Matrices y transformaciones lineales

Matrices

Son arreglos de números en renglones y columnas

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Las matrices se suman coordenada a coordenada
(solo se pueden sumar si son del mismo tamaño)

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Las matrices se multiplican renglones contra columnas

)sólo se pueden multiplicar si los renglones de la primera tienen el tamaño de las columnes de la segunda)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

Las transformaciones lineales pueden representarse usando matrices.

Si escribimos los vectores no como renglones (x,y,z) sino como *columnas* entonces la transformación lineal

$T(x,y,z) = (ax+by+cz, dx+ey+fz, gx+hy+iz)$ puede escribirse

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Las transformaciones lineales pueden representarse usando matrices.

Si escribimos los vectores no como renglones (x,y,z) sino como *columnas* entonces la transformación lineal
T(x,y,z) = (ax+by+cz,dx+ey+fz,gx+hy+iz)   puede escribirse

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Los renglones de la matriz son los coeficientes de cada variable en las 3 coordenadas

Las **columnas** son las imágenes de los vectores (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1).

Ejemplo. La transformación T(x,y,z) = (y, 3x+2z,4x+y-z)

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ejemplo. La transformación $T(x,y,z) = (y, 3x+2z, 4x+y-z)$

(1,0,0) □ (0,3,4)
(0,1,0) □ (1,0,1)
(0,0,1) □ (0,2,-1)

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ejercicio. ¿A que transformación de R^3 corresponde la matriz

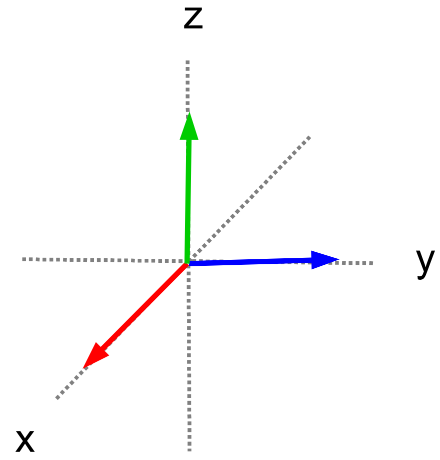
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

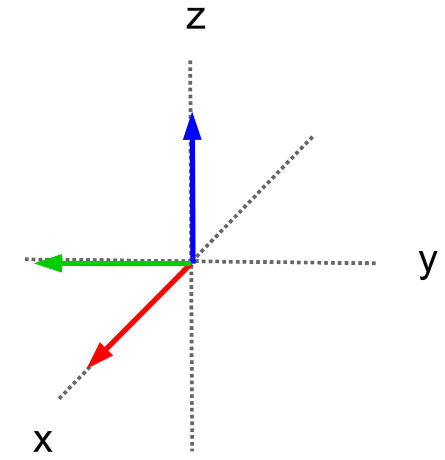
Ejercicio. ¿A que transformación de R^3 corresponde la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$T(x,y,z) = (x+4y,\ 2x+3y-z, y+5z)$

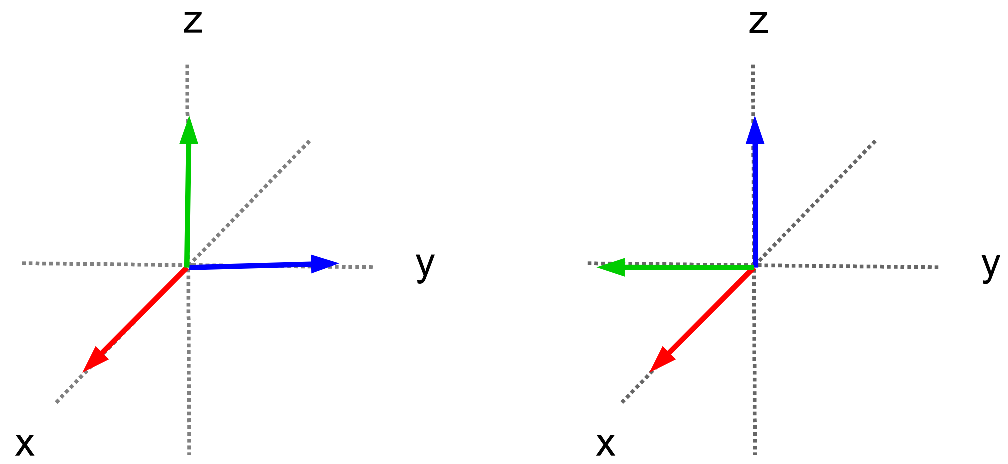
Ejemplo. La rotación de 90 alrededor del eje x





