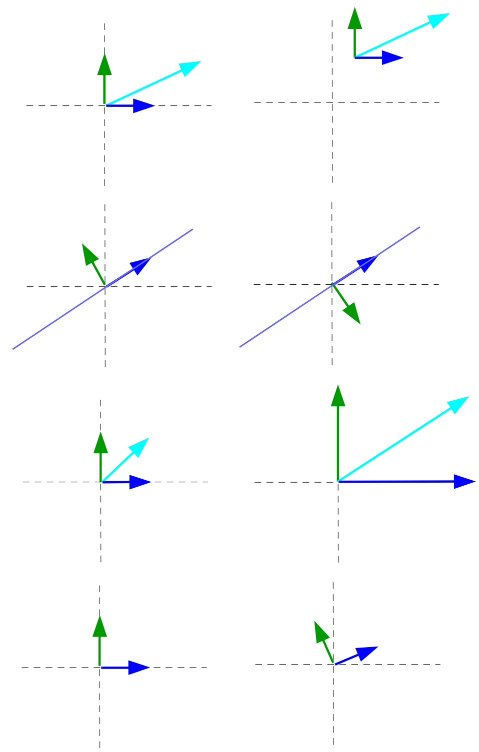
Direcciones invariantes.

Las transformaciones afines mandan lineas paralelas en lineas paralelas, así que podemos decir sin ambigüedad que transforman cada dirección en alguna dirección. Si una dirección no cambia al aplicarle la transformación decimos que es una **dirección invariante** bajo la transformación.

Ejemplos en el plano.



- Las traslaciones dejan a todas las direccio del plano invariantes. Como toda transformación afín es composición de una lineal con un traslación, al buscar direcciones invariantes basta fijarse en las transformaciones lineales.
- La reflexión del plano en una recta deja la dirección de la recta invariante. la dirección perpendicular también es invariante, aunque el sentido se invierte.
- El estiramiento $T(x,y,z)=(2x,3y)$ deja las direcciones de los ejes invariantes, pero deja ninguna otra dirección invariante.
- Una rotación alrededor de un punto no deja ninguna dirección invariante, a menos que el ángulo de rotación sea 180°, en estos casos *todas* las direcciones del plano son invariantes.

Si una transformación lineal del espacio está dada por la matriz M, sus direcciones invariantes están dadas por los vectores $V\neq 0$ tales que $MV=\lambda V$ para algún λ.

Si $MV=\lambda V$ decimos que λ es un **valor propio** y V es un **vector propio** de la matriz M.

¿Como podemos hallar los valores y vectores propios de una matriz?

$MV=\lambda V$ para algún vector V y un escalar λ si y sólo si $(M-\lambda I)V=0$.

Si $(M-\lambda I)V=0$ para un vector $V\neq 0$, la función lineal dada por la matriz $M-\lambda I$ no es inyectiva y su determinante debe ser 0.

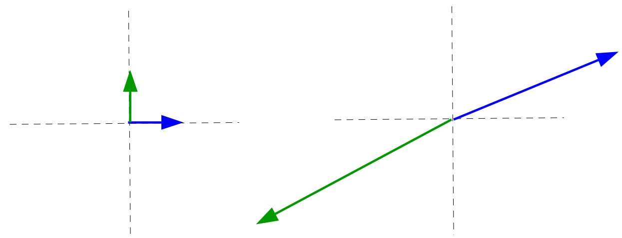
Reciprocamente, si el determinante de $M-\lambda I$ es cero, la función lineal dada por $M-\lambda I$ no es inyectiva y debe existir un vector $V\neq 0$ que vaya a dar al vector 0. Como $(M-\lambda I)V=0$ entonces $MV=\lambda V$ asi que V es un vector propio de M.

Así que para hallar los valores propios de una matriz M necesitamos hallar los valores de λ tales que el determinante de la matriz $M-\lambda I$ es 0.

Veamos primero unos ejemplos en dos dimensiones.

Ejemplo. ¿Cuales son las direcciones invariantes la transformación lineal del plano que manda (1,0) a (4,2) y (0,1) a (-5,-3)? La transformación, que esta dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$



La matriz M-λI es

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

El determinante de M-λI es $(4-\lambda)(-3-\lambda)+10=(\lambda-2)(\lambda+1)$ y los valores propios son $\lambda = 2$ y $\lambda = -1$

Así que hay una dirección en la que los vectores se estiran al doble y otra en la que solo cambian de sentido.

Para $\lambda = -1$, buscamos un vector tal que TV=-1V, es decir (M+I)V=0. Si V=(x,y)

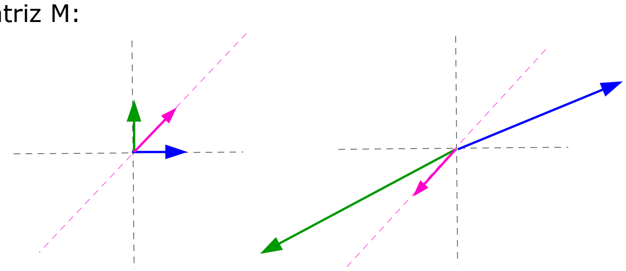
$$(M+I)V = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x-5y \\ 2x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un vector que satisface esta condición es (x,y) = (1,1).

