

Direcciones invariantes (en el espacio)

Cada transformación afín manda líneas paralelas en líneas paralelas, así que envía cada dirección a alguna dirección.

Si una dirección no cambia al aplicarle la transformación decimos que es una **dirección invariante**.

Cada transformación afín manda líneas paralelas en líneas paralelas, así que envía cada dirección a alguna dirección.

Si una dirección no cambia al aplicarle la transformación T decimos que esa es una **dirección invariante** de T .

Ejemplos en el espacio.

- Las traslaciones
- La reflexión del espacio en un plano
- Una rotación del espacio alrededor de una recta

Cada transformación afín manda líneas paralelas en líneas paralelas, así que envía cada dirección a alguna dirección.

Si una dirección no cambia al aplicarle la transformación T decimos que esa es una **dirección invariante** de T .

Ejemplos en el espacio.

- Las traslaciones dejan a todas las direcciones del espacio invariantes. Como cada transformación afín es composición de una transformación lineal con una traslación, basta fijarse en las transformaciones lineales.
- La reflexión del espacio en un plano P deja a todas las direcciones en P invariantes. La dirección perpendicular a P también es invariante, aunque su sentido se invierte.
- Una rotación alrededor de una recta R deja a la dirección de R invariante, y no deja otras direcciones invariantes a menos que el ángulo de rotación sea 180° , en este caso todas las direcciones perpendiculares a R son invariantes.

Igual que en el plano, si una transformación lineal del espacio está dada por la matriz M , sus direcciones invariantes están dadas por los vectores $V \neq 0$ tales que $MV = \lambda V$ para algún λ .

Si $MV = \lambda V$ decimos que λ es un **valor propio** y V es un **vector propio** de la matriz M .

¿Como podemos hallar los valores y vectores propios de una matriz?

$MV = \lambda V$ para algún vector V y un escalar λ si y sólo si $(M - \lambda I)V = 0$.

Si $(M - \lambda I)V = 0$ para un vector $V \neq 0$, la función lineal dada por la matriz $M - \lambda I$ no es inyectiva y su determinante debe ser 0.

¿Como podemos hallar los valores y vectores propios de una matriz?

$MV = \lambda V$ para algún vector V y un escalar λ si y sólo si $(M - \lambda I)V = 0$.

Si $(M - \lambda I)V = 0$ para un vector $V \neq 0$, la función lineal dada por la matriz $M - \lambda I$ no es inyectiva y su determinante debe ser 0.

Recíprocamente, si el determinante de $M - \lambda I$ es cero, la función lineal dada por $M - \lambda I$ no es inyectiva y debe existir un vector $V \neq 0$ que vaya a dar al vector 0. Como $(M - \lambda I)V = 0$ entonces $MV = \lambda V$ así que V es un vector propio de M .

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \det(M - \lambda I) = -\lambda^3 - 1$$

cuya única raíz real es $\lambda = -1$, este es el único valor propio de la matriz.

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \det(M - \lambda I) = -\lambda^3 - 1$$

cuya única raíz real es $\lambda = -1$, este es el único valor propio de la matriz.

Ahora buscamos un vector propio.

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \det(M - \lambda I) = -\lambda^3 - 1$$

cuya única raíz real es $\lambda = -1$, este es el único valor propio de la matriz.

Ahora buscamos un vector propio. Si $\lambda = -1$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \det(M - \lambda I) = -\lambda^3 - 1$$

cuya única raíz real es $\lambda = -1$, este es el único valor propio de la matriz.

Ahora buscamos un vector propio. Si $\lambda = -1$ y $V = (x, y, z)$

$$(M - \lambda I)V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ x+y \\ -y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \det(M - \lambda I) = -\lambda^3 - 1$$

cuya única raíz real es $\lambda = -1$, este es el único valor propio de la matriz.

Ahora buscamos un vector propio. Si $\lambda = -1$ y $V = (x, y, z)$

$$(M - \lambda I)V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ x+y \\ -y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto sucede si $z = -x$, $y = -x$, así que un vector propio es $V = (1, -1, -1)$ y la única recta invariante es $-x = y = z$.

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \det(M - \lambda I) =$$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(M - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 \quad \text{sus raíces son } \lambda = -1, \lambda = 2$$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \det(M - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 \quad \text{sus raíces son } \lambda = -1, \lambda = 2$$

Busquemos ahora los vectores propios correspondientes a estos valores propios.

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \det(M - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 \quad \text{sus raíces son } \lambda = -1, \lambda = 2$$

Busquemos ahora los vectores propios correspondientes a estos valores propios.

