

Mas dimensiones

$\mathbf{R}$ (el conjunto de números reales) es un buen modelo de la recta euclidiana.

$\mathbf{R}^2 = \{(x,y) / x,y \in \mathbf{R}\}$ es un buen modelo del plano euclidiano.

$\mathbf{R}^3 = \{(x,y,z) / x,y,z \in \mathbf{R}\}$ es un buen modelo del espacio euclidiano.

$\mathbf{R}^4 = \{(x,y,z,w) / x,y,z,w \in \mathbf{R}\}$ debería ser un buen modelo de un espacio euclidiano de 4 dimensiones.

$\mathbf{R}^n = \{(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) / x_i \in \mathbf{R}\}$ podría ser un modelo de un espacio euclidiano de n dimensiones.

$\mathbf{R}$ (el conjunto de números reales) es un buen modelo de la recta euclidiana.

$\mathbf{R}^2 = \{(x,y) / x,y \in \mathbf{R}\}$ es un buen modelo del plano euclidiano.

$\mathbf{R}^3 = \{(x,y,z) / x,y,z \in \mathbf{R}\}$ es un buen modelo del espacio euclidiano.

$\mathbf{R}^4 = \{(x,y,z,w) / x,y,z,w \in \mathbf{R}\}$ debería ser un buen modelo de un espacio euclidiano de 4 dimensiones.

$\mathbf{R}^n = \{(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) / x_i \in \mathbf{R}\}$ podría ser un modelo de un espacio euclidiano de n dimensiones.

Los métodos de la geometría analítica (coordenadas, ecuaciones, vectores y matrices) sirven para estudiar la geometría de espacios con cualquier número de dimensiones.

Vamos a hablar de $\mathbf{R}^4 = \{(x,y,z,w) / x,y,z,w \in \mathbf{R}\}$ pero las ideas son las mismas en mas dimensiones.

Vamos a hablar de $\mathbf{R}^4 = \{(x,y,z,w) / x,y,z,w \in \mathbf{R}\}$ pero las ideas son las mismas en mas dimensiones.

Podemos pensar en los puntos de $\mathbf{R}^4$ como vectores: podemos sumarlos coordenada a coordenada y multiplicarlos por un escalar r multiplicando sus coordenadas por r .

Vamos a hablar de $\mathbf{R}^4 = \{(x,y,z,w) / x,y,z,w \in \mathbf{R}\}$ pero las ideas son las mismas en mas dimensiones.

Podemos pensar en los puntos de $\mathbf{R}^4$ como vectores: podemos sumarlos coordenada a coordenada y multiplicarlos por un escalar r multiplicando sus coordenadas por r .

Si fijamos cualquiera de las coordenadas de $\mathbf{R}^4$, obtenemos un *hiperplano* igual a $\mathbf{R}^3$.

Observar que en $\mathbf{R}^4$:

- un punto P y un vector $U \neq 0$ definen una recta

$$\{P+sU \mid s \in \mathbf{R}\}$$

Observar que en $\mathbf{R}^4$:

- un punto P y un vector $U \neq 0$ definen una recta

$$\{P+sU / s \in \mathbf{R}\}$$

- un punto P y dos vectores U y V no colineales definen un plano:

$$\{P+sU+tV / s,t \in \mathbf{R}\}$$

Observar que en $\mathbf{R}^4$:

- un punto P y un vector $U \neq 0$ definen una recta

$$\{P+sU / s \in \mathbf{R}\}$$

- un punto P y dos vectores U y V no colineales definen un plano:

$$\{P+sU+tV / s,t \in \mathbf{R}\}$$

- un punto P y tres vectores no coplanares U, V y W definen un *hiperplano*

$$\{P+tU+sV+rW / s,t,r \in \mathbf{R}\}$$

(hay una función lineal biyectiva entre los puntos del hiperplano y los puntos de $\mathbf{R}^3$)

Observar que en $\mathbf{R}^4$:

- un punto P y un vector $U \neq 0$ definen una recta

$$\{P+sU / s \in \mathbf{R}\}$$

- un punto P y dos vectores U y V no colineales definen un plano:

$$\{P+sU+tV / s,t \in \mathbf{R}\}$$

- un punto P y tres vectores no coplanares U, V y W definen un *hiperplano*

$$\{P+tU+sV+rW / s,t,r \in \mathbf{R}\}$$

(hay una función lineal biyectiva entre los puntos del hiperplano y los puntos de $\mathbf{R}^3$)

Se sigue fácilmente que por dos puntos de $\mathbf{R}^4$ pasa una única recta, por 3 puntos no colineales pasa un único plano y por 4 puntos no coplanares pasa un único hiperplano.

