Direcciones invariantes

Cada transformación lineal manda lineas paralelas en lineas paralelas, así que envía cada dirección a alguna dirección.

Si una dirección no cambia al aplicarle la transformación decimos que es una **dirección invariante**.

Cada transformación lineal manda lineas paralelas en lineas paralelas, así que envía cada dirección a alguna dirección.

Si una dirección no cambia al aplicarle la transformación decimos que es una **dirección invariante**.

Ejemplos en el plano.

- Las traslaciones

- La reflexión del plano en una recta

- Una rotación alrededor de un punto

Cada transformación lineal manda lineas paralelas en lineas paralelas, así que envía cada dirección a alguna dirección.

Si una dirección no cambia al aplicarle la transformación decimos que es una **dirección invariante**.

Ejemplos en el plano.

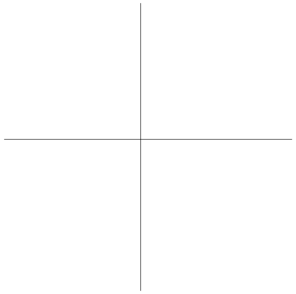
- Las traslaciones dejan a todas las direcciones del plano invariantes (aunque no son transformaciones lineales).

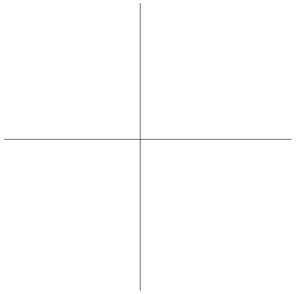
- La reflexión del plano en una recta R deja la dirección de R invariante. La dirección perpendicular a R también es invariante, aunque su sentido se invierte.

- Una rotación alrededor de un punto no deja direcciones invariantes, a menos que el ángulo de rotación sea 180°. En este caso todas las direcciones del plano son invariantes.

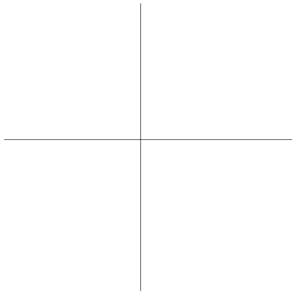
Ejercicio. ¿Las transformaciones dadas por estas matrices tendrán direcciones invariantes?

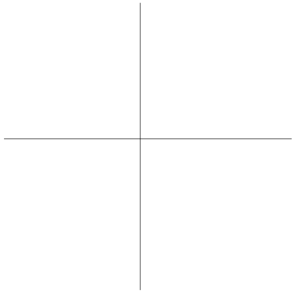
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$



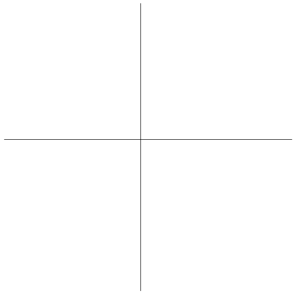


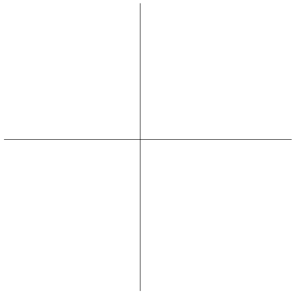
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$





$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$





¿Como podemos hallar todas las direcciones invariantes bajo una transformación lineal?

¿Como podemos hallar todas las direcciones invariantes bajo una transformación lineal?

Si la transformación está dada por la matriz M, las direcciones invariantes están dadas por los vectores $V \neq 0$ tales que $MV=\lambda V$ para algún escalar λ, lo que equivale a que $(M-\lambda I)V=0$.

.

¿Como podemos hallar todas las direcciones invariantes bajo una transformación lineal?

Si la transformación está dada por la matriz M, las direcciones invariantes están dadas por los vectores $V \neq 0$ tales que $MV = \lambda V$ para algún escalar λ, lo que equivale a que $(M - \lambda I)V = 0$.

¿Como podemos hallar todos los valores posibles de λ?

¿Como podemos hallar todas las direcciones invariantes bajo una transformación lineal?

Si la transformación está dada por la matriz M, las direcciones invariantes están dadas por los vectores $V\neq 0$ tales que $MV=\lambda V$ para algún escalar λ, lo que equivale a que $(M-\lambda I)V=0$.

¿Como podemos hallar todos los valores posibles de λ?

Si la función lineal dada por la matriz $(M-\lambda I)$ manda un vector $V\neq 0$ al vector 0, el determinante de la matriz $M-\lambda I$ debe ser 0.

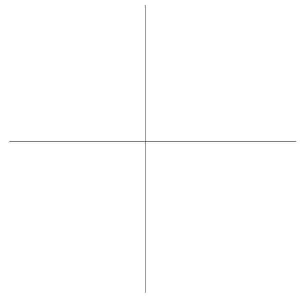
Recíprocamente, si el determinante de la matriz $M-\lambda I$ es cero, entonces la función $F(V) = (M-\lambda I)V$ no es inyectiva y debe existir un vector $V\neq 0$ que vaya a dar al vector 0, así que $MV=\lambda V$.