Para $\lambda = -1$

$$(M - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \det(M - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 \quad \text{sus raíces son } \lambda = -1, \lambda = 2$$

Busquemos ahora los vectores propios correspondientes a estos valores propios.

Para $\lambda = -1$

$$(M - \lambda I)V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \det(M - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 \quad \text{sus raíces son } \lambda = -1, \lambda = 2$$

Busquemos ahora los vectores propios correspondientes a estos valores propios.

Para $\lambda = -1$

$$(M - \lambda I)V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La única condición es que $x+y+z=0$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \det(M - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 \quad \text{sus raíces son } \lambda = -1, \lambda = 2$$

Busquemos ahora los vectores propios correspondientes a estos valores propios.

Para $\lambda = -1$

$$(M - \lambda I)V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La única condición es que $x+y+z=0$, y esto es un plano donde todas las direcciones son invariantes y como $\lambda = -1$, los vectores no cambian de tamaño sino solo de sentido, así que en ese plano la transformación es una rotación de 90° .

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \det(M - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 \quad \text{sus raíces son } \lambda = -1, \lambda = 2$$

Busquemos ahora los vectores propios correspondientes a estos valores propios.

Para $\lambda = 2$

$$(M - \lambda I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \det(M - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 \quad \text{sus raíces son } \lambda = -1, \lambda = 2$$

Busquemos ahora los vectores propios correspondientes a estos valores propios.

Para $\lambda = 2$

$$(M - \lambda I)V = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + y + z \\ x - 2y + z \\ x + y - 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \det(M - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 \quad \text{sus raíces son } \lambda = -1, \lambda = 2$$

Busquemos ahora los vectores propios correspondientes a estos valores propios.

Para $\lambda = 2$

$$(M - \lambda I)V = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + y + z \\ x - 2y + z \\ x + y - 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto sucede si $-3x + 3y = 0$, $-3y + 3z = 0$ o sea si $x = y = z$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \det(M - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 \quad \text{sus raíces son } \lambda = -1, \lambda = 2$$

Busquemos ahora los vectores propios correspondientes a estos valores propios.

Para $\lambda = 2$

$$(M - \lambda I)V = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + y + z \\ x - 2y + z \\ x + y - 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto sucede si $-3x + 3y = 0$, $-3y + 3z = 0$ o sea si $x = y = z$

Esta es una recta, y como $\lambda = 2$, los vectores en esa recta se alargan al doble.

Hay muchas transformaciones lineales del plano que cambian las direcciones de todas las rectas (no dejan direcciones invariantes).

Hay muchas transformaciones lineales del plano que cambian las direcciones de todas las rectas (no dejan direcciones invariantes).

¿Que pasará con las transformaciones lineales del espacio?
¿podrán cambiar todas las direcciones?

Teorema. Cada transformación lineal del espacio deja al menos una dirección invariante.

Teorema. Cada transformación lineal del espacio deja 1, 2, 3 o una infinidad de direcciones invariantes.

Demostración ?

Teorema. Cada transformación lineal del espacio deja 1, 2, 3 o una infinidad de direcciones invariantes.

Demostración. Para cada matriz M de 3×3 , $\det(M - \lambda I)$ es un polinomio real de tercer grado, así que debe tener al menos una raíz real λ , esta da un valor propio y a esta corresponde al menos un vector propio, que da una dirección invariante.

Teorema. Cada transformación lineal del espacio deja 1, 2, 3 o una infinidad de direcciones invariantes.

Demostración. Para cada matriz M de 3×3 , $\det(M - \lambda I)$ es un polinomio real de tercer grado, así que debe tener al menos una raíz real λ , esta da un valor propio y a esta corresponde al menos un vector propio, que da una dirección invariante.

Si hay dos vectores no paralelos V_1 y V_2 que se estiran por el mismo factor λ , entonces todas las combinaciones lineales de V_1 y V_2 se estiran por ese mismo factor, así que todas las direcciones del plano generado por V_1 y V_2 son invariantes.

Si para cada λ solo hay una dirección que se estira por el factor λ , entonces como hay a lo mas 3 valores de λ debe haber a lo mas 3 direcciones invariantes. •

Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y reflexiones con rotación (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).

Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y reflexiones con rotación (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).