$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

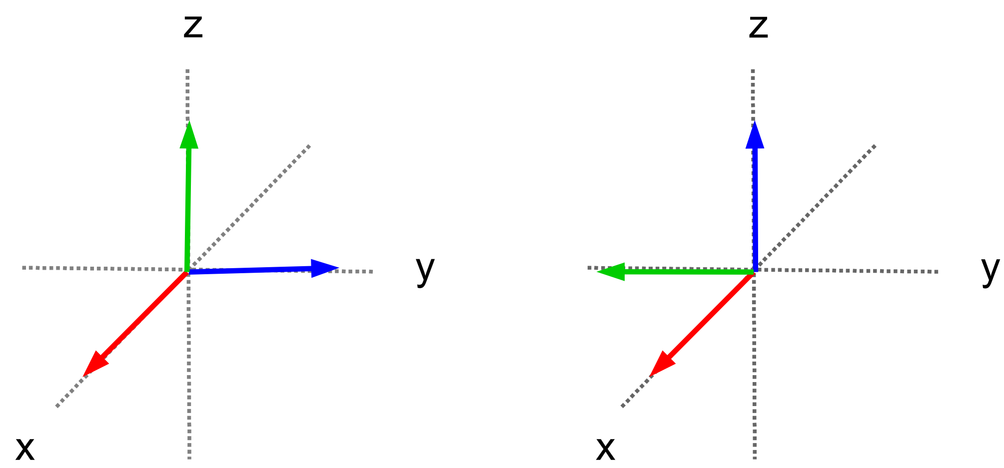
Ejemplo. La rotación de 90 alrededor del eje x



(1,0,0) -> (1,0,0)
(0,1,0) -> (0,0,1)
(0,0,1) -> (0,-1,0)

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

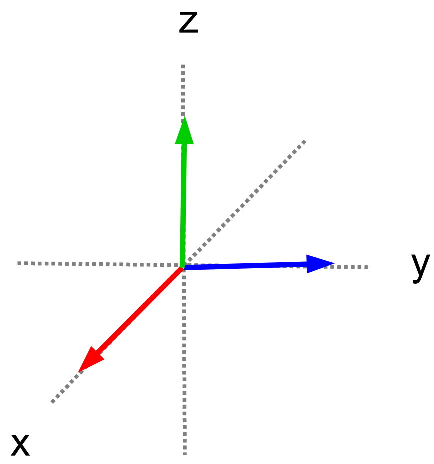
Ejemplo. La rotación de 90 alrededor del eje x

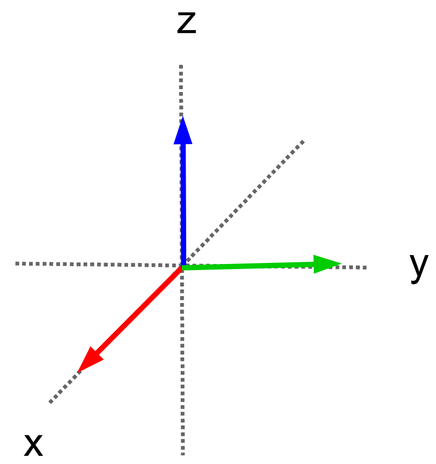


(1,0,0) -> (1,0,0)
(0,1,0) -> (0,0,1)
(0,0,1) -> (0,-1,0)