En $\mathbf{R}^4$ podemos medir distancias de manera análoga a como lo hacemos en $\mathbf{R}^3$:

Si $U=(a,b,c,d)$ definimos $|U| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$

En $\mathbf{R}^4$ podemos medir distancias de manera análoga a como lo hacemos en $\mathbf{R}^3$:

Si $U=(a,b,c,d)$ definimos $|U| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$

¿Cual es la distancia del punto $(1,2,3,4)$ al origen $(0,0,0,0)$?

¿Cual es la distancia entre los puntos $(1,0,3,-2)$ y $(0,-1,4,-1)$?

En $\mathbf{R}^4$ podemos medir distancias de manera análoga a como lo hacemos en $\mathbf{R}^3$:

Si $U=(a,b,c,d)$ definimos $|U| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$

¿Como será la ecuación de de los puntos en $\mathbf{R}^4$ cuya distancia al origen es 1?

En $\mathbf{R}^4$ podemos medir distancias de manera análoga a como lo hacemos en $\mathbf{R}^3$:

Si $U=(a,b,c,d)$ definimos $|U| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$

¿Como será la ecuación de de los puntos en $\mathbf{R}^4$ cuya distancia al origen es 1?

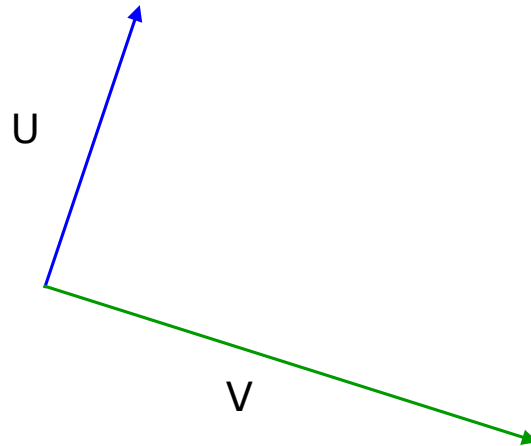
$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$$

una *hiperesfera*

En $\mathbf{R}^4$ podemos medir distancias de manera análoga a como lo hacemos en $\mathbf{R}^3$:

Si $U=(a,b,c,d)$ definimos $|U| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$

Podemos decir que 2 vectores U y V en $\mathbf{R}^4$ son **ortogonales** si...

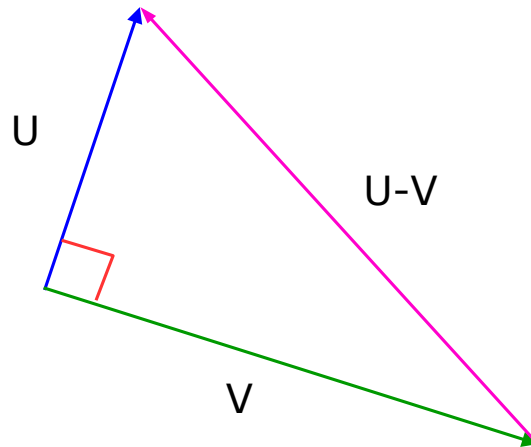


En $\mathbf{R}^4$ podemos medir distancias de manera análoga a como lo hacemos en $\mathbf{R}^3$:

Si $U=(a,b,c,d)$ definimos $|U| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$

Podemos decir que 2 vectores U y V en $\mathbf{R}^4$ son **ortogonales** si se cumple el teorema de Pitágoras:

$$|U|^2 + |V|^2 = |U-V|^2$$



Definimos el **producto punto** de dos vectores en $\mathbf{R}^4$ como ...