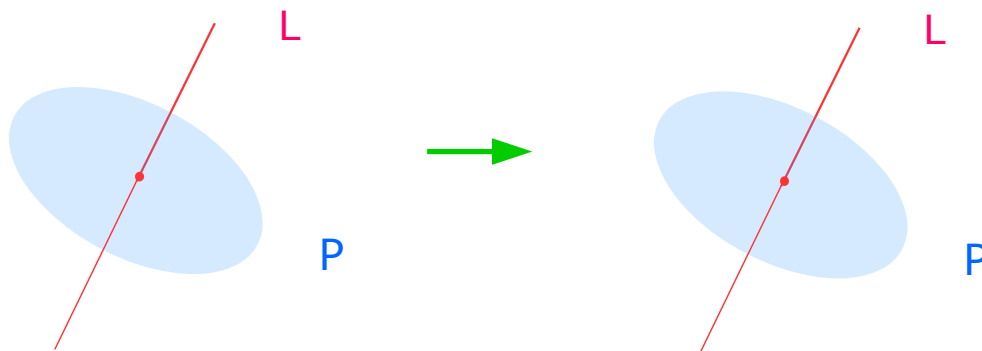
Demostración. Si la isometría I fija el origen entonces es lineal, y todas las transformaciones lineales del espacio dejan al menos una dirección invariante.

Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y reflexiones con rotación (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).

Demostración. Si la isometría I fija el origen entonces es lineal, y todas las transformaciones lineales del espacio dejan al menos una dirección invariante.

Así que I debe mandar a alguna línea L que pasa por el origen sobre si misma.

Como además I debe preservar ángulos, I debe mandar al plano P que pasa por el origen y es perpendicular a L sobre si mismo.

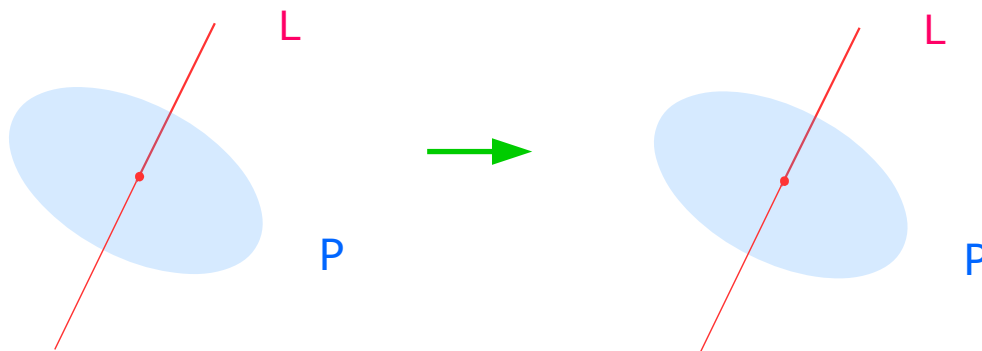


Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y reflexiones con rotación (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).

Demostración. Si la isometría I fija el origen entonces es lineal, y todas las transformaciones lineales del espacio dejan al menos una dirección invariante.

Así que I debe mandar a alguna línea L que pasa por el origen sobre si misma.

Como además I debe preservar ángulos, I debe mandar al plano P que pasa por el origen y es perpendicular a L sobre si mismo.



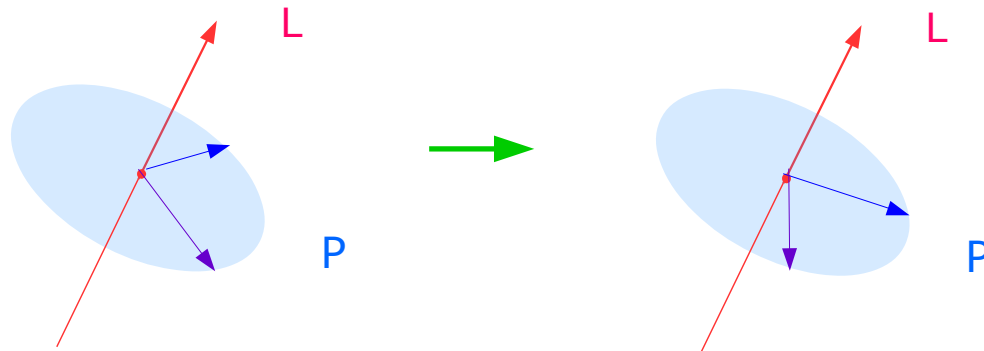
La isometría I puede preservar o invertir la orientación de la línea L .

La isometría I puede preservar o invertir la orientación del plano, y actúa en el plano como una rotación o como una reflexión.

Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y reflexiones con rotación (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).

Demostración.