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

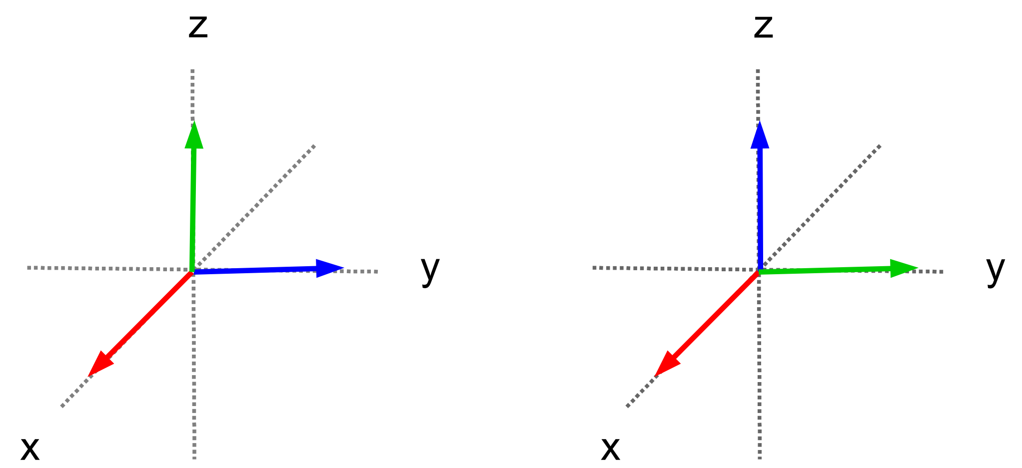
Ejemplo. La reflexión en el plano y=z





$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

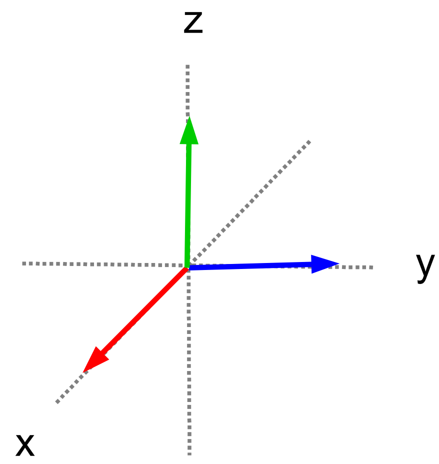
Ejemplo. La reflexión en el plano y=z

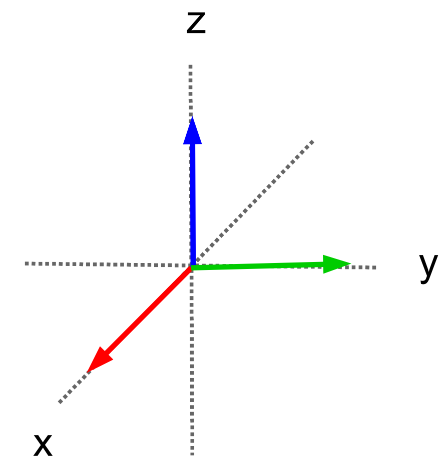


(1,0,0) -> (1,0,0)
(0,1,0) -> (0,0,1)
(0,0,1) -> (0,1,0)

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ejemplo. La reflexión en el plano y=z

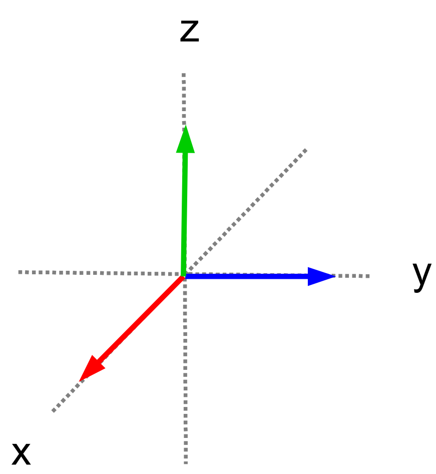


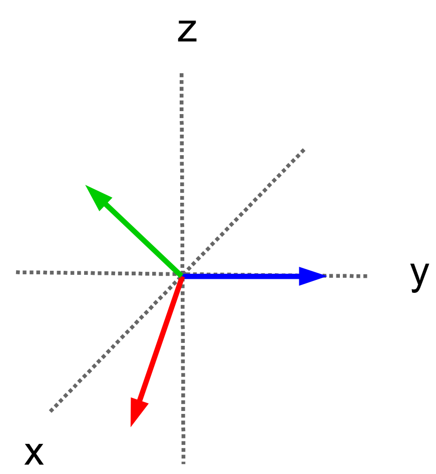


(1,0,0) -> (1,0,0)
(0,1,0) -> (0,0,1)
(0,0,1) -> (0,1,0)