Definimos el **producto punto** de dos vectores en $\mathbf{R}^4$ como

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (a_2, b_2, c_2, d_2) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$$

Definimos el **producto punto** de dos vectores en $\mathbf{R}^4$ como

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (a_2, b_2, c_2, d_2) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$$

Teorema. Dos vectores U y V en $\mathbf{R}^4$ son ortogonales, si y solo si $U \cdot V = 0$

Definimos el **producto punto** de dos vectores en $\mathbf{R}^4$ como

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (a_2, b_2, c_2, d_2) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$$

Teorema. Dos vectores U y V en $\mathbf{R}^4$ son ortogonales, si y solo si $U \cdot V = 0$

Demostración. Si $U = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ y $V = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ entonces

$$|U|^2 + |V|^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2$$

$$|U - V|^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2 + (d_1 - d_2)^2 =$$

$$a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 + b_1^2 - 2b_1b_2 + b_2^2 + c_1^2 - 2c_1c_2 + c_2^2 + d_1^2 - 2d_1d_2 + d_2^2$$

Así que la igualdad se cumple si y solo si $U \cdot V = 0$. •

Lema. Para cualesquiera 3 vectores U, V, W en $\mathbf{R}^4$ existe un vector ortogonal a los tres.

Demostración ?

Lema. Para cualesquiera 3 vectores U, V, W en $\mathbb{R}^4$ existe un vector ortogonal a los tres.

Demostración. Sean $U=(a,b,c,d)$, $V=(e,f,g,h)$ y $W=(i,j,k,l)$

Un vector perpendicular a los tres es una solución (x,y,z,w) distinta de $(0,0,0,0)$ del sistema de ecuaciones lineales homogéneas

Lema. Para cualesquiera 3 vectores U, V, W en $\mathbb{R}^4$ existe un vector ortogonal a los tres.

Demostración. Sean $U=(a,b,c,d)$, $V=(e,f,g,h)$ y $W=(i,j,k,l)$

Un vector perpendicular a los tres es una solución (x,y,z,w) distinta de $(0,0,0,0)$ del sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$ax+by+cz+dw=0$$

$$ex+fy+gz+hw=0$$

$$ix+jy+kz+lw=0$$

Lema. Para cualesquiera 3 vectores U, V, W en $\mathbb{R}^4$ existe un vector ortogonal a los tres.

Demostración. Sean $U=(a,b,c,d)$, $V=(e,f,g,h)$ y $W=(i,j,k,l)$

Un vector perpendicular a los tres es una solución (x,y,z,w) distinta de $(0,0,0,0)$ del sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$ax+by+cz+dw=0$$

$$ex+fy+gz+hw=0$$

$$ix+jy+kz+lw=0$$

Los sistemas de 3 ecuaciones lineales homogéneas con 4 incógnitas siempre tienen soluciones no triviales ya que podemos usar la primera ecuación para eliminar una variable de las otras ecuaciones, usar la segunda ecuación para eliminar otra variable de las otras y usar la tercera ecuación para eliminar una variable mas, de modo que al final todas las variables quedan en función de algunas que podemos elegir arbitrariamente. •

Ejemplo. Encontrar un vector en $\mathbb{R}^4$ perpendicular a $(1,1,0,1)$, $(1,0,1,1)$ y $(0,1,1,1)$

Ejemplo. Encontrar un vector en $\mathbf{R}^4$ perpendicular a $(1,1,0,1)$, $(1,0,1,1)$ y $(0,1,1,1)$

Buscamos una solución $(x,y,z,w) \neq (0,0,0,0)$ del sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$x+y+w = 0$$

$$x+w+z = 0$$

$$y+z+w = 0$$

Lema. En cada plano de $\mathbf{R}^4$ hay dos vectores perpendiculares, y en cada hiperplano hay tres vectores perpendiculares.

Demostración ?

Lema. En cada plano de $\mathbf{R}^4$ hay dos vectores perpendiculares, y en cada hiperplano hay tres vectores perpendiculares.

