Transformaciones autoadjuntas
y
matrices simétricas

Entre las transformaciones lineales, una clase particularmente importante para la geometría son las isometrías, que son las que preservan la forma y el tamaño.

Otra clase muy importantes para el álgebra, el análisis y la física son las transformaciones **autoadjuntas**.

Una transformación lineal T es una isometría si para cada par de vectores

$$U \cdot V = TU \cdot TV$$

Una transformación lineal T es una isometría si para cada par de vectores

$$U \cdot V = TU \cdot TV$$

Ejemplos.

- Las reflexiones son isometrías.

- Las rotaciones son isometrías.

Una transformación lineal T es una isometría si para cada par de vectores

$$U \cdot V = TU \cdot TV$$

Las matrices correspondientes a las isometrías son las matrices **ortogonales**.

Una transformación lineal T es autoadjunta si para cada par de vectores

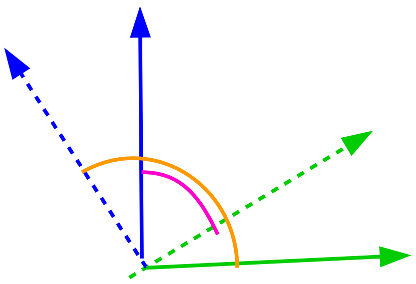
$$TU \cdot V = U \cdot TV$$

Una transformación lineal T es autoadjunta si para cada par de vectores

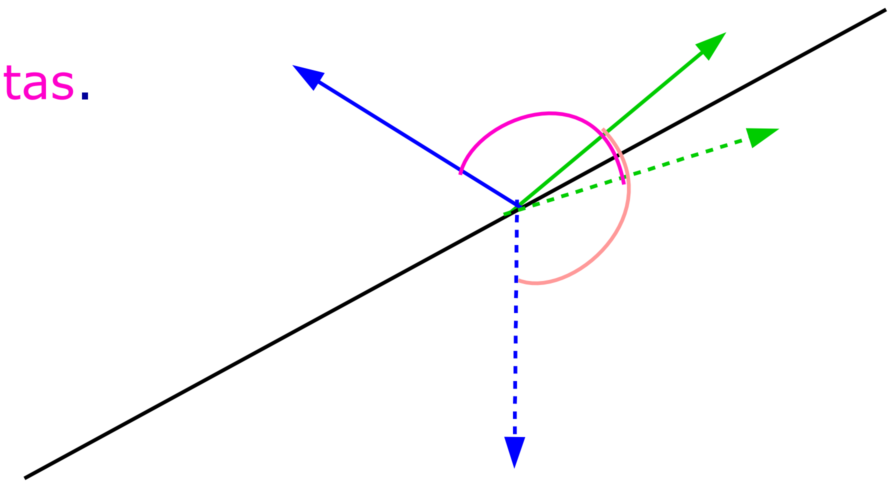
$$TU \cdot V = U \cdot TV$$

Ejemplos:

- Las rotaciones *no son* autoadjuntas.



- Las reflexiones si son autoadjuntas.



Una transformación lineal T es autoadjunta si para cada par de vectores

$$TU \cdot V = U \cdot TV$$

Las transformaciones autoadjuntas pueden parecer raras, pero tienen propiedades especiales, y son muy importantes en el álgebra y el análisis y también en la física.

Una transformación lineal T es autoadjunta si para cada par de vectores

$$TU \cdot V = U \cdot TV$$

¿Y como podemos saber si una transformación lineal es autoadjunta?

Lema. Una transformación lineal T es autoadjunta si y solo si su matriz es simétrica.

Demostración ?

Lema. Una transformación lineal T es autoadjunta si y solo si su matriz es simétrica.

Demostración. (En 2 dimensiones)

T es autoadjunta si U·TV=V·TU para todos los vectores U y V

U=(x,y) V=(x',y') y M la matriz tal que

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(x \;\; y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad = \quad (x' \; y')\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Lema. Una transformación lineal T es autoadjunta si y solo si su matriz es simétrica.

Demostración. (En 2 dimensiones)

T es autoadjunta si U·TV=V·TU para todos los vectores U y V

U=(x,y) V=(x',y') y M la matriz tal que

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(x \;\; y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad = \qquad (x' \; y')\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(x \;\; y)\begin{pmatrix} a_{11}x'+a_{12}y' \\ a_{21}x'+a_{22}y' \end{pmatrix} \qquad = \qquad (x' \; y')\begin{pmatrix} a_{11}x+a_{12}y \\ a_{21}x+a_{22}y \end{pmatrix}$$

Lema. Una transformación lineal T es autoadjunta si y solo si su matriz es simétrica.