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

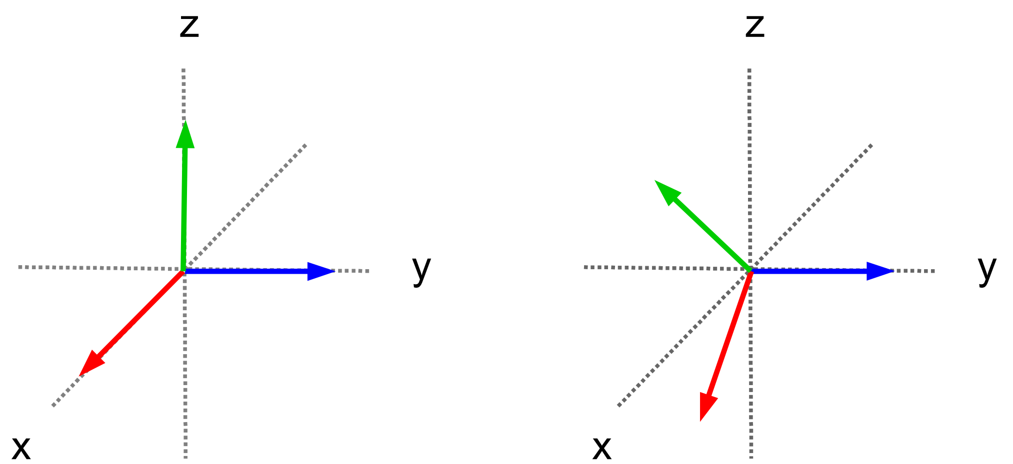
Ejemplo. La rotación de 45 alrededor del eje y





$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ejemplo. La rotación de 45 alrededor del eje y



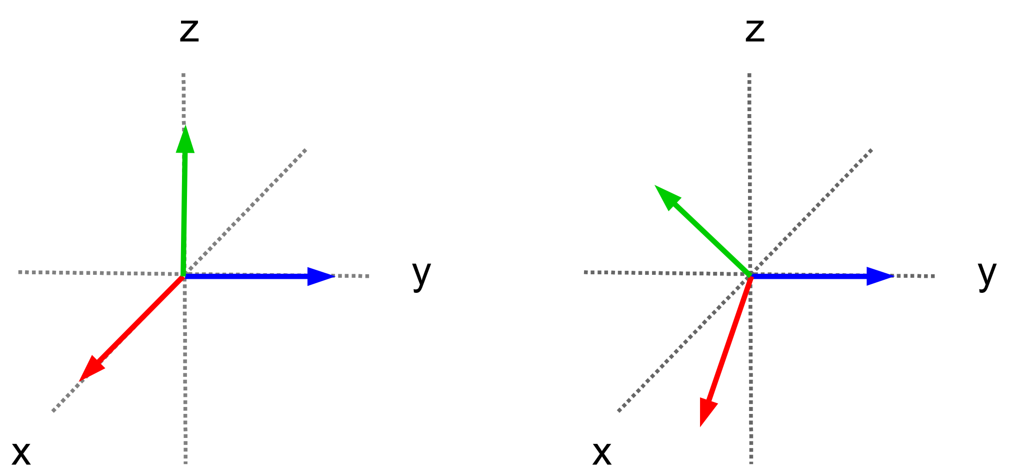
$(0,1,0)$ □ $(0\ ,1,\ 0)$

$(1,0,0)$ □ $({}^{1}/_{\sqrt{2}},0,-{}^{1}/_{\sqrt{2}})$

$(0,0,1)$ □ $({}^{1}/_{\sqrt{2}},0,{}^{1}/_{\sqrt{2}})$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ejemplo. La rotación de 45 alrededor del eje y



(0,1,0) □ (0 ,1, 0)

(1,0,0) □ $(^{1}/_{\sqrt{2}},0,-^{1}/_{\sqrt{2}})$

(0,0,1) □ $(^{1}/_{\sqrt{2}},0,^{1}/_{\sqrt{2}})$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ^{1}/_{\sqrt{2}} & ^{1}/_{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -^{1}/_{\sqrt{2}} & ^{1}/_{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Lema. La composición de transformaciones lineales corresponde a la multiplicación de matrices.

Demostración ?

Lema. La composición de transformaciones lineales corresponde a la multiplicación de matrices.