Demostración. Si U, V, W son 3 vectores no colineales en $\mathbf{R}^4$, entonces

U y $V' = V - \frac{U \cdot V}{U \cdot U} U$ son perpendiculares (ya que $U \cdot V' = 0$),

y además U, V' generan el mismo plano que U y V (porque V' es combinación lineal de U y V y V es combinación lineal de U y V').

Si U, V, W son 3 vectores no coplanares en $\mathbf{R}^4$, entonces

$U, V' = V - \frac{U \cdot V}{U \cdot U} U$ y $W' = W - \frac{W \cdot U}{U \cdot U} U - \frac{W \cdot V'}{V' \cdot V'} V'$

son perpendiculares (los productos punto son 0) y generan el mismo hiperplano que U, V, W (porque U, V', W' son combinaciones lineales de U, V, W , y viceversa). •

Recordar que dos figuras tienen la misma forma si podemos llevar una a la otra sin deformarla, es decir, sin cambiar las distancias entre sus puntos.

Recordar que dos figuras tienen la misma forma si podemos llevar una a la otra sin deformarla, es decir, sin cambiar las distancias entre sus puntos.

Corolario. En $\mathbf{R}^4$ los planos tienen la misma forma que $\mathbf{R}^2$, y los hiperplanos tienen la misma forma que $\mathbf{R}^3$.

Demostración ?

Recordar que dos figuras tienen la misma forma si podemos llevar una a la otra sin deformarla, es decir, sin cambiar las distancias entre sus puntos.

Corolario. En $\mathbf{R}^4$ los planos tienen la misma forma que $\mathbf{R}^2$, y los hiperplanos tienen la misma forma que $\mathbf{R}^3$.

Demostración. Cada plano P está generado por 2 vectores perpendiculares y cada hiperplano H está generado por 3 vectores perpendiculares, y podemos elegirlos de norma 1.

Recordar que dos figuras tienen la misma forma si podemos llevar una a la otra sin deformarla, es decir, sin cambiar las distancias entre sus puntos.

Corolario. En $\mathbf{R}^4$ los planos tienen la misma forma que $\mathbf{R}^2$, y los hiperplanos tienen la misma forma que $\mathbf{R}^3$.

Demostración. Cada plano P está generado por 2 vectores perpendiculares y cada hiperplano H está generado por 3 vectores perpendiculares, y podemos elegirlos de norma 1.

La función de $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4 \cap P$ que envía $(s,t) \in \mathbf{R}^2$ a $O+sU+tV$ es una función lineal que preserva distancias, por lo que el plano tiene la forma de $\mathbf{R}^2$.

Y la función de $\mathbf{R}^3$ al hiperplano H que envía $(s,t,r) \in \mathbf{R}^3$ a $O+sU+tV+rW$ también es una función lineal que preserva distancias, por lo que el hiperplano tiene la forma de $\mathbf{R}^3$.



Lema: $U \cdot V = |U|^2 + |V|^2 - 2|U||V|\cos\theta$, donde θ es el ángulo que forman los vectores U y V en el plano que los contiene.

Demostración ?

Lema: $U \cdot V = |U||V|\cos\theta$, donde θ es el ángulo que forman los vectores U y V en el plano que los contiene.

Demostración. Si el ángulo que forman U y V es θ , entonces la altura del triángulo determinado por U y V es $|U|\sin\theta$, así que por el Teorema de Pitágoras

$$|U-V|^2 = (|U|\sin\theta)^2 + (|V|-|U|\cos\theta)^2 \quad \text{desarrollando queda}$$

$$|U-V|^2 = |U|^2 \sin^2\theta + |V|^2 - 2|V||U|\cos\theta + |U|^2 \cos^2\theta$$

$$= |U|^2 + |V|^2 - 2|U||V|\cos\theta$$

pero ya habíamos visto que $|U-V|^2 = |U|^2 + |V|^2 - 2U \cdot V$

así que $U \cdot V = |U||V|\cos\theta$. •

Lema: $U \cdot V = |U||V|\cos\theta$, donde θ es el ángulo que forman los vectores U y V en el plano que los contiene.

