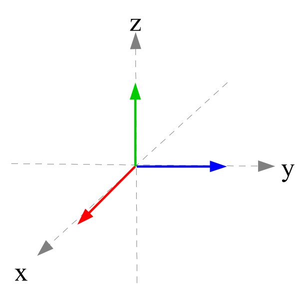
Ejemplo. La transformación T(x,y,z) = (y, 3x+2z, x+y-z) se escribe

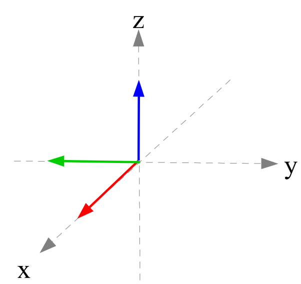
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Observar que T(1,0,0)=(0,3,1)   T(0,1,0)=1,0,1)   T(0,0,1)=0,2,-1).

Ejemplo. La rotación de 90° alrededor del eje x deja fijo al vector (1,0,0), envía (0,1,0) a (0,0,1) y envía (0,0,1) a (0,-1,0) así que la rotación es

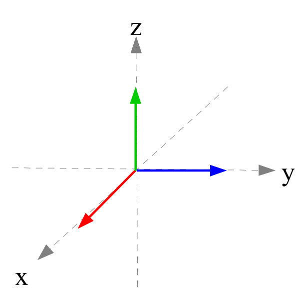
$$R\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

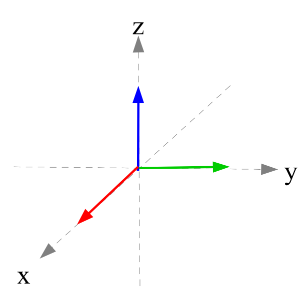




Ejemplo. La reflexión Я en el plano y=z deja fijo al vector (1,0,0), envía (0,1,0) a (0,0,1) y envía (0,0,1) a (0,1,0) así que Я es

$$\text{Я}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$





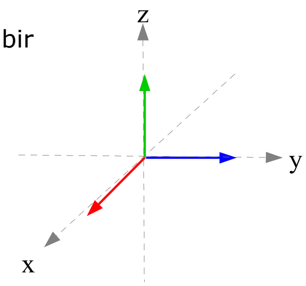
Ejercicio. ¿Como es La rotación de 45° alrededor del eje y?

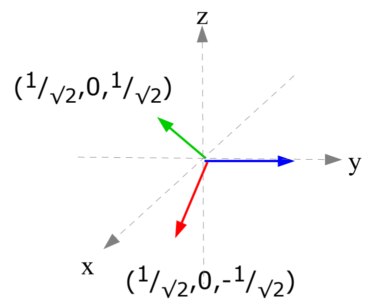
La rotación fija al eje y envía los ejes x y z a las diagonales del plano xz:

$(0,1,0) \to (0,1,0)$ $\quad$ $(1,0,0) \to (1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{2})$ $\quad$ $(0,0,1) \to (1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$

así que como la la rotación es lineal, se puede escribir

$$R\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$





Lema. La composición de transformaciones lineales corresponde a la multiplicación de matrices.

Demostración. Si las transformaciones lineales T y S están representadas por las matrices M y N, es decir si $T(V)=M\cdot V$ y $S(V)=N\cdot V$ para cada vector V, entonces $(S\circ T)(V) = S(T(V)) = S(M\cdot V) = N(M\cdot V) = (N\cdot M)\cdot V$ (ya que el producto de matrices es asociativo) así que $S\circ T$ esta representada por la matriz $N\cdot M$.

Ejemplo. Si las transformaciones T y S están dadas por las matrices

$$M=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad N=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

entonces la composición $T\circ S$ esta dada por el producto

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 9 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

Mientras que la matriz de la composición $S\circ T$ esta dada por el producto

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 9 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Observar que $T\circ S$ y $S\circ T$ son muy distintas!