Comprobemos que (1,1) es un vector propio de la matriz M:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así que los vectores en la dirección de (1,1) no cambian de dirección al aplicarles la transformación.



Para $\lambda = 2$, buscamos un vector tal que TV=2V, es decir (M-2I)V=0Si V=(x,y)

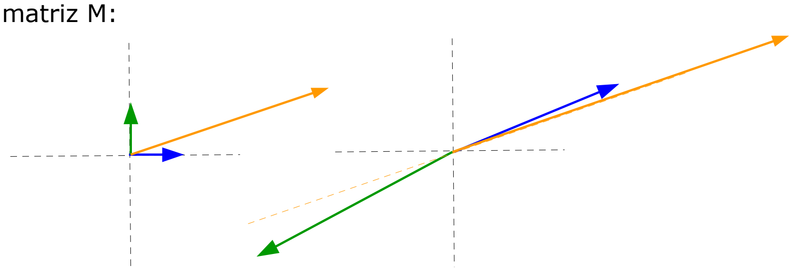
$$(M+I)V = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-5y \\ 2x-5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un vector que satisface esta condición es (x,y) = (5,2).

Comprobamos que (5,2) es un vector propio de la matriz M:

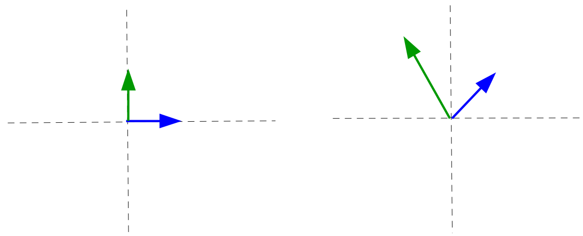
$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Así que los vectores en la dirección de (5,2) no cambian de dirección pero son estirados al doble.



Ejemplo. Considerar la transformación lineal que manda (1,0) a (1,1) y (0,1) a (-1,3), dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



La matriz $M-\lambda I$ es

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es $(1-\lambda)(2-\lambda)+1= \lambda^2-3\lambda+3$. Este polinomio no tiene raíces reales, ya que $\lambda= \frac{3\pm\sqrt{9-12}}{2}$ así que la transformación no deja ninguna dirección invariante.

Teorema. Las transformaciones lineales del plano dejan 0, 1, 2 o todas las direcciones invariantes.

Demostración. Las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz M están dadas por los vectores $V\neq0$ tal que $MV=\lambda V$. Los valores posibles de λ son las raíces de $\det(M-\lambda I)=0$, y como $\det(M-\lambda I)$ es un polinomio de grado 2 en λ, tiene 0, 1 o 2 raíces reales.

Si la transformación lineal estira a dos vectores no paralelos V_1 y V_2 por el mismo factor λ, entonces estira a todas las combinaciones lineales de V_1 y V_2 por ese mismo factor, así que todas las direcciones en el plano deben ser invariantes.

Si para cada λ hay una sola dirección en la que la transformación estira por el factor λ, entonces como hay a lo mas 2 valores de λ, debe haber a lo mas 2 direcciones invariantes. •

Corolario. Las isometrías del plano que fijan algún punto son las rotaciones y reflexiones.

Demostración. Las isometrías de plano que fijan el origen están dadas por matrices ortogonales, y solo hay de dos tipos, ya que solo hay 2 vectores unitarios perpendiculares a un vector unitario dado:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \qquad \text{donde } a^2+b^2=1$$

Para las del primer tipo

$$\det\begin{pmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(a-\lambda)+b^2 = \lambda^2-2a\lambda+a^2+b^2 = \lambda^2-2a\lambda+1$$

las raíces de este polinomio son $\lambda= \frac{2a\pm\sqrt{-4b^2}}{2}$ que no son reales si $b\neq0$, y por lo tanto estas isometrías no dejan direcciones invariantes: son rotaciones por un ángulo θ donde $a=\cos\theta$ $b=\operatorname{sen}\theta$. Si $b=0$ entonces $a=1$ o $a=-1$, que corresponden a la identidad y a la rotación de 180, que dejan todas las direcciones invariantes.

Para las del segundo tipo

$$\det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & -a-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(-a-\lambda)-b^2 = \lambda^2-a^2-b^2 = \lambda^2-1$$

cuyas raíces son $\lambda=1$ y $\lambda=-1$, así que esta isometría deja dos direcciones invariantes, en una ($\lambda=1$) los vectores quedan fijos y en la otra ($\lambda=-1$) cambian de sentido. Para ver que estas isometrías son reflexiones falta que ver que las 2 direcciones invariantes son ortogonales.

Para $\lambda=1$ $\quad \begin{pmatrix} a-1 & b \\ b & -a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-1)x+by \\ bx-(a+1)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ una solución es $(x,y) = (b,-a+1)$ ya que $b^2+a^2-1=0$

Para $\lambda=-1$ $\quad \begin{pmatrix} a+1 & b \\ b & -a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+1)x+by \\ bx+(-a+1)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ una solución es $(x,y) = (-b,a+1)$ ya que $-b^2-a^2+1=0$

Y los vectores propios $(b,-a+1)$ y $(-b,a+1)$ son ortogonales por la misma razón. •

Ejercicio. Muestra que la siguiente matriz corresponde a la reflexión del plano y di en cual recta.