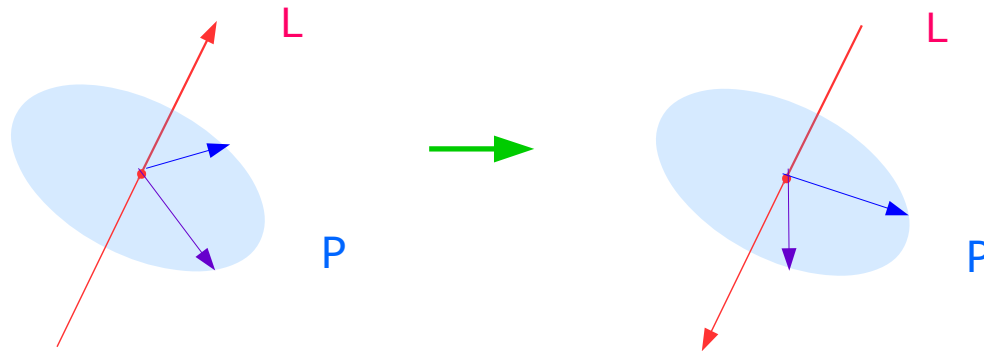
Caso 1. Si I preserva la orientación en L y preserva la orientación en P entonces I es una rotación alrededor de L .



Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y reflexiones con rotación (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).

Demostración.

Caso 2. Si I invierte la orientación en L y preserva la orientación en P , entonces I se obtiene rotando alrededor de L y reflejando en P (es una rotación con reflexión).

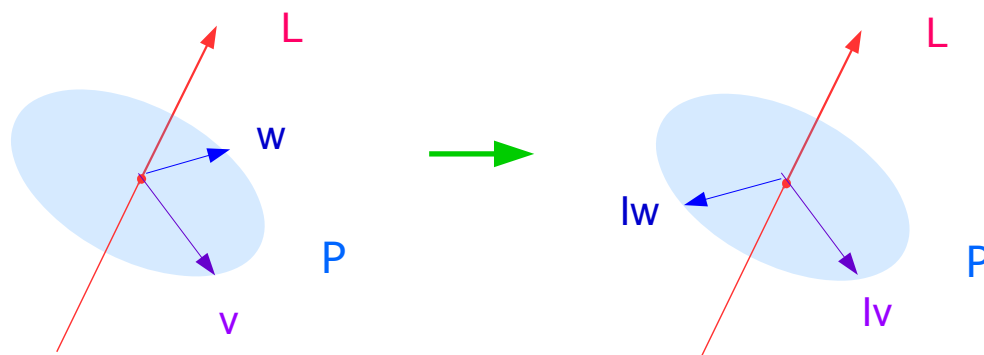


Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y reflexiones con rotación (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).

Demostración.

Caso 3. Si I preserva la orientación de L e invierte la orientación en P , entonces hay un vector v en P tal que $Iv = v$ y otro vector w en P perpendicular a v tal que $Iw = -w$.

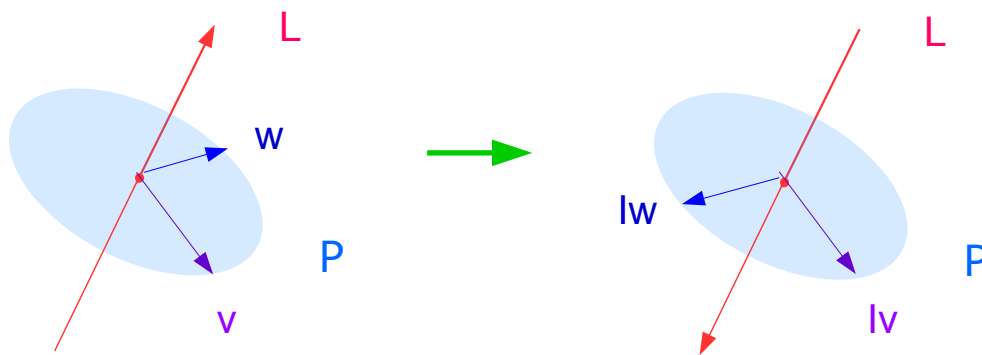
Como I fija a L y v e invierte a w , I es una reflexión en el plano generado por L y v .