Ejemplo. ¿Como es la composición de la rotación de 45° en el eje x seguida de la rotación de 45° en el eje y?

Las rotaciones están dadas por las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

la rotación en el eje x seguida de la rotación en el eje y esta dada por la matriz N·M (ojo con el orden!)

$$N\cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}$$

La rotación en el eje y seguida de la rotación en el eje x esta dada por la matriz M·N

$$M\cdot N = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

que es muy distinta!

No todas las matrices de 3x3 dan transformaciones biyectivas de $\mathbf{R}^3$, la transformación T es biyectiva si tiene una inversa (una transformación que compuesta con T sea la identidad).

Corolario. Si la transformación T está dada por la matriz M, su inversa esta dada por la matriz M^{-1}.

Ejemplo. La inversa de la transformación $T(x,y,z)=(x,x+y,x+y+z)$ es $T^{-1}(x,y,z)=(x,y-x,z-y)$

Esto puede comprobarse haciendo el producto de las matrices, que debe ser la identidad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aquí no encontramos la inversa de T, solo checamos que lo es. Mas adelante veremos cuando una matriz es invertible y como encontrar la inversa.

Problemas.

1. Da las matrices de 3 transformaciones lineales *distintas* de $\mathbf{R}^3$ que envíen los ejes x,y,z a las rectas generadas por los vectores (1,2,3) (1,1,1) y (0,-3,1) respectivamente.

2. Da las matrices correspondientes a las siguientes transformaciones lineales
   a. La rotación de 45° alrededor del eje z
   b. La rotación de 30° alrededor del eje y
   c. La rotación de 180° alrededor de la recta x=y=z
   d. La reflexión en el plano x+y+z=0

   hint para c y d : elije 3 vectores no coplanares cuyas imágenes puedas adivinar y úsalas para hallar las imágenes de los vectores (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1).

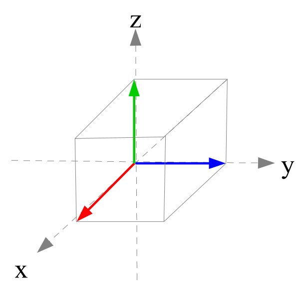
3. Si T(x,y,z)=(x-y+z,x+y-z,x+y+z) y S(x,y,z)=(x-y,y+z,x+z)
   a. Escribe las dos transformaciones usando matrices
   b. Calcula las composiciones T∘S y S∘T usando matrices.

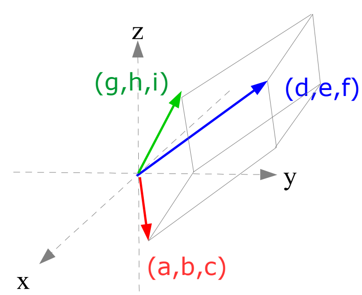
El determinante de una matriz M de 3x3 es

$$\det M = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Lema. El determinante de la matriz M mide cuanto cambian los volúmenes de las figuras al aplicarles la transformación T(V)=M·V.

Demostración. La transformación T convierte a los cubos generados por los vectores (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) (basados en cualquier punto) en los paralelepípedos generados por las imágenes esos 3 vectores bajo T.





El volumen del paralelepípedo generado por los vectores U, V y W esta dado por el triple producto escalar U x V · W, que es el determinante de la matriz cuyos renglones son U, V y W.

Y este determinante es igual al de la matriz cuyas columnas son U, Y y W, que es la matriz M. Así que el determinante mide cuanto cambian los volúmenes de los cubos al aplicarles la transformación.

Los volúmenes de todos los sólidos en $\mathbf{R}^3$ cambian en la misma proporción, ya que todos los sólidos en R^3 pueden aproximarse por cubos y sus imágenes se aproximan por las imágenes de esos cubos. •

Ejemplo. El determinante de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

es $1\cdot5\cdot9+4\cdot8\cdot3+2\cdot6\cdot7-7\cdot5\cdot3-4\cdot2\cdot9-1\cdot8\cdot6 = 45+96+84-105-72-48 = 0$ así que la matriz *no* es invertible. En este caso la función lineal $T(V)=M\cdot V$ aplasta el espacio a un plano.