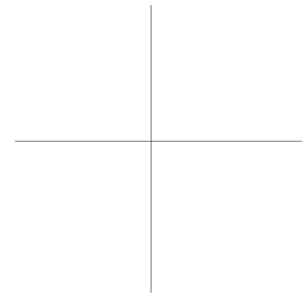
Si $MV=\lambda V$ para algún escalar λ, diremos que λ es un **valor propio** de la matriz M y que V es un **vector propio** de M.

Si $MV=\lambda V$ para algún escalar λ, diremos que λ es un **valor propio** de la matriz M y que V es un **vector propio** de M.

Ejemplo:

Si $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



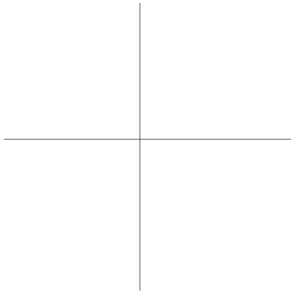


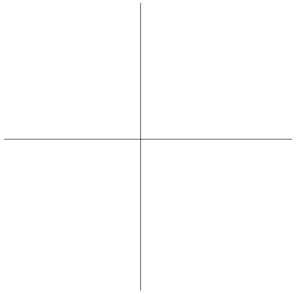
3 es un valor propio de M y (1,0) es un vector propio.

Si $MV=\lambda V$ para algún escalar λ, diremos que λ es un **valor propio** de la matriz M y que V es un **vector propio** de M.

Ejemplo:

Si $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$





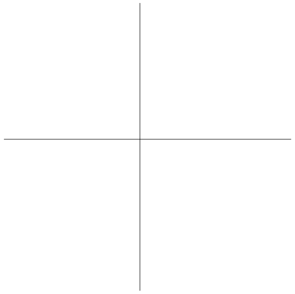
¿Como hallamos todos los valores propios de M?

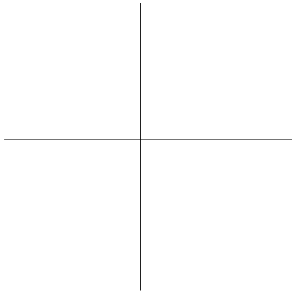
Buscamos los valores de λ tales que $\det(M-\lambda I)=0$.

Si $MV=\lambda V$ para algún escalar λ, diremos que λ es un **valor propio** de la matriz M y que V es un **vector propio** de M.

Ejemplo:

Si $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$





¿Como hallamos todos los valores propios de M?

Buscamos los valores de λ tales que $\det(M-\lambda I)=0$.

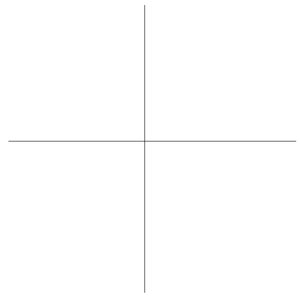
$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ $\qquad \det(M-\lambda I) = (3-\lambda)(1-\lambda) = 0$

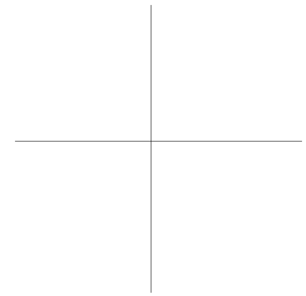
Así que los valores propios son $\lambda=3$, $\lambda=1$

Si $MV=\lambda V$ para algún escalar λ, diremos que λ es un **valor propio** de la matriz M y que V es un **vector propio** de M.

Ejemplo:

Si $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$





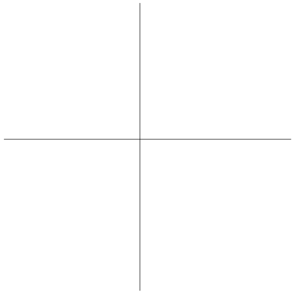
¿Y como hallamos los vectores propios?

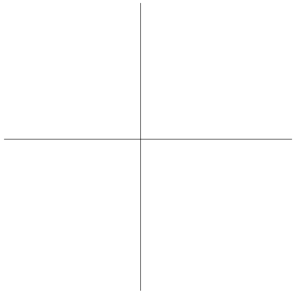
Para $\lambda=1$ buscamos un vector V distinto de 0 tal que $MV=1V$, es decir $(M-1I)V=0$

Si $MV=\lambda V$ para algún escalar λ, diremos que λ es un **valor propio** de la matriz M y que V es un **vector propio** de M.

Ejemplo:

Si $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$





¿Y como hallamos los vectores propios?

Para $\lambda=1$ buscamos un vector V distinto de 0 tal que $MV=1V$, es decir $(M-1I)V=0$

$V=(x,y)$

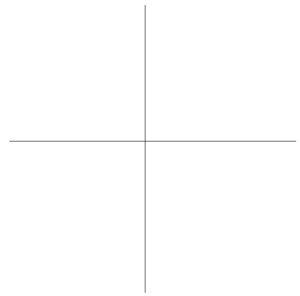
$$(M-1I)V = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

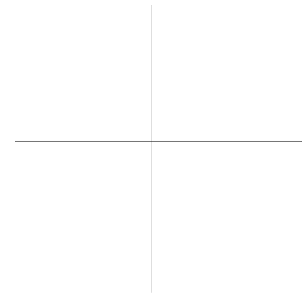
Así que $(x,y)=(1,-1)$ es un vector propio con valor propio 1.