Demostración. Si las transformaciones lineales T y S están representadas por las matrices M y N, es decir si $T(V)=MV$ y $S(V)=NV$ para cada vector V, entonces $(S\circ T)(V) = S(T(V)) = S(MV) = N(MV) = (NM)V$ así que la transformación $S\circ T$ esta representada por la matriz NM.

Ejemplo. Si las transformaciones T y S están dadas por las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

¿quien es la composición $T \circ S$?

¿y la composición $S \circ T$?

Ejemplo. Si las transformaciones T y S están dadas por las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

¿quien es la composición $T \circ S$? esta dada por la matriz producto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

¿y la composición $S \circ T$? esta dada por la matriz producto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Si las transformaciones T y S están dadas por las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

¿quien es la composición $T \circ S$? esta dada por la matriz producto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 9 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

¿y la composición $S \circ T$? esta dada por la matriz producto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 9 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

No todas las matrices de 3x3 dan transformaciones (biyectivas) de R^3:

T es biyectiva si tiene una inversa, y por el lema anterior si T esta dada por la matriz M, entonces T^{-1} esta dada por la matriz M^{-1} (la matriz que multiplicada por M da la matriz identidad).

Ejemplo. La inversa de la transformación $T(x,y,z)=(x,x+y,x+y+z)$ es

$$T^{-1}(x,y,z)=(x,y-x,z-y)$$

Podemos comprobarlo viendo que el producto de las matrices es la identidad:

Aquí no encontramos la inversa de T, solo checamos que lo es. Mas adelante veremos como encontrar las inversas de las matrices directamente.

Recordar como se calcula el determinante de una matriz de 3x3

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

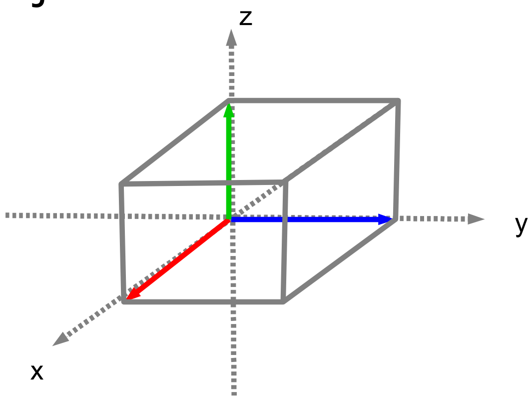
Observar que si intercambiamos renglones por columnas el determinante no cambia

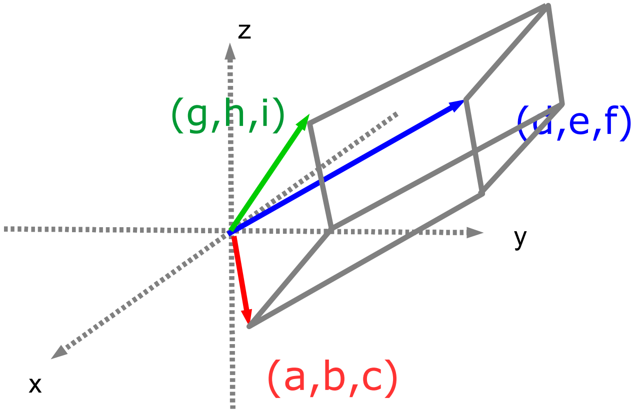
Lema. El determinante de la matriz correspondiente a una transformación T mide cuanto cambian los volúmenes de las figuras al aplicarles T.

Demostración ?

Lema. El determinante de la matriz correspondiente a una transformación T mide cuanto cambian los volúmenes de las figuras al aplicarles T.