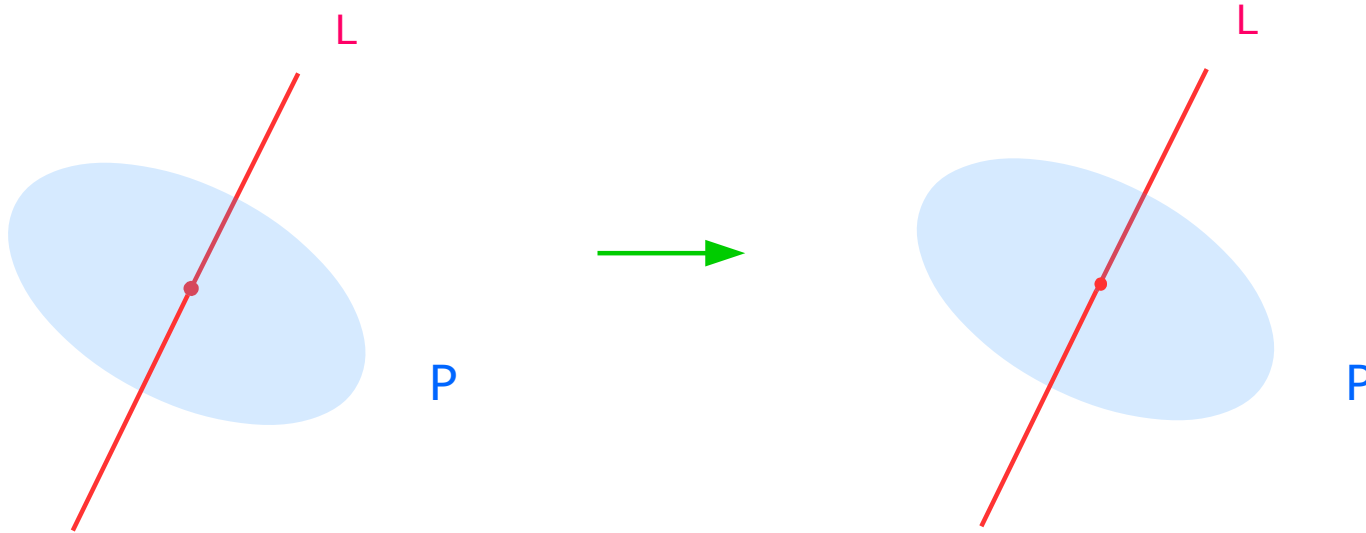
Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y reflexiones con rotación (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).

Demostración.

Caso 4. Si I invierte la orientación en L y también invierte la orientación en P , entonces I fija a v e invierte a w y a u , así que I es una rotación de 180° alrededor de la recta generada por v .



Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y rotaciones con reflexión (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).



¿Que distingue a estas transformaciones?

- Rotaciones
- Reflexiones
- Rotaciones con reflexión

Ejemplo. ¿A qué isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿A que isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Como es una matriz ortogonal sus valores propios solo pueden ser $\lambda=1$ o $\lambda=-1$.
(pero no sabemos si ambos sean)

Ejemplo. ¿A que isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda=1$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿A qué isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda=1$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -4/3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿A qué isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda=1$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -4/3 \end{pmatrix}$$

Los vectores propios deben cumplir:

$$-2/3 x + 2/3 y - 2/3 z = 0$$

$$2/3 x - 2/3 y - 4/3 z = 0$$

Ejemplo. ¿A qué isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda=1$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -4/3 \end{pmatrix}$$

Los vectores propios deben cumplir:

$$\begin{array}{lcl} -2/3 x + 2/3 y - 2/3 z = 0 & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{l} -6/3 z = 0 \\ 4/3 x - 4/3 y - 2/3 z = 0 \end{array} \\ 2/3 x - 2/3 y - 4/3 z = 0 & & \begin{array}{l} z = 0 \\ x = y \end{array} \end{array}$$

Así que los vectores propios son los múltiplos de $(1,1,0)$

Ejemplo. ¿A que isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = -1$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿A que isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = -1$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿A qué isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = -1$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Los vectores propios deben cumplir:

$$4/3 x + 2/3 y - 2/3 z = 0$$

$$2/3 x + 4/3 y + 2/3 z = 0$$

$$2/3 x - 2/3 y + 2/3 z = 0$$

Ejemplo. ¿A qué isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = -1$

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Los vectores propios deben cumplir:

$$\begin{array}{lcl} 4/3 x + 2/3 y - 2/3 z = 0 & & \\ 2/3 x + 4/3 y + 2/3 z = 0 & \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{l} 6/3 x = 0 \\ 6/3 y = 0 \end{array} \\ 2/3 x - 2/3 y + 2/3 z = 0 & & \end{array} \quad \begin{array}{l} z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}$$

Así que no hay vectores propios para $\lambda = -1$ (el $(0,0,0)$ no cuenta como vector propio!)

Ejemplo. ¿A qué isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Como solo hay una dirección de vectores propios y corresponde al valor propio $\lambda=1$, la isometría debe ser una rotación alrededor de esa recta.

