Isometrías y matrices ortogonales

Las transformaciones del espacio que preservan distancias son llamadas **isometrías**.

Las transformaciones del espacio que preservan distancias son llamadas **isometrías**.

Las transformaciones del espacio que mandan rectas en rectas y preservan longitudes, ángulos, áreas y volúmenes se llaman **transformaciones rígidas**.

Las transformaciones del espacio que preservan distancias son llamadas **isometrías**.

Las transformaciones del espacio que mandan rectas en rectas y preservan longitudes, ángulos, áreas y volúmenes se llaman **transformaciones rígidas**.

Ejemplos. Todas las traslaciones, rotaciones, reflexiones y sus composiciones son isometrias y son transformaciones rígidas.

Las transformaciones del espacio que preservan distancias son llamadas **isometrías**.

Las transformaciones del espacio que mandan rectas en rectas y preservan longitudes, ángulos, áreas y volúmenes se llaman **transformaciones rígidas**.

Ejemplos. Todas las traslaciones, rotaciones, reflexiones y sus composiciones son isometrias y son transformaciones rígidas.

Como las transformaciones rígidas envían rectas en rectas y preservan longitudes, entonces preservan distancias, así que las transformaciones rígidas son isometrías

Lema. Las isometrías son transformaciones rígidas.

Lema. Las isometrías son transformaciones rígidas.

Demostración. Veamos primero que preservan lineas rectas.

Por la desigualdad del triángulo tres puntos están alineados si y solamente si la suma de dos de sus distancias es igual a la tercera distancia.

Si p,q,r son tres puntos alineados de modo que $d(p,q)+d(q,r)=d(p,r)$

y I es una isometría que los envía a los puntos p', q', r' entonces

$$d(p',q') + d(q',r') = d(p,q) + d(q,r) = d(p,r) = d(p',r')$$

de modo que p', q' y r' deben estar alineados.

Lema. Las isometrías son transformaciones rígidas.

Demostración. Veamos primero que preservan lineas rectas.

Por la desigualdad del triángulo tres puntos están alineados si y solamente si la suma de dos de sus distancias es igual a la tercera distancia.

Si p,q,r son tres puntos alineados de modo que $d(p,q)+d(q,r)=d(p,r)$

y I es una isometría que los envía a los puntos p', q', r' entonces

$$d(p',q') + d(q',r') = d(p,q) + d(q,r) = d(p,r) = d(p',r')$$

de modo que p', q' y r' deben estar alineados.

Para ver que una isometría debe preservar ángulos basta observar que debe enviar cada triángulo a otro con los mismos lados, y por lo tanto con los mismos ángulos.

Como cada isometría preserva longitudes y ángulos, debe preservar la forma y tamaño de los paralelogramos y los paralelepípedos, y todas las áreas y volúmenes se pueden aproximar por áreas de triángulos y volúmenes de paralelepípedos. •

Decimos que una matriz es **ortogonal** si sus columnas son vectores unitarios y ortogonales.

/2
0

Decimos que una matriz es **ortogonal** si sus columnas son vectores unitarios y ortogonales.

Ejercicio. ¿Cuales de estas matrices son ortogonales?

$$L = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Lema. La transformación lineal dada por la matriz M es una isometría si y solo si M es ortogonal.

Demostración. La transformación $T(V)=MV$ envía los vectores (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) a los vectores columna de la matriz, que llamaremos V_1, V_2 y V_3 y la transformación es $T(x,y,z) = xV_1 + yV_2 + zV_3$.

Lema. La transformación lineal dada por la matriz M es una isometría si y solo si M es ortogonal.

Demostración. La transformación $T(V)=MV$ envía los vectores (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) a los vectores columna de la matriz, que llamaremos V_1,V_2 y V_3 y la transformación es $T(x,y,z) = xV_1+ yV_2 + zV_3$.

Si la transformación es una isometría entonces las columnas V_1,V_2 y V_3, deben ser vectores unitarios porque vienen de vectores unitarios y deben ser ortogonales ya que por el teorema de Pitágoras la imagen de un triángulo rectángulo debe ser un triángulo rectángulo.

