Mas dimensiones

Si $\mathbf{R}^2 = \{(x,y) / x,y \in \mathbf{R}\}$ y $\mathbf{R}^3 = \{(x,y,z) / x,y,z \in \mathbf{R}\}$ son buenos modelos del plano y del espacio euclidianos, entonces $\mathbf{R}^4 = \{(x,y,z,w) / x,y,z,w \in \mathbf{R}\}$ puede ser un buen modelo del espacio euclidiano de 4 dimensiones y $\mathbf{R}^n$ puede ser un modelo del espacio euclidiano de n dimensiones.
Los métodos de la geometría analítica (coordenadas, ecuaciones, vectores y matrices) se extienden fácilmente al estudio de la geometría de espacios con cualquier numero de dimensiones.

Solo vamos a hablar de $\mathbf{R}^4$, pero las ideas son similares en mas dimensiones.

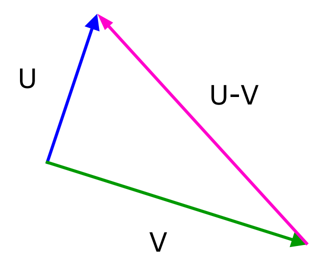
Si fijamos cualquiera de las coordenadas de $\mathbf{R}^4$, obtenemos un *hiperplano* que es igual a $\mathbf{R}^3$.
Podemos pensar en los puntos de $\mathbf{R}^4$ como vectores (de modo que podemos sumarlos coordenada a coordenada y multiplicarlos por un escalar r, multiplicando sus coordenadas por r).

Observar que en $\mathbf{R}^4$:

- un punto y un vector distinto $\mathbf{v}$ de cero definen una recta $\boldsymbol{R} = \{\mathbf{p}+s\mathbf{v} / s \in \mathbf{R}\}$
- un punto y dos vectores no colineales $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ definen un plano: $\boldsymbol{P} = \{\mathbf{p}+s\mathbf{v}+t\mathbf{u} / s,t \in \mathbf{R}\}$
- un punto y tres vectores no coplanares $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ definen un *hiperplano*:
  $\boldsymbol{H} = \{\mathbf{p}+s\mathbf{v}+t\mathbf{u}+r\mathbf{w} / s,t,r \in \mathbf{R}\}$.

Se sigue fácilmente que dos puntos distintos de $\mathbf{R}^4$ determinan una recta, 3 puntos no colineales determinan un plano y 4 puntos no coplanares determinan un hiperplano.

En $\mathbf{R}^4$ podemos medir distancias de manera análoga a como lo hacemos en $\mathbf{R}^3$:
Si $U=(a,b,c,d)$ definimos $|U| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$



Podemos decir que 2 vectores U y V en $\mathbf{R}^4$ son **ortogonales** si se cumple el teorema de Pitágoras
$|U|^2+|V|^2 = |U-V|^2$

Definimos el **producto punto** de dos vectores como
$(a_1,b_1,c_1,d_1) \cdot (a_2,b_2,c_2,d_2) = a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2$

Teorema. Dos vectores U y V en $\mathbf{R}^4$ son ortogonales, si y solo si $U\cdot V = 0$

Demostración. Si $U=(a_1,b_1,c_1,d_1)$ y $V=(a_2,b_2,c_2,d_2)$ entonces
$|U|^2+|V|^2 = a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2+a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2$
$|U-V|^2=(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2+(d_1-d_2)^2 =$
$a_1^2-2a_1a_2+a_2^2+b_1^2-2b_1b_2+b_2^2+c_2^2-2c_1c_2+c_1^2+d_1^2-2d_1d_2+d_2^2$
Así que la igualdad se cumple si y solo si $U\cdot V = 0$. •

Lema. Para cualesquiera 3 vectores U,V,W en $\mathbf{R}^4$ existe otro vector Z ortogonal a los tres.