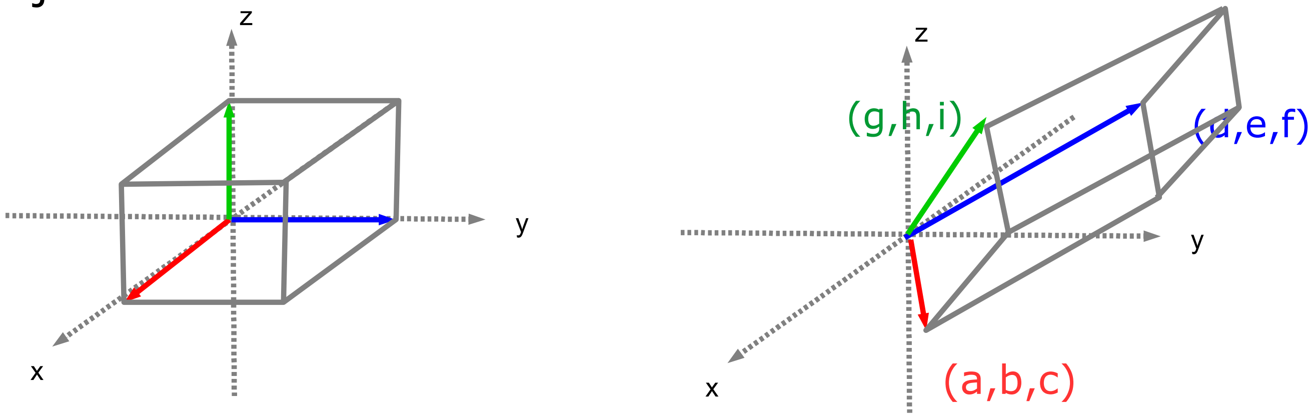
Demostración. La transformación T convierte a los cubos generados por los vectores (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) en los paralelepípedos generados por las imágenes esos vectores bajo T.





Lema. El determinante de la matriz correspondiente a una transformación T mide cuanto cambian los volúmenes de las figuras al aplicarles T.

Demostración. La transformación T convierte a los cubos generados por los vectores (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) en los paralelepípedos generados por las imágenes esos vectores bajo T.

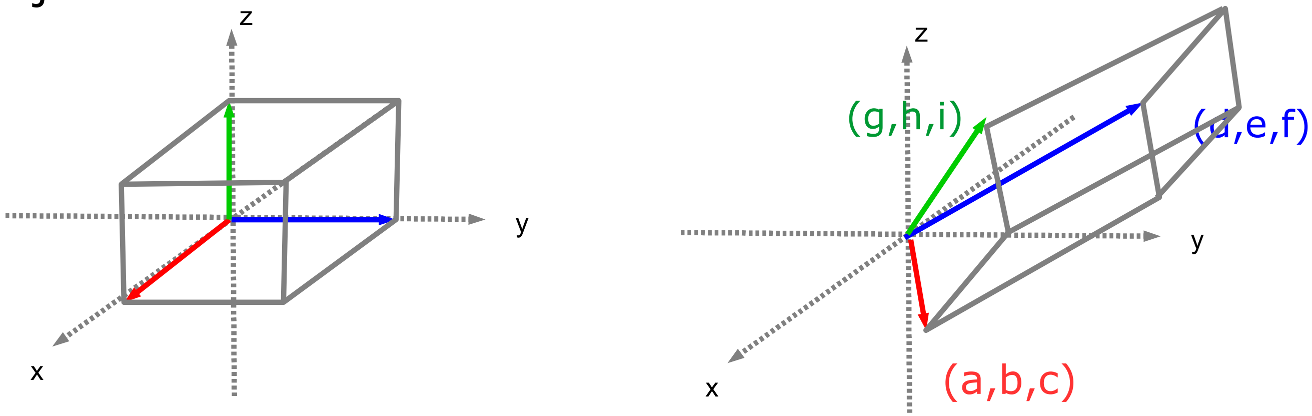


El volumen del paralelepípedo generado por 3 vectores U, V y W es U x V · W,

que es igual al determinante de la matriz que tiene a los 3 vectores como renglones, o como columnas.

Lema. El determinante de la matriz correspondiente a una transformación T mide cuanto cambian los volúmenes de las figuras al aplicarles T.

Demostración. La transformación T convierte a los cubos generados por los vectores (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) en los paralelepípedos generados por las imágenes esos vectores bajo T.



Así que el determinante mide cuanto cambian los volúmenes de los cubos al aplicarles la transformación.

Los volúmenes de todos los sólidos en R^3 cambian en la misma proporción, ya que los sólidos pueden aproximarse por cubos y sus imágenes se aproximan por las imágenes de esos cubos.

Ejemplo. Si $T(x,y,z) = (x+2y+3z, 4x+5y+6z.7x+8y+9z)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

det M =

Ejemplo. Si T(x,y,z) = (x+2y+3z, 4x+5y+6z.7x+8y+9z)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

det M = 0

Así que la matriz NO es invertible y T no es biyectiva
debe aplastar el espacio a un plano o a una recta.