Ejemplo. La transformación $T(x,y,z) = (2x+4y+z,\ y+2z,\ x+2y+3z)$ esta dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es 5, así que la transformación T multiplica el volumen de cada figura sólida por 5.

Corolario. Si M y N son matrices de 3x3 entonces $\det(M\cdot N) = \det(M) \cdot \det(N)$.

Demostración (geométrica). Si det(M) 0 y $\det(N)\neq0$ entonces M y N corresponden a transformaciones S y T que multiplican los volúmenes por los factores det(M) y det(N) respectivamente.

Así que su composición $T\circ S$ es una transformación que multiplica los volúmenes por el factor $\det(M)\cdot\det(N)$. Pero a la transformación $T\circ S$ le corresponde la matriz $M\cdot N$, así que debe multiplicar los volúmenes por el factor $\det(M\cdot N)$.

Demostración (algebráica). Hay que multiplicar las matrices y comparar sus determinantes, n unas cuentas muy largas. •

Corolario. La matriz M representa una transformación (biyectiva) si y solo si $\det(M)\neq0$.

Demostración (geométrica). Si el determinante no es 0, la función manda un cubo a un paralelepípedo que no está aplastado porque su volumen no es 0, así que las imágenes de los vectores básicos no son coplanares y ya mostramos que en este caso la función es biyectiva y por tanto tiene inversa.

Y si la función es biyectiva entonces la imagen del cubo unitario es un paralelepípedo (no aplastado) así que su volumen, que es el determinante, no es 0.

Demostración (algebráica). Si una matriz M es invertible entonces $\det(M)\mathrm{set}(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) = \det(I) = 1$ así que $\det(M) \neq 0$.

Si $\det(M) \neq 0$ entonces podemos hallar la inversa de M calculando primero su *matriz de cofactores,* que en cada entrada tiene el determinante de la submatriz complementaria (con signos alternados),

La inversa M^{-1} es la transpuesta de la matriz de cofactores, dividida entre el determinante de M.

En el caso de una matriz M de 3x3 la matriz de cofactores M^c es

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad M^c = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Y la matriz inversa de M es

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} (M^c)^T = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Si

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad M^c = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 10 \\ 13 & -1 & -5 \\ -8 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

y entonces

$$M^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & 13 & -8 \\ 2 & -1 & 4 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/20 & 13/20 & -8/20 \\ 2/20 & -1/20 & 4/20 \\ 10/20 & -5/20 & -2/20 \end{pmatrix}$$

Se aprecia aquí que la geometría y el álgebra a veces dan información complementaria. •

Problemas.

4. a. Calcula los determinantes de M y N

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

b. Calcula los determinantes de M·N y de N·M (*no trabajen de mas!*)

5. Encuentra las inversas, si es que existen, usando matrices. Comprueba tus resultados!

a. $S(x,y,z)=(x-y,y+z,x+z)$ b. $T(x,y,z)=(x-y+z,x+y-z,x+y+z)$

6. ¿Cuales de estas matrices corresponden a transformaciones (biyectivas) de $\mathbf{R}^3$? - .
¿Cuales preservan longitudes? ¿Cuales preservan ángulos? ¿Cuales preservan volúmenes?

a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Isometrías

Las transformaciones del espacio que preservan distancias son llamadas **isometrías**.

Las transformaciones del espacio que preservan las formas y tamaños de todas las figuras se se llaman **transformaciones rígidas**.

Ejemplos. Las traslaciones, rotaciones, reflexiones y sus composiciones son isometrías y son transformaciones rígidas. La homotecias preservan la forma pero no el tamaño de las figuras, así que no son isometrias ni transformaciones rígidas.