Demostración. Si U=(a,b,c,d), V=(e,f,g,h) y W=(i,j,k,l), un vector perpendicular a los tres es una solución (x,y,z,w) distinta de (0,0,0,0) del sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$ax+by+cz+dw=0$

$ex+fy+gz+hw=0$

$ix+jy+kz+lw=0$

Los sistemas de 3 ecuaciones lineales homogéneas con 4 incognitas siempre tienen soluciones no triviales ya que podemos usar la primera ecuación para eliminar una variable de las otras ecuaciones, usar la segunda ecuación para eliminar otra variable de las otras y usar la tercera ecuación para eliminar una variable mas, de modo que al final todas las variables quedan en función de algunas que podemos elegir arbitrariamente. •

Ejemplo. Encontrar un vector perpendicular a (1,1,0,1), (1,0,1,1) y (0,1,1,1)

Buscamos una solución no trivial de

$$\begin{array}{l} x+y \quad +w = 0 \\ x \quad +z+w = 0 \\ \quad y+z+w = 0 \end{array} \quad \overset{(2-1)}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{l} x+y \quad +w = 0 \\ \quad -y+z \quad = 0 \\ \quad y+z+w = 0 \end{array} \quad \overset{(3+2)}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{l} x+y \quad +w = 0 \\ \quad -y+z \quad = 0 \\ \quad\quad 2z+w = 0 \end{array}$$

haciendo w=-2 queda z=y=x=1 y un vector perpendicular a los tres vectores dados es (1,1,1,-2)

Lema. En cada plano de $\mathbf{R}^4$ hay dos vectores perpendiculares, y en cada hiperplano hay tres vectores perpendiculares.

Demostración. Si U, V, W son 3 vectores no colineales en $\mathbf{R}^4$, entonces U y $V' = V - \frac{U\cdot V}{U\cdot U}U$ son perpendiculares (ya que $U\cdot V'=0$), y ademas U,V' generan el mismo plano que U y V (porque V' es combinación lineal de U y V y V es combinación lineal de U y V').

Si U, V, W son 3 vectores no coplanares en $\mathbf{R}^4$, entonces U, $V' = \frac{U\cdot V}{U\cdot U}U$ y $W' = W - \frac{W\cdot U}{U\cdot U}U - \frac{W\cdot V'}{V'\cdot V'}V'$ son perpendiculares (los productos punto son 0) y generan el mismo hiperplano que U,V,W (porque U,V',W' son combinaciones lineales de U,V,W, y viceversa). •

Ejemplo. Encuentra 3 vectores en el hiperplano generado por U=(1,1,1,0), V=(1,0,1,1) y W=(0,1,0,1) que sean perpendiculares entre si.

Podemos tomar U',V',W', donde

$U' = U$

$V' = V - \frac{V\cdot U}{U\cdot U}U = (1,0,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,1,0) = (\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3},1)$

$W' = W - \frac{W\cdot U}{U\cdot U}U - \frac{W\cdot V'}{V'\cdot V'}V' = (0,1,0,1) - \frac{1}{3}(1,1,1,0) - \frac{1/3}{5/3}(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3},1) =$

$= (0,1,0,1) - (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0) - (\frac{1}{15},-\frac{2}{15},\frac{1}{15},\frac{3}{15}) = (-\frac{2}{5},\frac{4}{5},-\frac{2}{5},\frac{4}{5})$

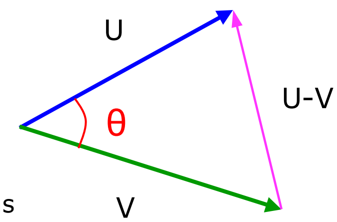
Recordar que dos figuras tienen la misma forma si podemos llevar una a la otra sin deformarla, es decir, sin cambiar las distancias entre sus puntos.

Corolario. Los planos en $\mathbf{R}^4$ tienen la misma forma que $\mathbf{R}^2$, y los hiperplanos en $\mathbf{R}^4$ tienen la misma forma que $\mathbf{R}^3$.

Demostración. Cada plano ***P*** esta generado por 2 vectores perpendiculares y cada hiperplano ***H*** esta generado por 3 vectores perpendiculares, y podemos elegirlos de norma 1.

Entonces la función de $\mathbf{R}^2$ ∈ΘΜΘΚΛ ***P*** que envía (s,t) ∈ O+sU+tV es una función lineal que preserva distancias, por lo que el plano tiene la forma de $\mathbf{R}^2$. Y la función de $\mathbf{R}^3$ al hiperplano ***H*** que envía (s,t,r) ∈ O+sU+tV+rW también es una función lineal que preserva distancias, por lo que el hiperplano tiene la forma de $\mathbf{R}^3$. •

Lema: $U\cdot V = |U|+|V|-2|U||V|\cos\theta$, donde θ es el ángulo que forman los vectores U y V en el plano que los contiene.