Ejemplo. ¿A qué isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Como solo hay una dirección de vectores propios y corresponde al valor propio $\lambda=1$, la isometría debe ser una rotación alrededor de esa recta.

¿Podremos hallar el ángulo de rotación?

Ejemplo. ¿A qué isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Como solo hay una dirección de vectores propios y corresponde al valor propio $\lambda=1$, la isometría debe ser una rotación alrededor de esa recta.

¿Podremos hallar el ángulo de rotación?

Basta calcular cuánto gira algún vector perpendicular al vector propio $V=(1,1,0)$

Ejemplo. ¿A qué isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Como solo hay una dirección de vectores propios y corresponde al valor propio $\lambda=1$, la isometría debe ser una rotación alrededor de esa recta.

¿Podremos hallar el ángulo de rotación?

Basta calcular cuánto gira algún vector perpendicular al vector propio $V=(1,1,0)$

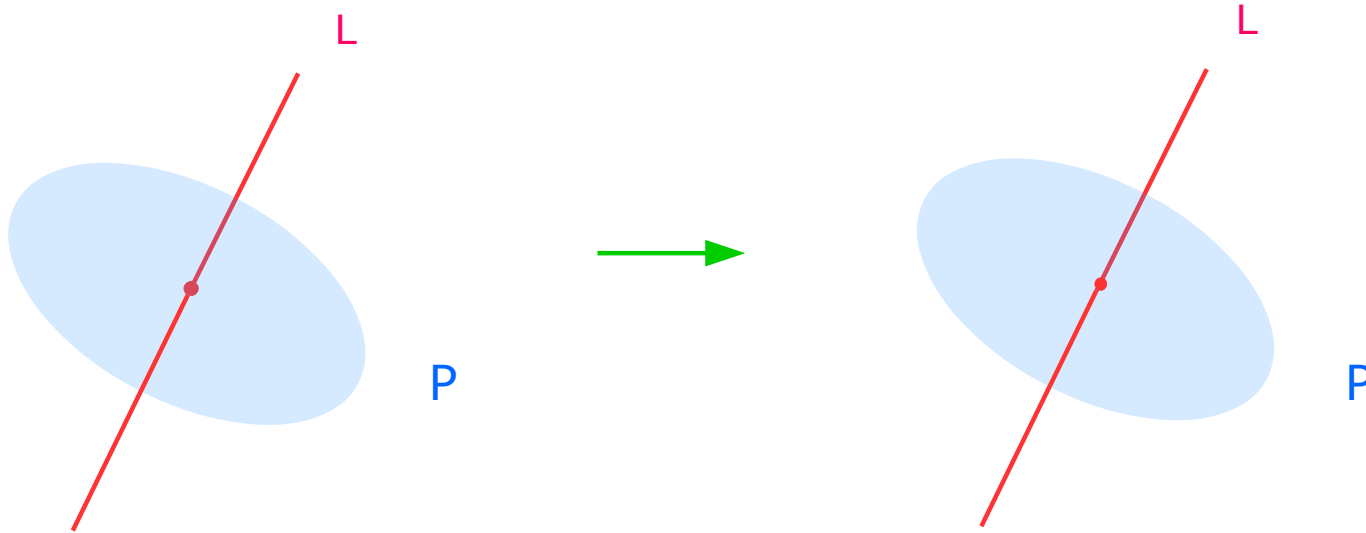
Podemos tomar el vector $U=(0,0,1)$

Entonces $MU=(-2/3, 2/3, -1/3)$

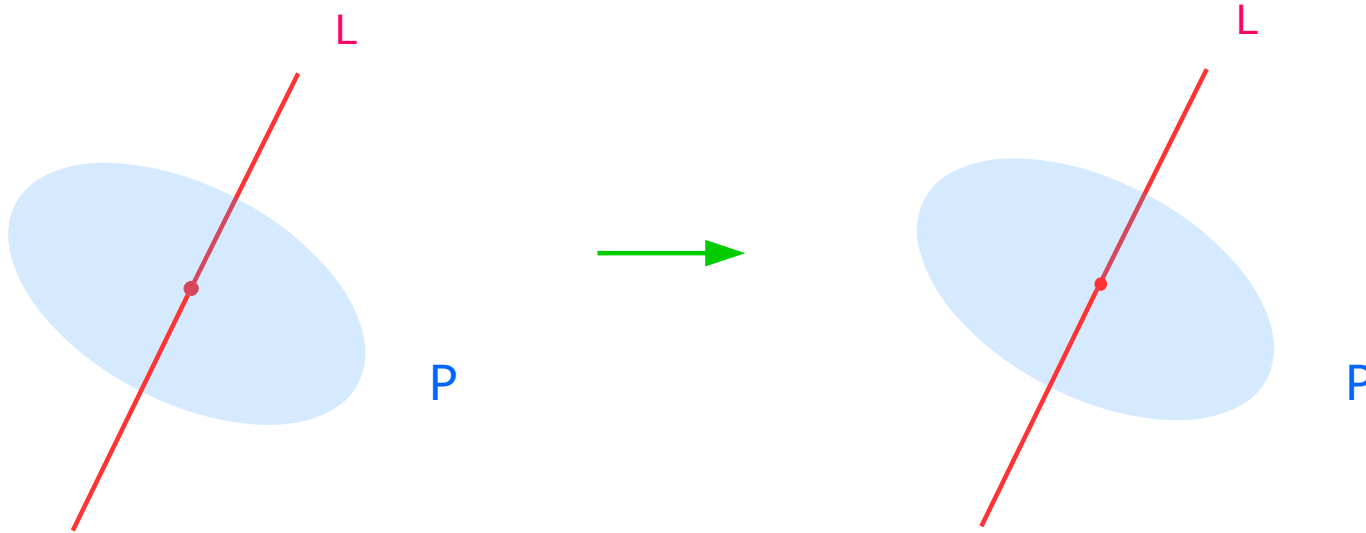
El ángulo entre U y MU está dado por $\cos\theta = \frac{U \cdot MU}{|U||MU|} = \frac{(0,0,1) \cdot (-2/3, 2/3, -1/3)}{1 \cdot 1} = -1/3$

Así que el ángulo de la rotación es $\theta = \cos^{-1}(-1/3) = 109.47^\circ$

Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y rotaciones con reflexión (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).



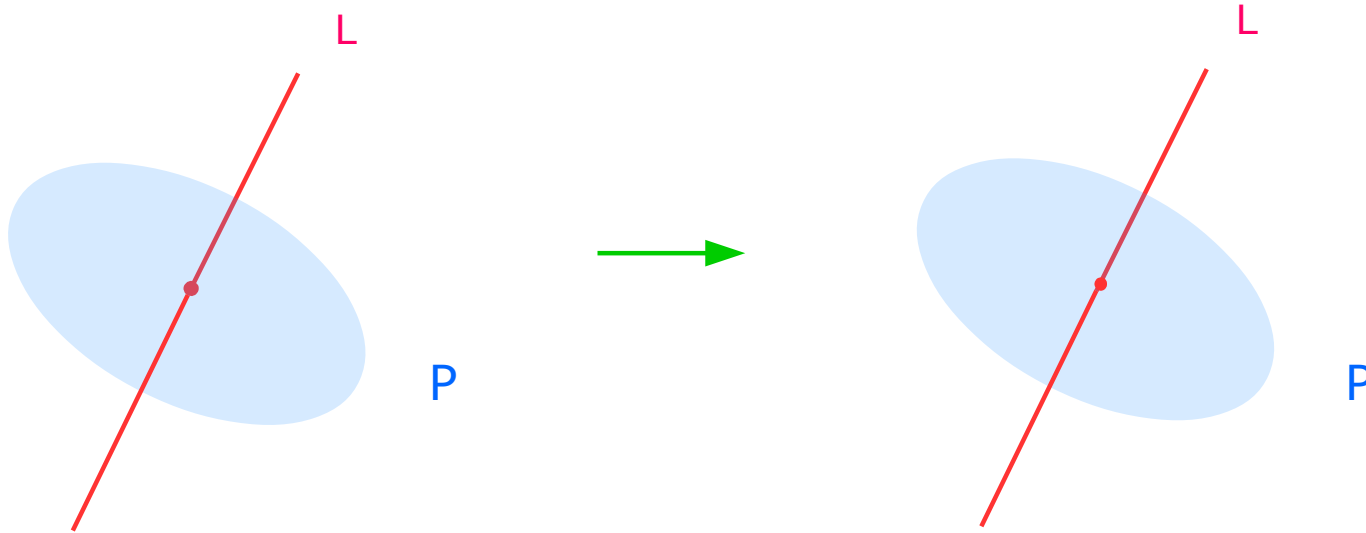
Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y rotaciones con reflexión (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).



¿Que distingue a estas transformaciones?