Lema. Las transformaciones rígidas son lo mismo que las isometrías.

Demostración. Las transformaciones rígidas son isometrías porque envían cada segmento de recta en otro segmento de recta de la misma longitud, así que preservan la distancia entre los puntos.

Para ver que las isometrías son transformaciones rígidas hay que ver que mandan rectas en rectas y planos en planos preservando longitudes, ángulos, áreas y volúmenes.

Las isometrías deben enviar puntos alineados en puntos alineados ya que tres puntos del espacio están alineados si y solamente si la suma de dos de sus distancias es igual a la tercera distancia. Si p,q,r son puntos alineados de modo que $d(p,q)+d(q,r)=d(p,r)$ y si I es una isometría que los envía a los puntos p', q', r' entonces $d(p',q') + d(q',r') = d(p,q) + d(q,r) = d(p,r) = d(p',r')$ de modo que p', q' y r' deben estar alineados.

Como todos los puntos en una recta están alineados, todos deben ir a puntos alineados, asi que la imagen de cada recta está contenida en otra recta

Y como las isometrías preservan longitudes, deben enviar segmentos de recta a otros segmentos de la misma longitud.

Las isometrías preservan ángulos ya que cada triángulo va a dar a otro con los mismos lados, y por lo tanto con los mismos ángulos.

Las isometrías preservan áreas y volúmenes porque cada isometría preserva la forma y tamaño de los triángulos, así que preserva la forma y tamaño de los tetraedros, por lo tanto que preserva sus áreas y volúmenes. Así que las isometrías deben preservar las áreas y volúmenes de todas las figuras que pueden aproximarse bien por uniones de triángulos o tetraedros. •

Lema. La composición de isometrías es una isometría.

Demostración. Si S y T son isometrías entonces para cada par de puntos p,q se tiene d(S(p),S(q)) = d(p,q)
d(T∘S(p),T∘S(q)) = d(T(S(p)),T(S(q))) = d(T(S(p)),T(S(q))) = d(S(p),S(q)) = d(p,q)

Lema. Las isometrías son invertibles y sus inversas son isometrías.

Demostración. Sea I una isometría. Para ver que cada isometría I es invertible basta ver que I es biyectiva. I es inyectiva porque si p y q son puntos distintos entonces d(p,q)>0, así que d(I(p),(q))>0, así que I(p) y I(q) son distintos.

Para ver que I es suprayectiva observar que como I envía rectas en rectas preservando distancias, la imagen de cada recta que debe ser una recta completa, y la imagen de cada plano debe ser un plano completo. Así que la imagen de todo el espacio solo puede ser una recta, un plano o todo el espacio, pero en los dos primeros casos I no podría ser inyectiva, asi que la imagen de I debe ser todo el espacio, lo que dice que I es suprayectiva.

Como I es biyectiva debe tener una inversa I^{-1}. Para ver que I^{-1} es isometría basta ver que

$d[I^{-1}(p),I^{-1}(q)]=d[I(I^{-1}(p)),I(I^{-1}(q))]= d\,[p,q]$ ya que I es isometría. ▪

Como cada isometría I que fija el origen es una transformación lineal que preserva el volumen, debe estar dada por una matriz de determinante 1 o -1. Pero no cualquier matriz con determinante 1 da una isometría.

Decimos que una matriz es **ortogonal** si sus columnas son vectores unitarios y ortogonales.

Ejercicio. ¿Cuales de estas matrices son ortogonales?

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Lema. La transformación lineal dada por la matriz M es una isometría si y solo si M es ortogonal.

Demostración. La transformación T(V)=MV envía los vectores (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) a los vectores columna de la matriz, que llamaremos V_1,V_2 y V_3, y la transformación es $T(x,y,z) = xV_1 + yV_2 + zV_3$.