Si $MV=\lambda V$ para algún escalar λ, diremos que λ es un **valor propio** de la matriz M y que V es un **vector propio** de M.

Ejemplo:

Si $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



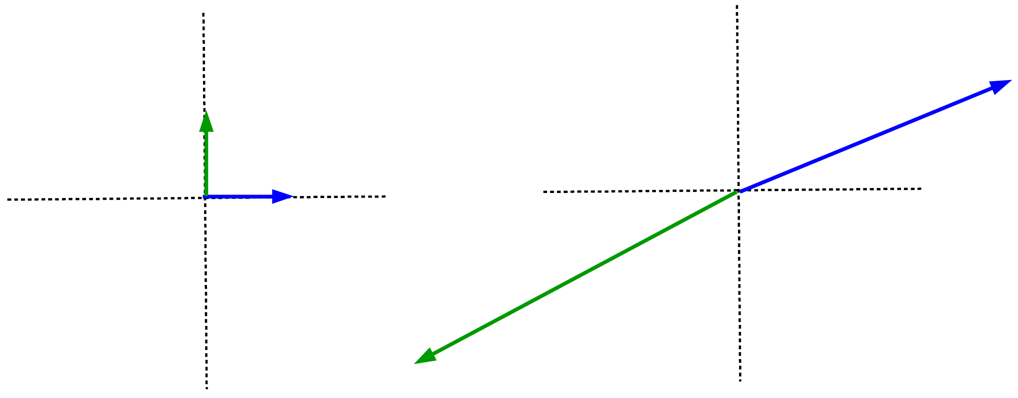


¿Y como hallamos los vectores propios?

Ahora podemos checar que el vector propio (1,-1) da una dirección invariante:

$$MV = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

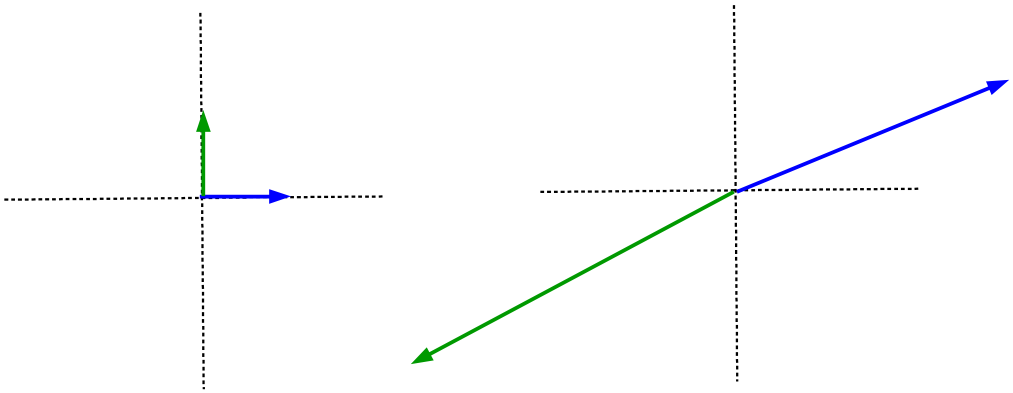
Ejemplo. ¿Cuales son las direcciones invariantes la transformación lineal T del plano que manda (1,0) a (4,2) y (0,1) a (-5,-3)?



Ejemplo. ¿Cuales son las direcciones invariantes la transformación lineal T del plano que manda (1,0) a (4,2) y (0,1) a (-5,-3)?

La transformación T esta dada por la matriz

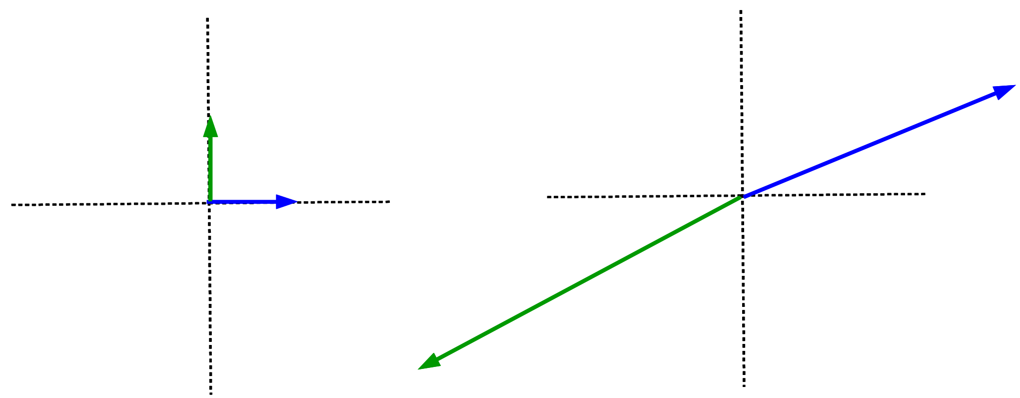
$$M = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$



Ejemplo. ¿Cuales son las direcciones invariantes la transformación lineal T del plano que manda (1,0) a (4,2) y (0,1) a (-5,-3)?

La transformación T esta dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$



$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(M-\lambda I) = (4-\lambda)(-3-\lambda)+10=(\lambda-2)(\lambda+1)$$

Así que los **valores propios** son $\lambda = 2$ y $\lambda = -1$.