Demostración. Si el ángulo que forman U y V es θ ,

entonces la altura del triángulo determinado por U y V es $|U|\sin\theta$,

así que por el Teorema de Pitágoras

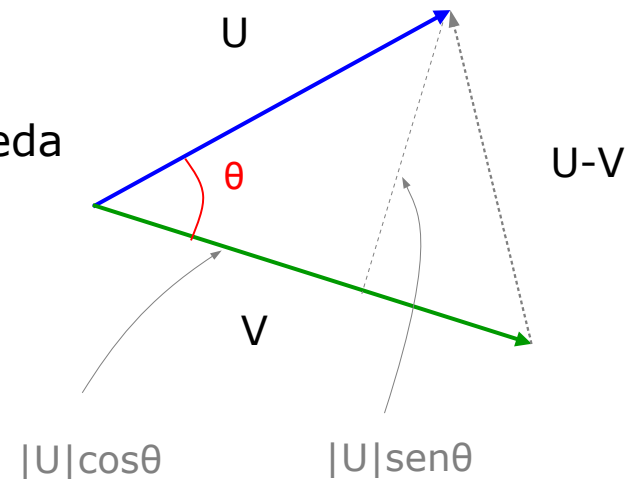
$$|U-V|^2 = (|U|\sin\theta)^2 + (|V| - |U|\cos\theta)^2 \quad \text{desarrollando queda}$$

$$|U-V|^2 = |U|^2 \sin^2\theta + |V|^2 - 2|V||U|\cos\theta + |U|^2 \cos^2\theta$$

$$= |U|^2 + |V|^2 - 2|U||V|\cos\theta$$

pero ya habíamos visto que $|U-V|^2 = |U|^2 + |V|^2 - 2U \cdot V$

así que $U \cdot V = |U||V|\cos\theta$. •



Así que el producto punto da una manera de medir el ángulo entre los vectores:

$$\cos\theta = \frac{U \cdot V}{|U||V|}$$

Lema. En $\mathbf{R}^4$ no existen mas de 4 vectores linealmente independientes.

Demostración ?

Lema. En $\mathbf{R}^4$ no existen mas de 4 vectores linealmente independientes.

Demostración. Dados 5 vectores en $\mathbf{R}^4$, tomemos uno cuya primera coordenada sea distinta de cero, y restémosle múltiplos de este vector a los otros 4 para que sus primeras coordenadas se hagan 0.

Lema. En $\mathbf{R}^4$ no existen mas de 4 vectores linealmente independientes.

Demostración. Dados 5 vectores en $\mathbf{R}^4$, tomemos uno cuya primera coordenada sea distinta de cero, y restémosle múltiplos de este vector a los otros 4 para que sus primeras coordenadas se hagan 0.

Tomemos uno de esos 4 vectores modificados cuya segunda coordenada sea distinta de 0 y restémosle múltiplos de este vector a los 3 restantes para que sus segundas coordenadas se hagan 0.

Lema. En $\mathbf{R}^4$ no existen mas de 4 vectores linealmente independientes.

Demostración. Dados 5 vectores en $\mathbf{R}^4$, tomemos uno cuya primera coordenada sea distinta de cero, y restémosle múltiplos de este vector a los otros 4 para que sus primeras coordenadas se hagan 0.

Tomemos uno de esos 4 vectores modificados cuya segunda coordenada sea distinta de 0 y restémosle múltiplos de este vector a los 3 restantes para que sus segundas coordenadas se hagan 0.

Tomemos uno de estos 3 vectores doblemente modificados cuya tercera coordenada sea distinta de 0 y restémosle múltiplos de ese vector a los dos restantes para que sus terceras coordenadas se hagan 0.

Lema. En $\mathbf{R}^4$ no existen mas de 4 vectores linealmente independientes.

Demostración. Dados 5 vectores en $\mathbf{R}^4$, tomemos uno cuya primera coordenada sea distinta de cero, y restémosle múltiplos de este vector a los otros 4 para que sus primeras coordenadas se hagan 0.

Tomemos uno de esos 4 vectores modificados cuya segunda coordenada sea distinta de 0 y restémosle múltiplos de este vector a los 3 restantes para que sus segundas coordenadas se hagan 0.

Tomemos uno de estos 3 vectores doblemente modificados cuya tercera coordenada sea distinta de 0 y restémosle múltiplos de ese vector a los dos restantes para que sus terceras coordenadas se hagan 0.