Demostración. Fijemonos en un plano P que contenga a U y V

y sea θ el ángulo que forman U y V en P.

Por la ley de los cosenos $|U-V|^2= |U|^2+|V|^2 -2|U||V| \cos\theta$

Si U=(a,b,c,d) y V=(e,f,g,h) y escribimos la expresión anterior en términos de las coordenadas obtenemos

$(a-e)^2+(b-f)^2+(c-g)^2+(d-h)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2 +e^2+f^2+g^2+h^2 - 2|U||V| \cos\theta$

y desarrollando los cuadrados y cancelando términos iguales queda

$-2ae-2df-2cg-2dh = - 2|U||V| \cos\theta$ así que

$ae+2df+cg+dh = |U||V| \cos\theta$ •

Así que el producto punto da una manera de medir el ángulo entre los vectores: $\cos\theta = \dfrac{U\cdot V}{|U||V|}$

Lema. En $\mathbf{R}^4$ no existen mas de 4 vectores linealmente independientes.

Demostración. Dados 5 vectores en $\mathbf{R}^4$, tomemos uno cuya primera coordenada sea distinta de cero, entonces podemos restarles múltiplos de ese vector a los otros para que esa coordenada se haga 0 en todos los otros vectores. Tomemos ahora uno de estos vectores cuya segunda coordenada sea distinta de 0, podemos restarles múltiplos de este vector a los otros para que esa coordenada se haga 0 en todos los otros vectores. Si tomamos uno de estos vectores cuya tercera coordenada sea distinta de 0, podemos restarles múltiplos de ese vector a los otros para que esa coordenada se haga 0 en todos los otros vectores.

Y si tomamos uno de estos vectores cuya cuarte coordenada sea distinta de 0, podemos restarles múltiplos de ese vector a los otros para que esa coordenada se haga 0 en todos los otros vectores.

Al final uno de los vectores debe ser 0 (porque solo ay 4 coordenadas y son 5 vectores). Como este se obtuvo de restarle a uno de los vectores originales algunos múliplos de otros vectores, ese vector original es combinación lineal de los otros, contradiciendo que todos eran linealmente independientes. •

Lema. La ecuación **Ax+By+Cz+Dw=E** representa un hiperplano en $\mathbf{R}^4$.

Demostración. Las soluciones de la ecuación homogénea Ax+By+Cz+Dw=0 son los vectores en $\mathbf{R}^4$ que son ortogonales al vector (A,B,C,D). Estos forman un subespacio ***S*** de $\mathbf{R}^4$ que contiene al menos 3 vectores linealmente independientes, así que ***S*** es por lo menos un hiperplano. Y ***S*** no puede contener 4 vectores linealmente independientes porque junto con el vector ortogonal a ***S*** serian 5 vectores linealmente independientes en $\mathbf{R}^4$.

Las soluciones de la ecuación no homogénea Ax+By+Cz+Dw=E se obtienen sumándoles a las soluciones de Ax+By+Cz+Dw=0 una solución particular de la primera ecuación, Así que las soluciones forman un hiperplano trasladado. •

Corolario. La intersección de dos planos distintos en $\mathbf{R}^4$ es una recta, un punto o el vacío La intersección de dos hiperplanos distintos en $\mathbf{R}^4$ es un plano o el vacío.

Demostración. Para los planos es igual que en , así que veamos que pasa con los hiperplanos. Las otras alternativas serian que dos hiperplanos H y H' se intersectaran en un punto p o en una recta R.
Sean V_1, V_2, V_3 tres vectores basados en p que generen a H y sean V_4, V_5, V_6 tres vectores basados en p que generen a H'. Como V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6 no pueden ser linealmente independientes, uno de ellos debe ser combinación lineal de los otros, digamos $V_6 = a_1V_1+a_2V_2+a_3V_3+a_4V_4+a_5V_5$ así que
$-a_4V_4-a_5V_5+V_6 = a_1V_1+a_2V_2+a_3V_3$
Esto dice que el vector $-a_4V_4-a_5V_5+V_6$ esta en H, y también esta en H', y la intersección de H y H' debe contener al menos a la linea generada por ese vector.
Si H y H' se intersectan en una linea, sea V_1 un vector ($\neq 0$) en esa linea y elijamos V_2, V_3, V_4, V_5 de modo que V_1, V_2, V_3 generen a H y V_1, V_4, V_5 generen a H'.
Como V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 no pueden ser linealmente independientes, uno de ellos debe ser combinación de los otros, digamos V_5 (los otros casos son similares)
$V_5 = a_1V_1+a_2V_2+a_3V_3+a_4V_4$ así que $-a_4V_4+V_5 = a_1V_1+a_2V_2+a_3V_3$
Esto dice que el vector $-a_4V_4-a_5V_5$ que esta en H, también esta en H' porque es igual a $a_1V_1+a_2V_2+a_3V_3$.
Así que la intersección de H y H' debe contener al plano generado por a_1V_1 y por $-a_4V_4-a_5V_5$ •