Debe haber una dirección invariante en la que los vectores se estiran al doble y otra en la que no cambian de tamaño, pero sí de sentido.

Para $\lambda = -1$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad M-\lambda I = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Buscamos un vector V tal que TV=-V, es decir (M+I)V=0

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x-5y \\ 2x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = -1$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad M-\lambda I = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

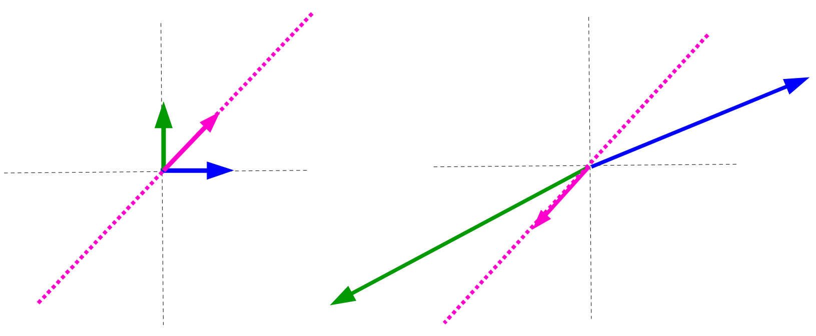
Buscamos un vector V tal que TV=-V, es decir (M+I)V=0

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x-5y \\ 2x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podemos tomar (x,y) = (1,1).

Ahora podemos comprobar que (1,1) es un vector propio de la matriz M:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Así que los vectores en la dirección de (1,1) se multiplican por -1.

Para $\lambda = 2$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad M-\lambda I = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Buscamos un vector V tal que TV=2V, es decir (M-2I)V=0

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-5y \\ 2x-5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 2$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad M-\lambda I = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

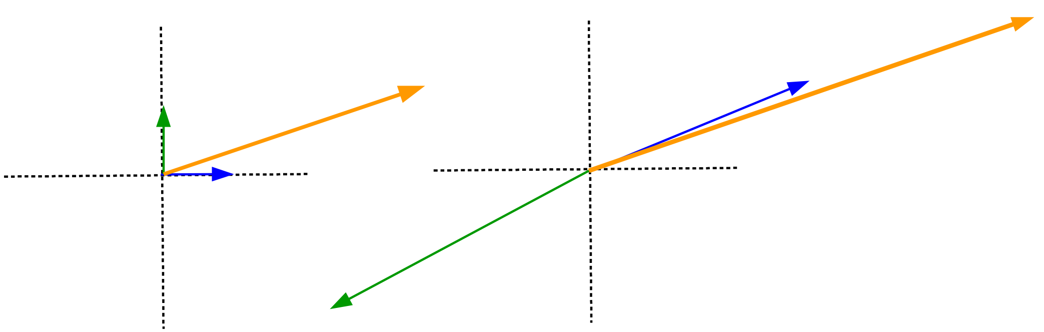
Buscamos un vector V tal que TV=2V, es decir (M-2I)V=0

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-5y \\ 2x-5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podemos tomar (x,y) = (5,2)

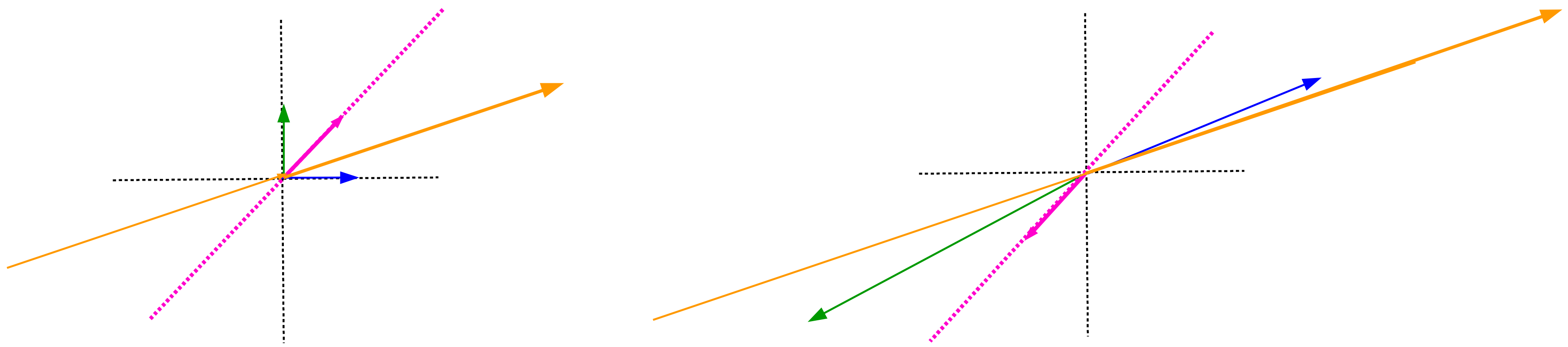
Ahora podemos comprobar que (5,2) es un vector propio de la matriz M:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$