Lema. La transformación lineal dada por la matriz M es una isometría si y solo si M es ortogonal.

Demostración. La transformación $T(V)=MV$ envía los vectores (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) a los vectores columna de la matriz, que llamaremos V_1,V_2 y V_3 y la transformación es $T(x,y,z) = xV_1 + yV_2 + zV_3$.

Si la transformación es una isometría entonces las columnas V_1,V_2 y V_3, deben ser vectores unitarios porque vienen de vectores unitarios y deben ser ortogonales ya que por el teorema de Pitágoras la imagen de un triángulo rectángulo debe ser un triángulo rectángulo.

Si la matriz es ortogonal entonces V_1,V_2 y V_3 son ortogonales y tienen norma 1, y por el teorema de Pitágoras

$|T(x,y,z)|^2 = x^2 |V_1|^2 + y^2 |V_2|^2 + z^2 |V_3|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = |(x,y,z)|^2$. •

Lema. Una matriz M es ortogonal si y solo si $MM^T = 1$.

-

Lema. Una matriz M es ortogonal si y solo si $MM^T = 1$.

Demostración. Las entradas (ij) de la matriz MM^T dan los productos punto de las columnas (i) y (j) de M.

•

Corolario. Si M es una matriz ortogonal entonces $M^{-1} = M^T$.

Este corolario de una manera muy sencilla de encontrar las inversas de las isometrías.

Corolario. Si M es una matriz ortogonal entonces $M^{-1} = M^T$.

Este corolario de una manera muy sencilla de encontrar las inversas de las isometrías.

Ejemplo. La matriz

$$M = \begin{pmatrix} {}^{1}/_{\sqrt{3}} & {}^{1}/_{\sqrt{6}} & {}^{-1}/_{\sqrt{2}} \\ {}^{1}/_{\sqrt{3}} & {}^{-2}/_{\sqrt{6}} & 0 \\ {}^{1}/_{\sqrt{3}} & {}^{1}/_{\sqrt{6}} & {}^{1}/_{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

es ortogonal (así que corresponde a una isometría) y su inversa es...

$$M^{-1} =$$

Corolario. Si M es una matriz ortogonal entonces $M^{-1} = M^T$.

Este corolario de una manera muy sencilla de encontrar las inversas de las isometrías.

Ejemplo. La matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

es ortogonal (así que corresponde a una isometría) y su inversa es la matriz transpuesta:

$$M^{-1} = M^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Lema. Dadas 3 direcciones ortogonales cualesquiera en R^3, hay una isometría que lleva los ejes de coordenadas a esas direcciones.

Demostración ?

Lema. Dadas 3 direcciones ortogonales cualesquiera en R^3, hay una isometría que lleva los ejes de coordenadas a esas direcciones.

Demostración. La transformación lineal que manda los vectores básicos a 3 vectores unitarios U, V, W en esas direcciones tiene matriz ortogonal, así que es una isometria.

Ejercicio. Dar una isometría que envíe el eje x a la recta x=y=z.

Ejercicio. Dar una isometría que envíe el eje x a la recta x=y=z.

Un vector en la recta x=y=z es U=(1,1,1), un vector perpendicular a U es V=(1,1,-2) y un vector perpendicular a U y a V es W=UxV=(-3,3,0).

Así que 3 vectores perpendiculares unitarios son

$U/|U|=(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $V/|V|=(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$ y $W/|W|=(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$

Ejercicio. Dar una isometría que envíe el eje x a la recta $x=y=z$.

Un vector en la recta $x=y=z$ es $U=(1,1,1)$, un vector perpendicular a U es $V=(1,1,-2)$ y un vector perpendicular a U y a V es $W=U\times V=(-3,3,0)$.

Así que 3 vectores perpendiculares unitarios son

$U/|U|=(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $V/|V|=(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$ y $W/|W|=(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$$

da una isometría que hace lo que queremos.