Demostración. (En 2 dimensiones)

T es autoadjunta si U·TV=V·TU para todos los vectores U y V

U=(x,y) V=(x',y') y M la matriz tal que

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(x \;\; y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad = \quad (x' \; y')\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(x \;\; y)\begin{pmatrix} a_{11}x'+a_{12}y' \\ a_{21}x'+a_{22}y' \end{pmatrix} \quad = \quad (x' \; y')\begin{pmatrix} a_{11}x+a_{12}y \\ a_{21}x+a_{22}y \end{pmatrix}$$

$$a_{11}xx'+a_{12}xy' + a_{21}yx'+a_{22}yy' \;=\; a_{11}xx'+a_{12}yx' + a_{21}xy'+a_{22}yy'$$

Lema. Una transformación lineal T es autoadjunta si y solo si su matriz es simétrica.

Demostración. Sea M la matriz correspondiente a la transformación lineal T.

$\Leftarrow$

Si $e_i = (0,...,0,1,0,..,0)$ y la matriz M tiene entradas a_{ij}

entonces $e_i \cdot Me_j = a_{ij}$ y $Me_i \cdot e_j = a_{ji}$

Así que si la transformación es autoadjunta $a_{ij} = a_{ji}$ y la matriz M debe ser simétrica.

Lema. Una transformación lineal T es autoadjunta si y solo si su matriz es simétrica.

Demostración. Sea M la matriz correspondiente a la transformación lineal T.

$\Leftarrow$

Si e_i =(0,...,0,1,0,..,0) y la matriz M tiene entradas a_{ij}

entonces $e_i \cdot Me_j = a_{ij}$ y $e_j \cdot Me_i = a_{ji}$

Así que si la transformación es autoadjunta $a_{ij} = a_{ji}$ y la matriz M debe ser simétrica.

$\Rightarrow$ Supongamos ahora que M es simétrica.

Si escribimos a los vectores como columnas, entonces

$U \cdot V = U^T V$ y por la asociatividad del producto de matrices

$$MU \cdot V = (MU)^T V = (U^T M^T)V = U^T(M^T V) = U^T(MV) = U \cdot MV. \qquad \bullet$$

Ejercicio. ¿Cuales de estas transformaciones son autoadjuntas?

$T(x,y,z) = (x+y,x-z,-y)$

$T(x,y,z) = (x-y,x+z,-y)$

$T(x,y,z) = (4x+2y-3z,2x+y+z,3x+y)$

Teorema. Si M es una matriz simétrica de cualquier tamaño, los vectores propios de M correspondientes a *distintos* valores propios deben ser ortogonales.

Demostración ?

Teorema. Si M es una matriz simétrica de cualquier tamaño, los vectores propios de M correspondientes a *distintos* valores propios deben ser ortogonales.

Demostración. Si U y V son dos vectores propios correspondientes a los valores propios μ y λ entonces

$TV \cdot U = \mu V \cdot U = \mu\ (V \cdot U)$

mientras que

$U \cdot TV = U \cdot \lambda V\ = \lambda\ (U \cdot V)$

así que los dos productos son iguales si y solo si $\mu = \lambda$ o $U \cdot V = 0$. •

Lema. Cada transformación autoadjunta del plano tiene 2 vectores propios ortogonales.

Demostración ?

Lema. Cada transformación autoadjunta del plano tiene 2 vectores propios ortogonales.

Demostración.