- Rotaciones
- Reflexiones
- Rotaciones con reflexión

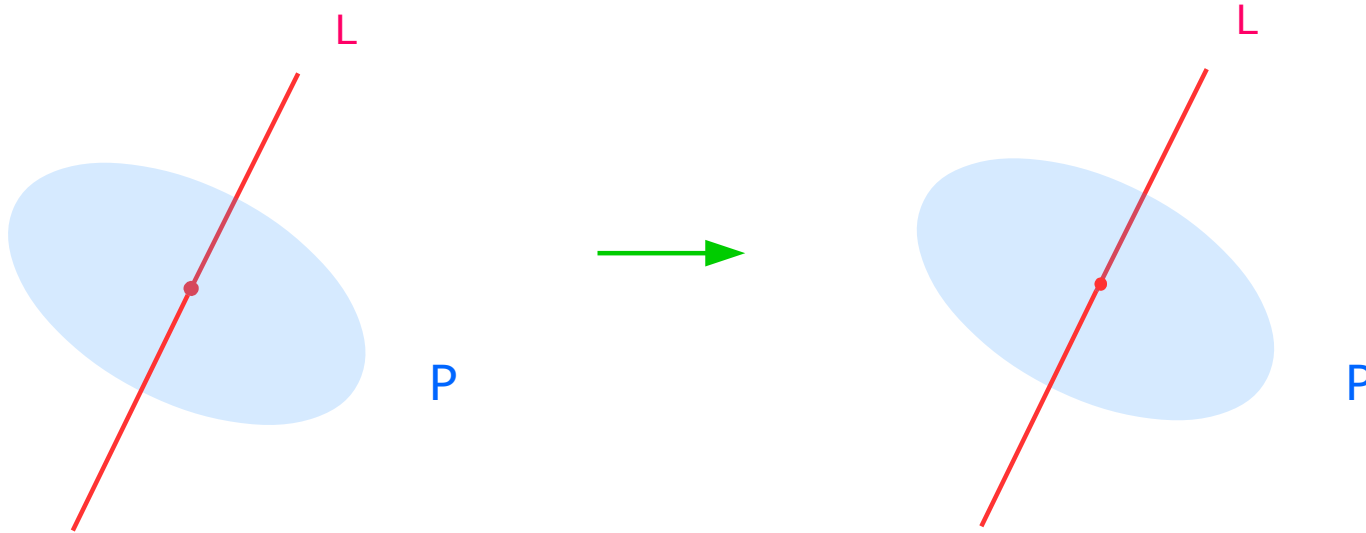
Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y rotaciones con reflexión (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).



¿Que distingue a estas transformaciones?

- Rotaciones
- Reflexiones
- Rotaciones con reflexión

Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y rotaciones con reflexión (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).



¿Que distingue a estas transformaciones?

- Rotaciones: un valor propio 1 (si son 180° entonces también -1)
- Reflexiones: 2 valores propios: 1 y -1
- Rotaciones con reflexión: un valor propio: -1

Ejemplo. ¿A qué isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Las transformaciones del plano (o del espacio) pueden separarse en dos clases: aquellas que **preservan la orientación** del plano (o del espacio) y aquellas que **invierten la orientación**.

Las transformaciones del plano (o del espacio) pueden separarse en dos clases: aquellas que **preservan la orientación** del plano (o del espacio) y aquellas que **invierten la orientación**.

¿Como podemos saber si una transformación lineal preserva o invierte la orientación?

Las transformaciones del plano (o del espacio) pueden separarse en dos clases: aquellas que **preservan la orientación** del plano (o del espacio) y aquellas que **invierten la orientación**.

¿Como podemos saber si una transformación lineal preserva o invierte la orientación?

Viendo el determinante de la matriz: si es positivo la preserva y si es negativo la invierte.

Observar que la composición de dos transformaciones que preservan la orientación (o la de dos transformaciones que invierten la orientación) preserva la orientación.

La composición de una transformación que preserva la orientación y una que la invierte debe invertir la orientación.

En particular, la inversa de una transformación que preserva la orientación debe preservarla, y la inversa de una transformación que invierte la orientación debe invertirla.

Ejercicio. Demostrar que la composición de dos rotaciones en rectas por el origen es una rotación en alguna recta por el origen.

Ejercicio. Demostrar que la composición de dos rotaciones en rectas por el origen es una rotación en alguna recta por el origen.

La composición de dos rotaciones que pasan por el origen es una isometría que fija el origen y preserva la orientación.

Ya mostramos que las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y reflexiones con rotación, pero las únicas de estas que preservan orientación son las rotaciones en rectas. Así que la composición de las 2 rotaciones debe ser una rotación.