Las matrices de rotaciones en los ejes coordenados y las reflexiones en los planos coordenados son muy fáciles.

Ejemplo. La reflexión en el plano y=0 tiene matriz

Ejemplo. Una rotación alrededor de la línea x=z=0 tiene matriz

Las matrices de rotaciones en los ejes coordenados y las reflexiones en los planos coordenados son muy fáciles.

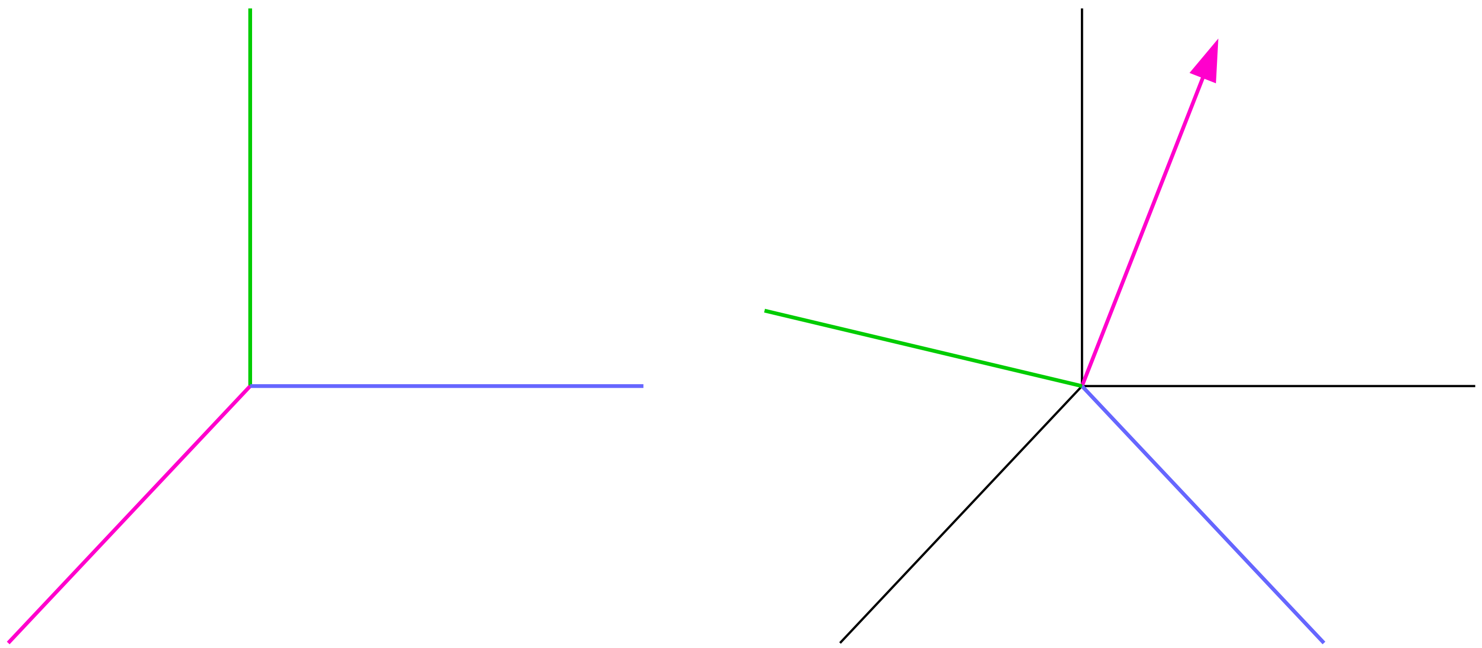
Ejemplo. La reflexión en el plano $y=0$ tiene matriz

¿La reflexión en el plano $2x+y-2z=0$?

Ejemplo. Una rotación alrededor de la línea $x=z=0$ tiene matriz

¿Y una rotación alrededor de la línea $x=2y=-z$?