Si la transformación es una isometría entonces las columnas V1,V2 y V3, deben ser vectores unitarios porque vienen de vectores unitarios y deben ser ortogonales ya que por el teorema de Pitágoras la imagen de un triángulo rectángulo debe ser un triángulo rectángulo.
Si la matriz es ortogonal entonces V_1,V_2 y V_3 son ortogonales y tienen norma 1, y por el T. De Pitágoras
$|T(x,y,z)|^2 = x^2\,|V_1|^2 + y^2\,|V_2|^2 + z^2\,|V_3|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = |(x,y,z)|^2$.
Así que para cualquier par de puntos (x_1,y_1,z_1) y (x_2,y_2,z_2) se tiene
$|T(x_1,y_1,z_1)-T(x_2,y_2,z_2)|^2 = |T(x_1-x_2,y_1-y_2,z-z_2)|^2 = |(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)|^2$ por lo que dice T es isometría •

Problemas.

7. Demuestra que las isometrías del espacio son suprayectivas (basta mostrar que mandan rectas sobre rectas y planos sobre planos).

8. Da una matriz de determinante 1 que no sea ortogonal. Muestra que todas las matrices ortogonales tienen determinante 1 o -1.

9. Muestra que todas las isometrías del espacio son de la forma T(P)=MP+A, donde M es una matriz ortogonal y A es un vector fijo.

Lema. Una matriz M es ortogonal si y solo si $MM^T = 1$.

Demostración. Las entradas (ij) de la matriz MM^T dan los productos punto de las columnas (i) y (j) de M.

Si las columnas de M son vectores ortogonales de norma 1 entonces el producto punto las columnas i y j es 1 cuando i=j y es 0 cuando i≠j, así que MM^T es la matriz identidad.

Recíprocamente, si las entradas (ij) de MM^T son 1 cuando i=j y 0 cuando i≠j, entonces el producto punto de la columna i con ella misma (que es el cuadrado de su norma) es 1 y el producto punto de dos columnas distintas es 0, lo que dice que las columnas son ortogonales. •

Corolario. Si M es una matriz ortogonal entonces $M^{-1} = M^T$.

Este corolario de una manera muy sencilla de encontrar las inversas de las isometrías.

Ejemplo. La matriz N es ortogonal, así que corresponde a una isometría, y su inversa es la transpuesta:

$$M = \begin{pmatrix} {}^1/_{\sqrt3} & {}^1/_{\sqrt6} & {}^{-1}/_{\sqrt2} \\ {}^1/_{\sqrt3} & {}^{-2}/_{\sqrt6} & 0 \\ {}^1/_{\sqrt3} & {}^1/_{\sqrt6} & {}^1/_{\sqrt2} \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} {}^1/_{\sqrt3} & {}^1/_{\sqrt3} & {}^1/_{\sqrt3} \\ {}^1/_{\sqrt6} & {}^{-2}/_{\sqrt6} & {}^1/_{\sqrt6} \\ {}^{-1}/_{\sqrt2} & 0 & {}^1/_{\sqrt2} \end{pmatrix}$$

Dadas 3 direcciones ortogonales en $\mathbf{R}^3$, hay una isometría que lleva los ejes de coordenadas a esas direcciones: basta enviar los vectores básicos i,j,k a tres vectores unitarios u,v, w en esas 3 direcciones y extender linealmente a todos los vectores de $\mathbf{R}^3$ y por el teorema de Pitágoras el resultado es una isometría.

Ejercicio. Dar una isometría que envíe el eje x a la recta x=y=z.