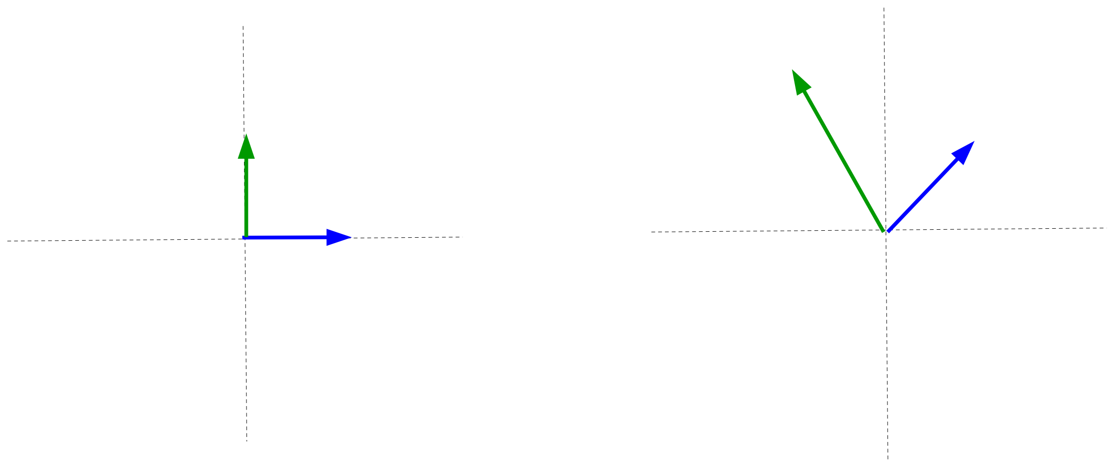
Así que los vectores en la dirección de (5,2) se multiplican por 2.

Conclusión: la transformación lineal T del plano que manda (1,0) a (4,2) y (0,1) a (-5,-3)



tiene 2 direcciones invariantes, los **vectores propios** son (1,1) y (5,2) con **valores propios** $\lambda = -1$ y $\lambda = 2$

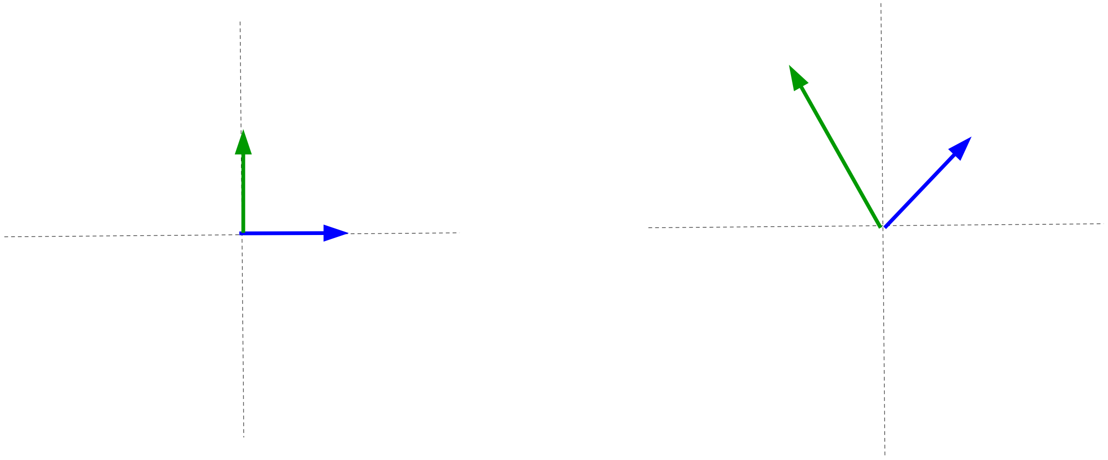
Ejemplo. ¿Cuales son las direcciones invariantes de la transformación lineal T que manda (1,0) a (1,1) y (0,1) a (-1,2)?



Ejemplo. ¿Cuales son las direcciones invariantes de la transformación lineal T que manda (1,0) a (1,1) y (0,1) a (-1,2)?

T está dada por la matriz

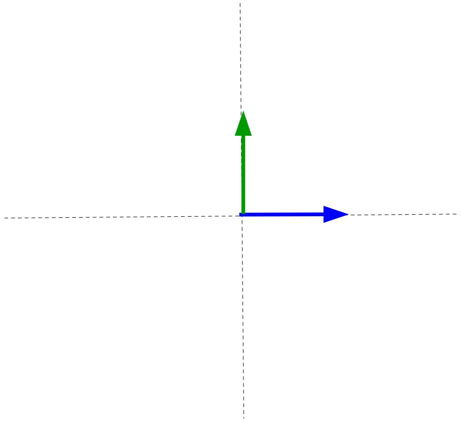
M =

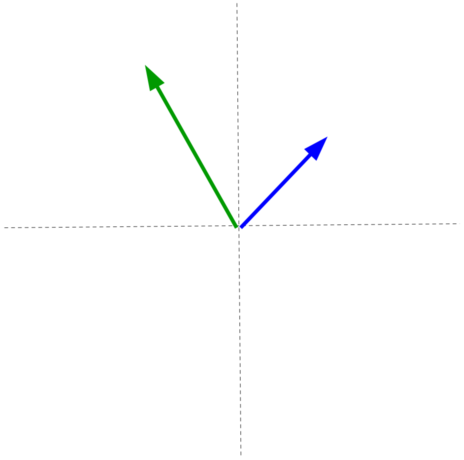


Ejemplo. ¿Cuales son las direcciones invariantes de la transformación lineal T que manda (1,0) a (1,1) y (0,1) a (-1,2)?