Si I es una isometría que manda el eje x a la recta L, y R es una rotación alrededor del eje x entonces podemos aplicar I^{-1} para llevar la recta L al eje x, ahí podemos rotar y luego aplicar I para regresar L a su lugar original, el resultado $I \circ R \circ I^{-1}$ es una rotación alrededor de la recta L.



De manera similar puede hallarse la reflexión en cualquier plano.

Ejemplo. ¿Cual es la matriz correspondiente a la rotación de 90° alrededor de la recta generada por (2,1,-2)?

Ejemplo. ¿Cual es la matriz correspondiente a la rotación de 90° alrededor de la recta generada por (2,1,-2)?

Si R es la rotación de 90 alrededor del eje x y hallamos una isometría I que lleve el eje x a esa recta, la rotación alrededor de la recta es la composición $I \circ R \circ I^{-1}$.

Para hallar I, buscamos una matriz ortogonal cuyas columnas sean vectores unitarios y ortogonales y el primero tenga la dirección de (2,1,-2).

Un vector ortogonal a este es (1,0,1) y uno perpendicular a los dos es

$(2,1,-2) \times (1,0,1) = (1,-4,-1)$.

Ejemplo. ¿Cual es la matriz correspondiente a la rotación de 90° alrededor de la recta generada por (2,1,-2)?

Si R es la rotación de 90 alrededor del eje x y hallamos una isometría I que lleve el eje x a esa recta, la rotación alrededor de la recta es la composición $I \circ R \circ I^{-1}$.

Para hallar I, buscamos una matriz ortogonal cuyas columnas sean vectores unitarios y ortogonales y el primero tenga la dirección de (2,1,-2).

Un vector ortogonal a este es (1,0,1) y uno perpendicular a los dos es

(2,1,-2) x (1,0,1) = (1,-4,-1). Como |(2,1,-2)|=3 , |(1,0,1)|=$\sqrt{2}$ y |(1-4,-1)|=$\sqrt{18}$.

los vectores unitarios en esas direcciones son

$({}^{2}/_{3},{}^{1}/_{3},-{}^{2}/_{3})$, $({}^{1}/_{\sqrt{2}},0,{}^{1}/_{\sqrt{2}})$ y $({}^{1}/_{\sqrt{18}},-{}^{4}/_{\sqrt{18}},-{}^{1}/_{\sqrt{18}})$ y la matriz de la isometría I es

M =

Ejemplo. ¿Cual es la matriz correspondiente a la rotación de 90° alrededor de la recta generada por (2,1,-2)?

Si R es la rotación de 90 alrededor del eje x y hallamos una isometría I que lleve el eje x a esa recta, la rotación alrededor de la recta es la composición $I \circ R \circ I^{-1}$.

Para hallar I, buscamos una matriz ortogonal cuyas columnas sean vectores unitarios y ortogonales y el primero tenga la dirección de (2,1,-2).

Un vector ortogonal a este es (1,0,1) y uno perpendicular a los dos es

$(2,1,-2) \times (1,0,1) = (1,-4,-1)$. Como $|(2,1,-2)|=3$, $|(1,0,1)|=\sqrt{2}$ y $|(1-4,-1)|=\sqrt{18}$.

los vectores unitarios en esas direcciones son

$(^2/_3, ^1/_3, -^2/_3)$, $(^1/_{\sqrt{2}}, 0, ^1/_{\sqrt{2}})$ y $(^1/_{\sqrt{18}}, -^4/_{\sqrt{18}}, -^1/_{\sqrt{18}})$ y la matriz de la isometría I es

$$M = \begin{pmatrix} ^2/_3 & ^1/_{\sqrt{2}} & ^3/_{\sqrt{18}} \\ ^1/_3 & 0 & -^4/_{\sqrt{18}} \\ -^2/_3 & ^1/_{\sqrt{2}} & ^1/_{\sqrt{18}} \end{pmatrix}$$

Y como M es una matriz ortogonal la inversa de M es su transpuesta.