En $\mathbf{R}^4$ se puede definir un producto vectorial análogo al producto cruz, pero en este caso toma 3 vectores y produce un vector ortogonal a los 3:

Si llamamos **i**=(1,0,0,0), **j**=(0,1,0,0), **k**=(0,0,1,0), **l**=(0,0,0,1) entonces el producto cruz de los 3 vectores **U**=a**i**+b**j**+c**k**+d**l** , **V**=e**i**+f**j**+g**k**+h**l** y **W**=m**i**+n**j**+o**k**+p**l** es el vector **U**x**V**x**W** dado por el determinante de una matriz:

$$\mathbf{U}\times\mathbf{V}\times\mathbf{W} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{l} \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ m & n & o & p \end{pmatrix}$$

Se puede mostrar que **U**x**V**x**W** siempre es ortogonal a **U** , **V** y **W** y análogamente a lo que ocurre en $\mathbf{R}^3$, en $\mathbf{R}^4$ podemos definir un *cuádruple producto escalar*, que es el determinante de la matriz de 4x4 que tiene por renglones a los 4 vectores.

Y análogamente a lo que ocurre en $\mathbf{R}^3$, el cuádruple producto escalar de 4 vectores en $\mathbf{R}^4$ da el *hipervolúmen* (con signo) del paralelepípedo determinado por los 4 vectores

Problemas.

1. Encuentra un vector de $\mathbf{R}^4$ que sea perpendicular a los vectores (1,1,1,1), (1,1,-1,1) y (0,1,1,-1).

2. En el hiperplano de $\mathbf{R}^4$ generado por los vectores (1,1,1,1) (1,1,-1,1) y (0,1,1,-1) encuentra tres vectores que sean perpendiculares entre si.

3. Encuentra la ecuación del hiperplano de $\mathbf{R}^4$ que pasa por el punto (1,2,3,4) y esta generado por los vectores (1,1,1,1), (1,1,-1,1) y (0,1,1,-1).

4. Encuentra dos vectores en $\mathbf{R}^4$ que generen al plano 2x=3y=5z.

5. Muestra que para cada plano ***P*** en $\mathbf{R}^4$, el conjunto de vectores de $\mathbf{R}^4$ que son ortogonales a todos los vectores de ***P*** forman otro plano.

6. Muestra que la intersección de 2 planos distintos en $\mathbf{R}^4$ puede ser una recta, un punto o vacía, y que la intersección de 2 hiperplanos distintos puede ser una plano, una recta, un punto o vacía.

7. Calcula el producto vectorial de los vectores !0,1,1,1) y (1,0,1,1) y (1,1,0,1)

Transformaciones lineales e isometrías de $\mathbf{R}^4$

Las transformaciones lineales de $\mathbf{R}^4$ también pueden representarse por matrices, de modo que para el cada vector (x,y,z,w)

$$\mathbf{T}(x,y,z,w) = M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \qquad \text{donde } M \text{ es una matriz de } 4 \times 4$$

Así, la matriz que corresponde a la composición **T**◦**S** de dos transformaciones lineales es el producto de las matrices correspondientes a **T** y a **S**, y la matriz correspondiente a la inversa de una transformación **T** es la inversa de la matriz correspondiente a **T**.

Ejemplo. La matriz correspondiente a la transformación lineal

$T(x,y,z,w)=(x+2y+3z+4w,\ 5x+6y+7z+8w, 9x+10t+11z+12w,\ 13x+14y+15z+16w)$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

Las isometrías de $\mathbf{R}^4$ que fijan el origen son transformaciones lineales que envían los vectores canónicos (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) y (0,0,0,1) a vectores ortogonales de norma 1, por lo tanto están representadas por *matrices ortogonales*.

Ejemplos.