T está dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



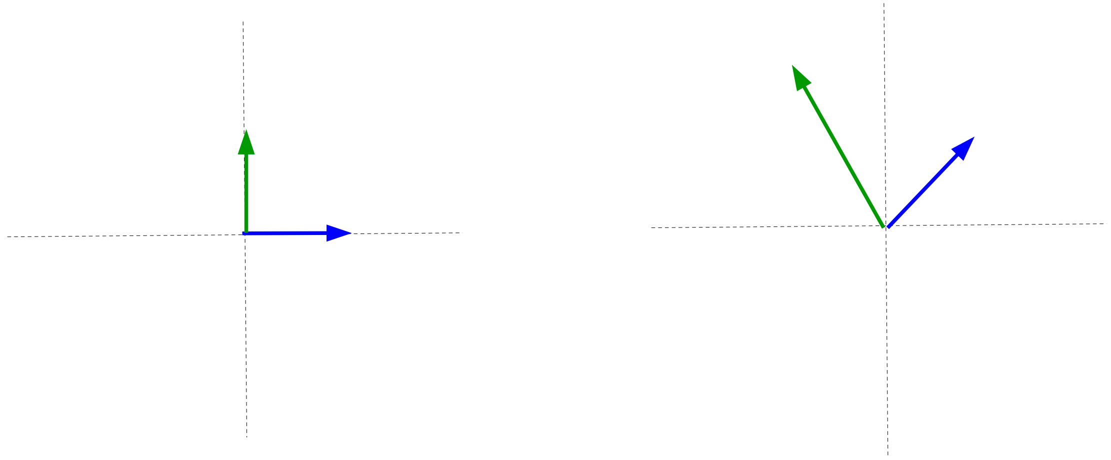


$$M-\lambda I =$$

Ejemplo. ¿Cuales son las direcciones invariantes de la transformación lineal T que manda (1,0) a (1,1) y (0,1) a (-1,2)?

T está dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



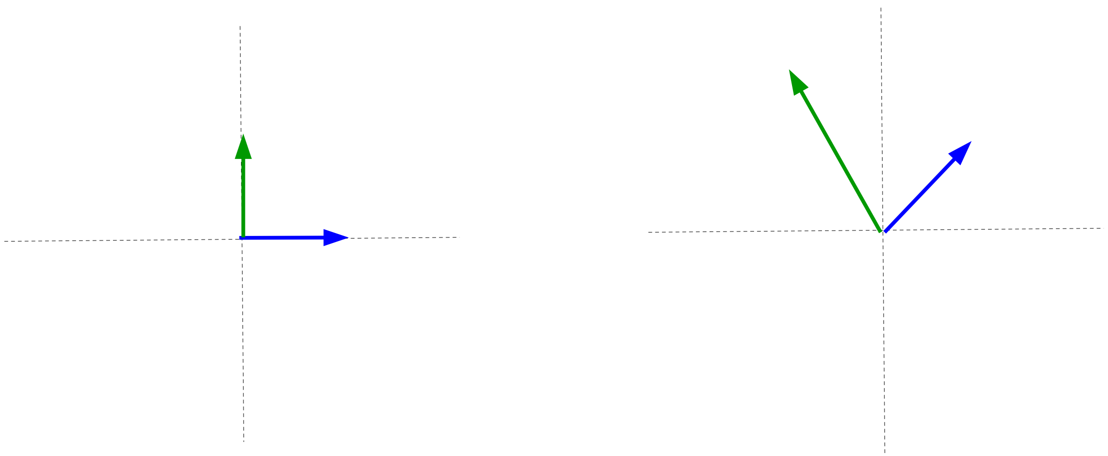
$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$\det(M-\lambda I) =$

Ejemplo. ¿Cuales son las direcciones invariantes de la transformación lineal T que manda (1,0) a (1,1) y (0,1) a (-1,2)?

T está dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

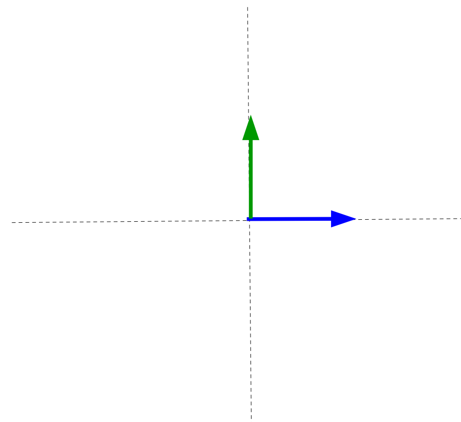
$\det(M-\lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda)+1 = \lambda^2-3\lambda+3$

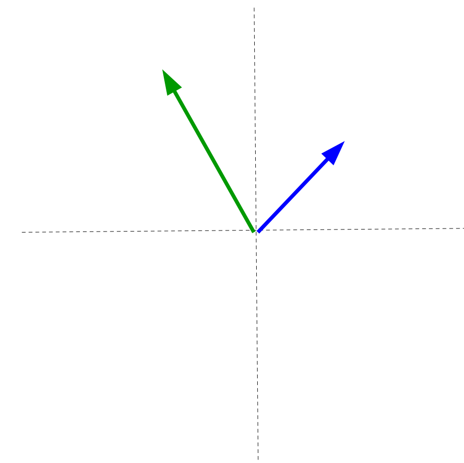
Este polinomio tiene raíces $\lambda =$

Ejemplo. ¿Cuales son las direcciones invariantes de la transformación lineal T que manda (1,0) a (1,1) y (0,1) a (-1,2)?