La matriz de la rotación de 90 alrededor del eje x es

$$R = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

La matriz de la rotación de 90 alrededor del eje x es

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de la rotación de 90 alrededor del eje x es

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de la rotación de 90° alrededor de la recta generada por (2,1,-2) es el producto

La matriz de la rotación de 90 alrededor del eje x es

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de la rotación de 90° alrededor de la recta generada por (2,1,-2) es el producto

$$MRM^{-1} = \begin{pmatrix} {}^{2}/_{3} & {}^{1}/_{\sqrt{2}} & {}^{3}/_{\sqrt{18}} \\ {}^{1}/_{3} & 0 & -{}^{4}/_{\sqrt{18}} \\ -{}^{2}/_{3} & {}^{1}/_{\sqrt{2}} & {}^{1}/_{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{2}/_{3} & {}^{1}/_{3} & -{}^{2}/_{3} \\ {}^{1}/_{\sqrt{2}} & 0 & {}^{1}/_{\sqrt{2}} \\ {}^{3}/_{\sqrt{18}} & {}^{4}/_{\sqrt{18}} & {}^{1}/_{\sqrt{18}} \end{pmatrix} =$$

La matriz de la rotación de 90 alrededor del eje x es

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de la rotación de 90° alrededor de la recta generada por (2,1,-2) es el producto

$$MRM^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{\sqrt{18}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{18}} & \frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{\sqrt{18}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿Que matriz da la reflexión en el plano $2x+y-2z=0$?

Ejemplo. ¿Que matriz da la reflexión en el plano $2x+y-2z=0$?

Para hallar la reflexión podemos buscar una isometría I que lleve el plano $x=0$ al plano $2x+y-2z=0$.

Si Я es la reflexión en el plano $x=0$, la reflexión buscada es la composición $I \circ R \circ I^{-1}$.

Ejemplo. ¿Que matriz da la reflexión en el plano $2x+y-2z=0$?

Para hallar la reflexión podemos buscar una isometría I que lleve el plano $x=0$ al plano $2x+y-2z=0$.

Si Я es la reflexión en el plano $x=0$, la reflexión buscada es la composición $I \circ R \circ I^{-1}$.

La reflexión en el plano $x=0$ tiene matriz

$$\text{Я} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿Que matriz da la reflexión en el plano $2x+y-2z=0$?

Para hallar la reflexión podemos buscar una isometría I que lleve el plano $x=0$ al plano $2x+y-2z=0$.

Si Я es la reflexión en el plano $x=0$, la reflexión buscada es la composición $I \circ R \circ I^{-1}$.

La reflexión en el plano $x=0$ tiene matriz

$$Я = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿Que matriz da la reflexión en el plano 2x+y-2z=0?

Para hallar la reflexión podemos buscar una isometría I que lleve el plano x=0 al plano 2x+y-2z=0.

Si Я es la reflexión en el plano x=0, la reflexión buscada es la composición $I\circ R\circ I^{-1}$.

La reflexión en el plano x=0 tiene matriz

$$Я \; = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para hallar la isometria I, basta mandar el vector (0,0,1) a un vector unitario en la dirección de (2,1,-2) que es un vector normal al plano, y mandar los vectores (1,0,0) y (0,1,0) a dos vectores unitarios en ese plano que sean perpendiculares entre si.

Esto ya lo hicimos en el ejercicio anterior, la matriz que obtuvimos era

$$M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{18} \\ 1/3 & 0 & -4/\sqrt{18} \\ -2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} \end{pmatrix}$$

Así que la matriz correspondiente a la reflexión en el plano 2x+y-2z=0 es

$$\text{Я}M\text{Я}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{18} \\ 1/3 & 0 & -4/\sqrt{18} \\ -2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{18} & 4/\sqrt{18} & 1/\sqrt{18} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{18} \\ 1/3 & 0 & -4/\sqrt{18} \\ -2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{18} & 4/\sqrt{18} & 1/\sqrt{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 & -4/9 & 8/9 \\ -4/9 & 7/9 & 4/9 \\ 8/9 & 4/9 & 1/9 \end{pmatrix}$$