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} 3/5-\lambda & 4/5 \\ 4/5 & -3/5-\lambda \end{pmatrix} = (3/5-\lambda)(-3/5-\lambda)-4/5^2 = \lambda^2-1$$

Es una matriz ortogonal, así que corresponde a una isometría, como tiene 2 direcciones invariantes debe ser una reflexión, la dirección de la recta de reflexión esta dada por el vector propio correspondiente a $\lambda=1$:

$$(M+I)V = \begin{pmatrix} -2/5 & 4/5 \\ 4/5 & -8/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5\, x + 4/5\, y \\ 4/5\, x - 8/5\, y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las soluciones son los vectores (x,y) tales que $-2/5\, x + 4/5\, y = 0$ (la otra ecuación es equivalente a esta)

Así que la recta de reflexión tiene ecuación $x-2y=0$.

Problemas.

1. Encuentra los valores propios y vectores propios de estas matrices:

   a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ b. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. ¿Cuales son las direcciones invariantes de estas transformaciones lineales?
   a. $T(x,y)=(4x+2y, x+3y)$
   b. $T(x,y)=(y, 2x)$

3. Encuentra varias transformaciones del plano que tengan exactamente 1 dirección invariante.

4. ¿Cual de las siguientes matrices corresponde a rotación y cual a una reflexión en el plano? ¿Cual es la recta de reflexión?

$$\begin{pmatrix} 5/13 & 12/13 \\ 12/13 & -5/13 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 12/13 & 5/13 \\ -5/13 & 12/13 \end{pmatrix}$$

Consideremos ahora las transformaciones afines del espacio.

Ejemplos.

- Las traslaciones en $\mathbf{R}^3$ dejan todas las direcciones invariantes. Como cada transformación afín es composición de una transformación lineal y una con traslación que no cambia las direcciones, para hallar sus direcciones invariantes basta considerar las transformaciones lineales.
- La reflexión del espacio en un plano P deja a todas las direcciones en P invariantes. La dirección perpendicular a P también es invariante, aunque su sentido se invierte.
- Una rotación alrededor de una recta R deja a la dirección de R invariante, y no deja otras direcciones invariantes a menos que el ángulo de rotación sea 0° o 180°, en este caso todas las direcciones del plano ortogonal a R son invariantes.

Igual que en el plano, para hallar las direcciones invariantes de una transformación lineal del espacio, debemos hallar los valores propios y vectores propios de la matriz que la representa.

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \det(M-\lambda I) = -\lambda^3 -1$$

cuya única raíz real es $\lambda=-1$, este es el único valor propio de la matriz. Ahora buscamos sus vectores propios

$$(M-I) \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ x+y \\ -y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto sucede si z=-x, y=-x, así que un vector propio es V=(1,-1,-1) y la única recta invariante es -x=y=z.

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$N = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad N\text{-}\lambda I = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \qquad \det(N-\lambda I) = -\lambda^3+3\lambda+2$$

Y las raíces de $-\lambda^3+3\lambda+2$ son $\lambda=-1$, $\lambda=2$.

Busquemos ahora los vectores propios correspondientes a estos valores propios.

Para $\lambda=-1$, buscamos un vector V tal que MV=1V, es decir (M-I)V=0. Si V=(x,y,z)

$$(N+I)V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La única condición es que x+y+z=0, y esto es un plano. En ese plano todas las direcciones son invariantes y los vectores solo cambian de orientación, así que la transformación actúa ahí como una rotación de 90°.

Para $\lambda=2$, buscamos un vector V tal que MV=2V, es decir (M-2I)V=0. Si V=(x,y,z)

$$(N-2I)V = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+y+z \\ x-2y+z \\ x+y-2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto sucede si x=y=z, así que un vector propio es V=(1,1,1), que da la otra dirección invariante.

Hay muchas transformaciones lineales del plano que no dejan direcciones invariante (por ejemplo las rotaciones con ángulo distinto de 180°). Uno puede preguntarse si ocurre lo mismo para las transformaciones del espacio

Teorema. Las transformaciones lineales del espacio dejan al menos una dirección invariante (pueden ser 1, 2, 3 o una infinidad).

Demostración. Para cada matriz M de 3x3, $\det(M-\lambda I)$ es un polinomio real de tercer grado, así que debe tener al menos una raíz real λ, esta da un valor propio y a esta corresponde al menos un vector propio de la matriz, que da una dirección invariante.

Si hay dos vectores no paralelos V_1 y V_2 que se estiran por el mismo factor λ , entonces todas las combinaciones lineales de V_1 y V_2 se estiran por ese mismo factor, así que todas las direcciones del plano generado por V_1 y V_2 son invariantes.

Si para cada λ solo hay una dirección que se estira por el factor λ, entonces como hay a lo mas 3 valores de λ debe haber a lo mas 3 direcciones invariantes. •