- La reflexión de $\mathbf{R}^4$ en el hiperplano w=0 esta dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- La isometría de $\mathbf{R}^4$ que manda el eje x al y, el y al z, el z al w y el w al x esta dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entre las isometrías de $\mathbf{R}^4$ deben haber rotaciones y reflexiones, y quizás otras mas.

Las reflexiones son isometrías que fijan las direcciones de un subespacio **S** e invierten las direcciones del subespacio ortogonal $\mathbf{S}^\perp$ (formado por los vectores de $\mathbf{R}^4$ que son ortogonales a todos los vectores en **S**). Esto define la imagen de todos los vectores de $\mathbf{R}^4$, ya que todos son combinaciones lineales de vectores en **S** y en $\mathbf{S}^\perp$.

Así que podemos reflejar a $\mathbf{R}^4$ en cualquier subespacio ***S*** (hiperplano, plano, recta o punto), mandando a los vectores de ***S*** a si mismos y mandando a los vectores del subespacio ortogonal $\boldsymbol{S}^\perp$

Las rotaciones en un subespacio son isometrías que preservan la orientación, fijan los puntos del subespacio y no fijan ninguna otra dirección (excepto si el ángulo es 180°).

Lema. No hay isometrías de $\mathbf{R}^4$ que dejen invariante una sola dirección

Demostración. Si una isometría **I** deja invariante a una recta entonces debe dejar invariante al hiperplano ***H*** ortogonal a la recta, y **I** actúa en ***H*** como una isometría. Pero ***H*** tiene la forma de $\mathbf{R}^3$ y cualquier isometría de $\mathbf{R}^3$ deja una dirección invariante. La dirección invariante en ***H*** es otra dirección invariante de **I**. •

El lema anterior muestra que no podemos rotar a $\mathbf{R}^4$ un ángulo arbitrario alrededor de una recta (a menos que el ángulo sea 180°). Pero si podemos rotar a $\mathbf{R}^4$ alrededor de cualquier plano $\boldsymbol{P}$, enviando los vectores de $\boldsymbol{P}$ a si mismos y rotando los vectores del plano $\boldsymbol{P}^{\perp}$ ortogonal a $\boldsymbol{P}$.

Ejemplo. Las matrices de las rotaciones de 90° y 45° alrededor del plano xy son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Podemos entender mejor que hacen las isometrías de $\mathbf{R}^4$ viendo cuales son sus direcciones invariantes. Estas corresponden a los vectores propios asociados a los valores propios 1 y -1, que son los únicos posibles para una isometría.

Ejemplo. ¿A que clase de isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda=1$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

los vectores propios son los (x,y,z,w) tales que x=y y z=w
y estos forman un plano, generado por (1,1,0,0) y.(0,0,1,1).

Para $\lambda=-1$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

los vectores propios son los (x,y,z,w) tales que x=-y y z=-w
y estos forman otro plano, generado por (1,-1,0,0) y (0,0,1,-1)

Los dos planos son ortogonales, así que la matriz representa una reflexión en el plano x=y, z=w.

Ejemplo. Consideremos la isometría de $\mathbf{R}^4$ que manda el eje x al y, el y al z, el z al w y el w al x :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda=1$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Los vectores propios son los (x,y,z,w) tales que x=y=z=w
estos forman una recta generada por (1,1,1,1)

Para $\lambda=-1$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

los vectores propios son los (x,y,z,w) tales que x=-y=z=-w
estos forman una recta generada por (1,-1,1,-1)

así que la isometría tiene solo dos direcciones invariantes, en una preserva el sentido y en la otra lo invierte, por lo tanto esta isometría no es una rotación ni una reflexión.

Problemas.

8. Da la matriz de una isometría de $\mathbf{R}^4$ que envíe el vector (1,0,0,0) al vector $(^1/_2, ^1/_2, ^1/_2, ^1/_2)$.

9. ¿Las isometrías dadas por las siguientes matrices son rotaciones, reflexiones u otra cosa?

a. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

hint: ve si preservan o no la orientación y encuentra las direcciones invariantes.

10. Encuentra una isometría de $\mathbf{R}^4$ que no deje ninguna dirección invariante.

hint: busca un ejemplo sencillo, tienes que demostrar que sirve!

11. Demuestra que las isometrías de $\mathbf{R}^4$ dejan 0, 2 o una infinidad de direcciones invariantes.