T está dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$





$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$\det(M-\lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda)+1 = \lambda^2-3\lambda+3$

Este polinomio no tiene raíces reales, ya que $\lambda = \dfrac{3\pm\sqrt{9-12}}{2}$

así que T no deja **ninguna** dirección invariante.

¿Cuantas direcciones invariantes pueden tener las transformaciones lineales del plano?

Teorema. Cada transformación lineal del plano deja 0, 1, 2 o todas las direcciones invariantes.

Teorema. Cada transformación lineal del plano deja 0, 1, 2 o todas las direcciones invariantes.

Demostración. Las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz M están dadas por los vectores $V \neq 0$ tal que $MV = \lambda V$ para algún número real λ.

Los valores posibles de λ son las raíces de $\det(M - \lambda I) = 0$, y como $\det(M - \lambda I)$ es un polinomio de grado 2 en λ, tiene 0, 1 o 2 raíces reales.

Teorema. Cada transformación lineal del plano deja 0, 1, 2 o todas las direcciones invariantes.

Demostración. Las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz M están dadas por los vectores $V \neq 0$ tal que $MV=\lambda V$ para algún número real λ.

Los valores posibles de λ son las raíces de $\det(M-\lambda I)=0$, y como $\det(M-\lambda I)$ es un polinomio de grado 2 en λ, tiene 0, 1 o 2 raíces reales.

Si la transformación lineal estira a dos vectores no paralelos V_1 y V_2 por el mismo factor λ, entonces estira a todas las combinaciones lineales de V_1 y V_2 por ese mismo factor, así que (por la semejanza de triángulos) todas las direcciones en el plano deben ser invariantes.

Teorema. Cada transformación lineal del plano deja 0, 1, 2 o todas las direcciones invariantes.

Demostración. Las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz M están dadas por los vectores $V \neq 0$ tal que $MV = \lambda V$ para algún número real λ.

Los valores posibles de λ son las raíces de $\det(M-\lambda I)=0$, y como $\det(M-\lambda I)$ es un polinomio de grado 2 en λ, tiene 0, 1 o 2 raíces reales.

Si para cada λ hay una sola dirección en la que la transformación estira por el factor λ, entonces como hay a lo mas 2 valores de λ, debe haber a lo mas 2 direcciones invariantes. •

Corolario. Las isometrías del plano que fijan algún punto son rotaciones y reflexiones.

Demostración ?

Corolario. Las isometrías del plano que fijan algún punto son rotaciones y reflexiones.

Demostración. Podemos elegir las coordenadas en el plano de modo que un punto fijo sea el origen. Las isometrías del plano que fijan al origen son transformaciones lineales que envían vectores unitarios ortogonales a vectores unitarios ortogonales.

Corolario. Las isometrías del plano que fijan algún punto son rotaciones y reflexiones.

Demostración. Las isometrías de plano que fijan el origen están dadas por matrices ortogonales, y solo hay de dos tipos:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \qquad \text{donde } a^2+b^2=1$$

(ya que solo existen 2 vectores unitarios perpendiculares a un vector unitario dado).

Corolario. Las isometrías del plano que fijan algún punto son rotaciones y reflexiones.

Demostración. Las isometrías de plano que fijan el origen están dadas por matrices ortogonales, y solo hay de dos tipos:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \qquad \text{donde } a^2+b^2=1$$

Para las del primer tipo

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ -b & a-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det M-\lambda I &= (a-\lambda)(a-\lambda)+b^2 \\ &= \lambda^2-2a\lambda+a^2+b^2 \end{aligned}$$

Corolario. Las isometrías del plano que fijan algún punto son rotaciones y reflexiones.

Demostración. Las isometrías de plano que fijan el origen están dadas por matrices ortogonales, y solo hay de dos tipos:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \qquad \text{donde } a^2+b^2=1$$

Para las del primer tipo

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ -b & a-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det M-\lambda I &= (a-\lambda)(a-\lambda)+b^2 \\ &= \lambda^2-2a\lambda+a^2+b^2 \end{aligned}$$

las raíces de este polinomio son $\lambda= \dfrac{2a\pm\sqrt{-4b^2}}{2}$ que no son reales si $b\neq 0$, y por lo tanto estas isometrías no dejan direcciones invariantes: son las rotaciones (si $b=0$ entonces $a=1$ o -1, que corresponden a la identidad y a la rotación de 180.

Corolario. Las isometrías del plano que fijan algún punto son rotaciones y reflexiones.