Ejemplo.

La transformación $T(x,y,z) = (2x+4y+z,\ y+2z,\ x+2y+3z)$ esta dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es

así que T aumenta todos los volúmenes

Ejemplo.

La transformación $T(x,y,z) = (2x+4y+z,\ y+2z,\ x+2y+3z)$ esta dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es

así que T aumenta todos los volúmenes

Ejemplo.

La transformación $T(x,y,z) = (2x+4y+z,\ y+2z,\ x+2y+3z)$ esta dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es 5

así que T aumenta todos los volúmenes al quíntuple

Corolario. Si M y N son matrices de 3x3 entonces det(MN) = det(M) det(N).

Demostración?

Corolario. Si M y N son matrices de 3x3 entonces det(MN) = det(M) det(N).

Demostración (algebráica). Basta multiplicar las matrices y comparar sus determinantes, pero estas son unas cuentotas •

Corolario. Si M y N son matrices de 3x3 entonces det(MN) = det(M) det(N).

Demostración (geométrica). M y N corresponden a transformaciones S y T que multiplican los volúmenes por los factores det(M) y det(N) respectivamente.

Así que su composición $T \circ S$ es una transformación que multiplica los volúmenes por el factor det(M)·det(N).

Pero a la transformación $T \circ S$ le corresponde la matriz MN, así que debe multiplicar los volúmenes por el factor det(MN). •

Corolario. La matriz M representa una transformación (biyectiva) si y solo si su determinante es distinto de 0.

Demostración ?

Corolario. La matriz M representa una transformación (biyectiva) si y solo si su determinante es distinto de 0.

Demostración geométrica. Si el determinante no es 0 entonces la función manda un cubo a un paralelepípedo no aplanado, así que las imágenes de los 3vectores básicos son 3 vectores no coplanares y ya mostramos que en este caso la función es biyectiva y por tanto tiene inversa.

Y si la función es biyectiva entonces la imagen del cubo unitario es un paralelepípedo no aplanado, así que su volumen, que es el determinante, no es 0. ●

Corolario. La matriz M representa una transformación (biyectiva) si y solo si su determinante es distinto de 0.

Demostración algebráica. Si una matriz M es invertible entonces det(M)set(M^{-1}) = det(MM^{-1}) = det(I) = 1 así que det(M) ≠ 0.

Y si det M ≠ 0 entonces podemos hallar la inversa de la matriz explícitamente:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} \begin{matrix} e & f \\ h & i \end{matrix} & \begin{matrix} d & f \\ g & i \end{matrix} & \begin{matrix} d & e \\ g & h \end{matrix} \\[1ex] \begin{matrix} b & c \\ h & i \end{matrix} & \begin{matrix} a & c \\ g & i \end{matrix} & \begin{matrix} a & b \\ g & h \end{matrix} \\[1ex] \begin{matrix} b & c \\ e & f \end{matrix} & \begin{matrix} a & c \\ d & f \end{matrix} & \begin{matrix} a & b \\ d & e \end{matrix} \end{pmatrix}^{T}$$

Ejercicio. Encuentren la inversa de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Encuentren la inversa de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Det M = 22 ≠ 0 así que sí tiene inversa

$$M^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} \begin{matrix}4 & 0\\5 & -1\end{matrix} & \begin{matrix}2 & 0\\0 & -1\end{matrix} & \begin{matrix}2 & 4\\0 & 5\end{matrix} \\ \\ \begin{matrix}3 & 2\\5 & -1\end{matrix} & \begin{matrix}1 & 2\\0 & -1\end{matrix} & \begin{matrix}1 & 3\\0 & 5\end{matrix} \\ \\ \begin{matrix}3 & 2\\4 & 0\end{matrix} & \begin{matrix}1 & 2\\2 & 0\end{matrix} & \begin{matrix}1 & 3\\2 & 4\end{matrix} \end{pmatrix}^{T} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 10 \\ 13 & -1 & -5 \\ -8 & 4 & -2 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} {}^{4}/_{22} & {}^{13}/_{22} & -{}^{8}/_{22} \\ {}^{2}/_{22} & -{}^{1}/_{22} & {}^{4}/_{22} \\ {}^{10}/_{22} & -{}^{5}/_{22} & -{}^{2}/_{22} \end{pmatrix}$$