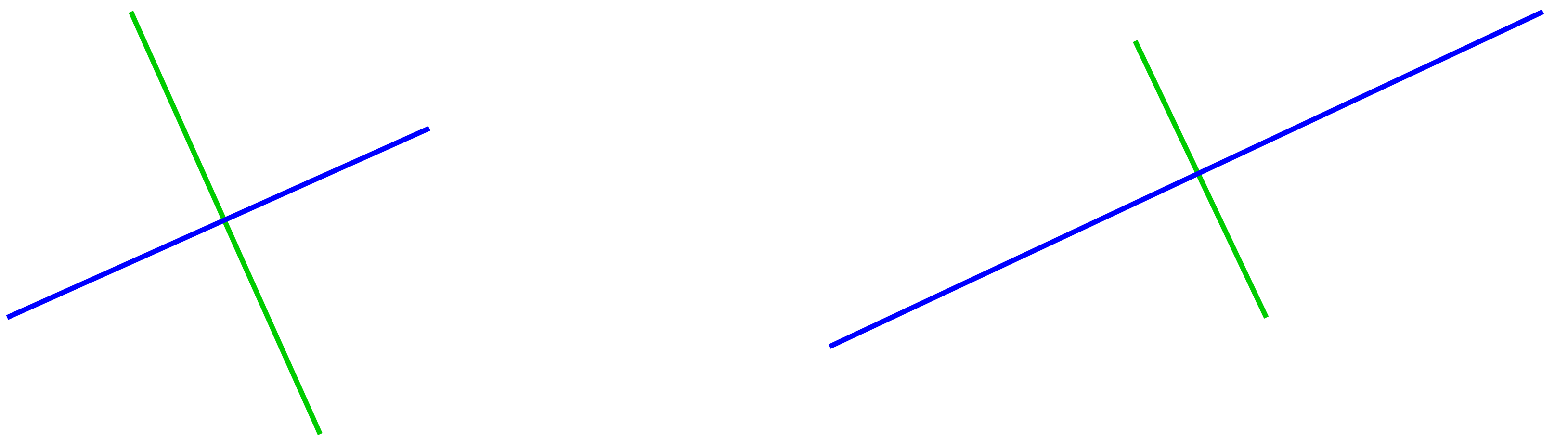
Para una matriz simétrica M de 2x2

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad M-\lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix} \qquad \det(M-\lambda I) = \lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{a+c \pm\sqrt{(a+c)^2-4(ac-b^2)}}{2} = \frac{a+c \pm\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$$

Así que hay dos raíces reales distintas (a menos que $a=c$ y $b=0$) y por el lema anterior les corresponden 2 vectores propios ortogonales (si $a=c$ y $b=0$ la matriz es un múltiplo de la identidad y todos los vectores del plano son vectores propios). •

Corolario. Las transformaciones autoadjuntas del plano son los estiramientos en 2 direcciones ortogonales.



Corolario. Las transformaciones autoadjuntas del plano son los estiramientos en 2 direcciones ortogonales.

Demostración.

Si la matriz M es simétrica entonces la transformación lineal correspondiente a M tiene 2 vectores propios ortogonales y la transformación estira al plano en esas dos direcciones.

Corolario. Las transformaciones autoadjuntas del plano son los estiramientos en 2 direcciones ortogonales.

Demostración.

Si la matriz M es simétrica entonces la transformación lineal correspondiente a M tiene 2 vectores propios ortogonales y la transformación estira al plano en esas dos direcciones.

Un estiramiento del plano en dos direcciones ortogonales esta dado por una matriz IEI^{-1}, donde I es una isometría que lleva los ejes coordenados a esas dos direcciones y E es la matriz diagonal de un estiramiento en las direcciones de los ejes coordenados.

Como E es diagonal $E=E^T$ y como I es ortogonal $I^{-1}=I^T$.

Por lo tanto $(IEI^{-1})^T = I^{-1T}E^TI^T = IEI^{-1}$ así que IEI^{-1} es simétrica. •

Teorema. Cada transformación autoadjunta T del espacio tiene 3 vectores propios ortogonales.

Demostración ?

Teorema. Cada transformación autoadjunta T del espacio tiene 3 vectores propios ortogonales.

Demostración.

Todas las transformaciones lineales del espacio tienen al menos un valor propio λ y un vector propio U.

Si T es autoadjunta, entonces $U \cdot TV = TU \cdot V = \lambda U \cdot V$

por tanto T debe mandar vectores ortogonales a U a vectores ortogonales a U y el plano P perpendicular a U debe ir a dar en si mismo.

En este plano T actúa como una transformación lineal autoadjunta, pero una transformación autoadjunta en el plano P tiene dos vectores propios ortogonales en el plano, por lo tanto T tiene 3 vectores propios ortogonales. •

Corolario. Las transformaciones autoadjuntas del espacio son los estiramientos en 3 direcciones ortogonales.

Corolario. Las transformaciones autoadjuntas del espacio son los estiramientos en 3 direcciones ortogonales.

Demostración.

*S*i la matriz M es simétrica entonces tiene 3 vectores propios ortogonales, y la transformación lineal dada por M estira al espacio en esas 3 direcciones.

Corolario. Las transformaciones autoadjuntas del espacio son los estiramientos en 3 direcciones ortogonales.

Demostración.

*S*i la matriz M es simétrica entonces tiene 3 vectores propios ortogonales, y la transformación lineal dada por M estira al espacio en esas 3 direcciones.

Un estiramiento del espacio en 3 direcciones ortogonales esta dado por una matriz IEI^{-1}, donde E es la matriz de estiramiento en la dirección de los ejes coordenados y I es la matriz de la isometría que lleva los ejes coordenados a esas 3 direcciones.

Como E es una matriz diagonal $E^T=E$.

Como I es una matriz ortogonal $I^{-1}= I^T$.

así que $(IEI^{-1})^T= I^{-1T}E^TI^T = IEI^{-1}$

y esto dice que IEI^{-1} es una matriz simétrica. •

Ejercicio. Muestra directamente que la siguiente matriz corresponde a un estiramiento del espacio en 3 direcciones ortogonales, hallando las direcciones y los factores de estiramiento.