Demostración. Las isometrías de plano que fijan el origen están dadas por matrices ortogonales, y solo hay de dos tipos:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \qquad \text{donde } a^2+b^2=1$$

Para las del segundo tipo

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & -a-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det M-\lambda I &= (a-\lambda)(-a-\lambda)-b^2 \\ &= \lambda^2-a^2-b^2 \\ &= \lambda^2-1 \end{aligned}$$

Corolario. Las isometrías del plano que fijan algún punto son rotaciones y reflexiones.

Demostración. Las isometrías de plano que fijan el origen están dadas por matrices ortogonales, y solo hay de dos tipos:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \qquad \text{donde } a^2+b^2=1$$

Para las del segundo tipo

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & -a-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det M-\lambda I &= (a-\lambda)(-a-\lambda)-b^2 \\ &= \lambda^2-a^2-b^2 \\ &= \lambda^2-1 \end{aligned}$$

Las raíces son $\lambda=1$ y $\lambda=-1$, así que esta isometría deja dos direcciones invariantes, en una ($\lambda=1$) los vectores quedan fijos y en la otra ($\lambda=-1$) cambian de sentido: estas isometrías deben ser las reflexiones en rectas. Para ver que son reflexiones son falta mostrar que los 2 vectores propios son perpendiculares.

Ejercicio. Muestra que esta matriz corresponde a la reflexión en una recta, y di en cual.

$$M = \begin{pmatrix} {}^{3}/_{5} & {}^{4}/_{5} \\ {}^{4}/_{5} & -{}^{3}/_{5} \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Muestra que esta matriz corresponde a la reflexión en una recta, y di en cual.

$$M = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

Es una matriz ortogonal, así que corresponde a una isometría.

Ejercicio. Muestra que esta matriz corresponde a la reflexión en una recta, y di en cual.

$$M = \begin{pmatrix} {}^{3}/_{5} & {}^{4}/_{5} \\ {}^{4}/_{5} & -{}^{3}/_{5} \end{pmatrix}$$

Es una matriz ortogonal, así que corresponde a una isometría.

Para ver que es una reflexión hay que ver que hay 2 direcciones invariantes ortogonales, una con valor propio 1 y otra con valor propio -1.

Ejercicio. Muestra que esta matriz corresponde a la reflexión en una recta, y di en cual.

$$M = \begin{pmatrix} {}^3/_5 & {}^4/_5 \\ {}^4/_5 & -{}^3/_5 \end{pmatrix}$$

Es una matriz ortogonal, así que corresponde a una isometría.

Para ver que es una reflexión hay que ver que hay 2 direcciones invariantes ortogonales, una con valor propio 1 y otra con valor propio -1.

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} {}^3/_5 - \lambda & {}^4/_5 \\ {}^4/_5 & -{}^3/_5 - \lambda \end{pmatrix} \qquad \det(M-\lambda I) = ({}^3/_5-\lambda)(-{}^3/_5-\lambda)-({}^4/_5)^2 = \lambda^2-1$$

Ejercicio. Muestra que esta matriz corresponde a la reflexión en una recta, y di en cual.

$$M = \begin{pmatrix} {}^3/_5 & {}^4/_5 \\ {}^4/_5 & -{}^3/_5 \end{pmatrix}$$

Es una matriz ortogonal, así que corresponde a una isometría.

Para ver que es una reflexión hay que ver que hay 2 direcciones invariantes ortogonales, una con valor propio 1 y otra con valor propio -1.

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} {}^3/_5 - \lambda & {}^4/_5 \\ {}^4/_5 & -{}^3/_5 - \lambda \end{pmatrix} \qquad \det(M-\lambda I) = ({}^3/_5-\lambda)(-{}^3/_5-\lambda)-({}^4/_5)^2 = \lambda^2-1$$

Así que debe ser una reflexión, en la dirección correspondiente a $\lambda=1$

$$\begin{pmatrix} -{}^2/_5 & {}^4/_5 \\ {}^4/_5 & -{}^8/_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -{}^2/_5 x + {}^4/_5 y \\ {}^4/_5 x - {}^8/_5 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Muestra que esta matriz corresponde a la reflexión en una recta, y di en cual.

$$M = \begin{pmatrix} {}^{3}/_{5} & {}^{4}/_{5} \\ {}^{4}/_{5} & -{}^{3}/_{5} \end{pmatrix}$$

Es una matriz ortogonal, así que corresponde a una isometría.

Para ver que es una reflexión hay que ver que hay 2 direcciones invariantes ortogonales, una con valor propio 1 y otra con valor propio -1.

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} {}^{3}/_{5} - \lambda & {}^{4}/_{5} \\ {}^{4}/_{5} & -{}^{3}/_{5} - \lambda \end{pmatrix} \qquad \det(M-\lambda I) = ({}^{3}/_{5}-\lambda)(-{}^{3}/_{5}-\lambda)-({}^{4}/_{5})^2 = \lambda^2-1$$

Así que debe ser una reflexión, en la dirección correspondiente a $\lambda=1$

$$\begin{pmatrix} -{}^{2}/_{5} & {}^{4}/_{5} \\ {}^{4}/_{5} & -{}^{8}/_{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -{}^{2}/_{5}x + {}^{4}/_{5}y \\ {}^{4}/_{5}x - {}^{8}/_{5}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una solución es (x,y) = (2,1), que da la dirección de la recta de reflexión.