Un vector en la recta x=y=z es U=(1,1,1), un vector perpendicular a U es V=(1,1,-2) y un vector perpendicular a U y a V es W=UxV=(-3,3,0). Así que 3 vectores perpendiculares unitarios son $U/|U|=(^1/_{\sqrt{3}}, ^1/_{\sqrt{3}}, ^1/_{\sqrt{3}})$, $V/|V|=(^1/_{\sqrt{6}}, ^1/_{\sqrt{6}}, ^{-2}/_{\sqrt{6}})$ y $W/|W|=(-^1/_{\sqrt{2}}, ^1/_{\sqrt{2}}, 0)$ y la matriz

$$M = \begin{pmatrix} ^1/_{\sqrt{3}} & ^1/_{\sqrt{6}} & -^1/_{\sqrt{2}} \\ ^1/_{\sqrt{3}} & ^1/_{\sqrt{6}} & ^1/_{\sqrt{2}} \\ ^1/_{\sqrt{3}} & ^{-2}/_{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$$

da una transformación lineal que hace lo que queremos.

Las matrices de rotaciones o reflexiones en direcciones distintas a los ejes coordenados pueden ser difíciles de hallar directamente, pero sabiendo como hacer rotaciones y reflexiones en las direcciones de los ejes es posible hacerlas:

Si I es una isometría que manda el eje x a la recta L, y R es una rotación alrededor del eje x entonces podemos aplicar I^{-1} para llevar la recta L al eje x, ahí podemos rotar y luego aplicar I para regresar L a su lugar original, el resultado $I \circ R \circ I^{-1}$ es una rotación alrededor de la recta L.

De manera similar puede hallarse la reflexión en cualquier plano que pase por el origen.

Ejemplo. ¿Cual matriz da la rotación de 90° alrededor de la recta generada por (2,1,-2)?

Si R es la rotación de 90 alrededor del eje x y hallamos una isometría I que lleve el eje x a esa recta, la rotación alrededor de la recta es la composición $I \circ R \circ I^{-1}$.

Para hallar I, buscamos una matriz ortogonal cuyas columnas sean vectores unitarios y ortogonales y el primero tenga la dirección de (2,1,-2). Un vector ortogonal a este es (1,0,1) y uno perpendicular a los dos es

(2,1,-2) x (1,0,1) = (1,-4,-1). Como $|(2,1,-2)|=3$, $|(1,0,1)|=\sqrt{2}$ y $|(1\text{-}4,-1)|=\sqrt{18}$.

los vectores unitarios en esas direcciones son $(^2/_3,^1/_3,^{-2}/_3)$, $(^1/_{\sqrt{2}},0,^1/_{\sqrt{2}})$ y $(^1/_{\sqrt{18}},^{-4}/_{\sqrt{18}},^{-1}/_{\sqrt{18}})$ y la matriz de la isometría I es

$$M = \begin{pmatrix} ^2/_3 & ^1/_{\sqrt{2}} & ^3/_{\sqrt{18}} \\ ^1/_3 & 0 & ^{-4}/_{\sqrt{18}} \\ ^{-2}/_3 & ^1/_{\sqrt{2}} & ^1/_{\sqrt{18}} \end{pmatrix}$$

La matriz de la rotación de 90° alrededor del eje x es

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de la rotación de 90° alrededor de la recta generada por (2,1,-2) es el producto

$$MRM^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-4}{\sqrt{18}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{18}} & \frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-8}{9} \\ \frac{-7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿Cual matriz da la rotación de 45° alrededor de la recta generada por (2,1,-2)?

La rotación de 45° alrededor del eje x tiene matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Podemos usar la misma isometría I del ejemplo anterior para llevar el eje x a la recta .

La rotación de 45° alrededor de la recta L es la composición $I \circ R \circ I^{-1}$, cuya matriz es el producto

$$MPM^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-4}{\sqrt{18}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8+5\sqrt{2}}{18} & \frac{4+4\sqrt{2}}{18} & \frac{-8+7\sqrt{2}}{18} \\ \frac{4-8\sqrt{2}}{18} & \frac{2+8\sqrt{2}}{18} & \frac{-4-4\sqrt{2}}{18} \\ \frac{-8+\sqrt{2}}{18} & \frac{-4+8\sqrt{2}}{18} & \frac{8+5\sqrt{2}}{18} \end{pmatrix}$$

Moraleja: *las matrices ortogonales pueden verse feas.*

Ejemplo. ¿Que matriz da la reflexión en el plano $2x+y-2z=0$?

Para hallar la reflexión podemos buscar una isometría I que lleve el plano $x=0$ al plano $2x+y-2z=0$.

Si Я es la reflexión en el plano $x=0$, entonces la reflexión buscada es la composición $I\circ\text{Я}\circ I^{-1}$.

La reflexión Я está dada por

$$\text{Я} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para hallar la isometría I, basta mandar el vector (0,0,1) a un vector unitario en la dirección de (2,1,-2) que es un vector normal al plano, y mandar los vectores (1,0,0) y (0,1,0) a dos vectores unitarios en ese plano que sean perpendiculares entre si. Esto ya lo hicimos en el ejercicio anterior, la matriz que obtuvimos era

$$M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} \\ 1/3 & 0 & -4/\sqrt{18} \\ -2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} \end{pmatrix}$$

Así que la matriz correspondiente a la reflexión en el plano $2x+y-2z=0$ es

$$M\text{Я}M^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} \\ 1/3 & 0 & -4/\sqrt{18} \\ -2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{18} & -4/\sqrt{18} & -1/\sqrt{18} \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} \\ 1/3 & 0 & -4/\sqrt{18} \\ -2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{18} & -4/\sqrt{18} & -1/\sqrt{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 & -4/9 & 8/9 \\ -4/9 & 7/9 & 4/9 \\ 8/9 & 4/9 & 1/9 \end{pmatrix}$$

Problemas

10. ¿Cuales de estas matrices corresponden a isometrias de R^3?

$$\text{a.} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} & -1/\sqrt{3} & 5/\sqrt{41} \\ 2/\sqrt{14} & -1/\sqrt{3} & -4/\sqrt{41} \\ 3/\sqrt{14} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{41} \end{pmatrix} \qquad \text{b.} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{11} & 7/\sqrt{66} \\ 1/\sqrt{6} & 3/\sqrt{11} & 1/\sqrt{66} \\ -2/6 & 1/\sqrt{11} & 4/\sqrt{66} \end{pmatrix} \qquad \text{c.} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

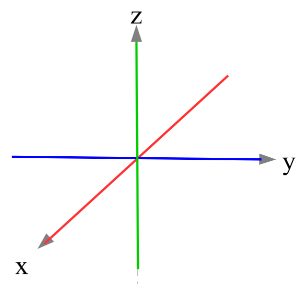
11. Da una isometría que envíe el plano $x=0$ al plano $x+y+z=0$.

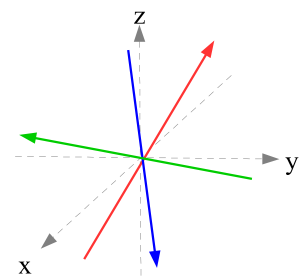
12. Una de estas matrices corresponde a una rotación en una recta y otra corresponde a la reflexión en un plano. ¿cual es cual? (Hint: el determinante)

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

¿Cuales son las inversas de estas matrices? Compruebalas.

13. ¿Hay alguna isometría del espacio que envíe los ejes x,y,z a las rectas generadas por los vectores(1,2,3) (1,1,-1) y (5,-4,1)? Encuéntrala o demuestra que no existe.





14. Da explícitamente una matriz ortogonal M de 3x3 *que no sea diagonal*, tal que M^3=Id.

15. a. Da la matriz de la rotación de 90° alrededor de la recta $x = \frac{1}{2} y = \frac{1}{3} z$

b. Da la matriz de la reflexión en el plano x+2y+3z=0

16. ¿Que isometría se obtiene al componer las 3 rotaciones de 90° alrededor de los ejes x, y, z? (da las 3 matrices y encuentra su producto)