Tomemos uno de estos 2 vectores triplemente modificados cuya cuarta coordenada sea distinta de 0 y restémosle un múltiplo de al vector restante para que su cuarta coordenada se haga 0.

Lema. En $\mathbf{R}^4$ no existen mas de 4 vectores linealmente independientes.

Demostración. Dados 5 vectores en $\mathbf{R}^4$, tomemos uno cuya primera coordenada sea distinta de cero, y restémosle múltiplos de este vector a los otros 4 para que sus primeras coordenadas se hagan 0.

Tomemos uno de esos 4 vectores modificados cuya segunda coordenada sea distinta de 0 y restémosle múltiplos de este vector a los 3 restantes para que sus segundas coordenadas se hagan 0.

Tomemos uno de estos 3 vectores doblemente modificados cuya tercera coordenada sea distinta de 0 y restémosle múltiplos de ese vector a los dos restantes para que sus terceras coordenadas se hagan 0.

Tomemos uno de estos 2 vectores triplemente modificados cuya cuarta coordenada sea distinta de 0 y restémosle un múltiplo de al vector restante para que su cuarta coordenada se haga 0.

Al final uno de los vectores debe ser 0 (porque solo hay 4 coordenadas y son 5 vectores). Como este se obtuvo de restarle a uno de los vectores originales algunos múltiplos de otros vectores, ese vector original es combinación lineal de los otros, contradiciendo que todos eran linealmente independientes. •

Corolario. La ecuación $Ax+By+Cz+Dw=E$ representa un hiperplano en $\mathbf{R}^4$.

Demostración ?

Corolario. La ecuación $Ax+By+Cz+Dw=E$ representa un hiperplano en $\mathbf{R}^4$.

Demostración. Las soluciones de la ecuación homogénea $Ax+By+Cz+Dw=0$ son los vectores en $\mathbf{R}^4$ que son ortogonales al vector (A,B,C,D) .

Estos forman un subespacio S de $\mathbf{R}^4$ que contiene al menos 3 vectores linealmente independientes, así que S es por lo menos un hiperplano.

Y S no puede contener 4 vectores linealmente independientes porque junto con el vector ortogonal a S serían 5 vectores linealmente independientes en $\mathbf{R}^4$.

Corolario. La ecuación $Ax+By+Cz+Dw=E$ representa un hiperplano en $\mathbf{R}^4$.

Demostración. Las soluciones de la ecuación homogénea $Ax+By+Cz+Dw=0$ son los vectores en $\mathbf{R}^4$ que son ortogonales al vector (A,B,C,D) .

Estos forman un subespacio S de $\mathbf{R}^4$ que contiene al menos 3 vectores linealmente independientes, así que S es por lo menos un hiperplano.

Y S no puede contener 4 vectores linealmente independientes porque junto con el vector ortogonal a S serían 5 vectores linealmente independientes en $\mathbf{R}^4$.

Las soluciones de la ecuación no homogénea $Ax+By+Cz+Dw=E$ se obtienen sumándoles a las soluciones de $Ax+By+Cz+Dw=0$ una solución particular de la ecuación no homogénea, (es decir, trasladando un hiperplano sumándoles un vector fijo. •

Corolario.

- Dos planos distintos en $\mathbf{R}^4$ se intersectan en ...
- Dos hiperplanos distintos en $\mathbf{R}^4$ se intersectan en ...

Corolario.

- Dos planos distintos en $\mathbf{R}^4$ se intersectan en una recta, un punto o el vacío.
- Dos hiperplanos distintos en $\mathbf{R}^4$ se intersectan en un plano o el vacío.

Demostración ?

Corolario.

- Dos planos distintos en $\mathbf{R}^4$ se intersectan en una recta, un punto o el vacío.
- Dos hiperplanos distintos en $\mathbf{R}^4$ se intersectan en un plano o el vacío.

Demostración. Las otras alternativas posibles serían dos hiperplanos H y H' que se intersectan en un punto p o en una recta R .

Sean V_1, V_2, V_3 tres vectores basados en p que generen a H y sean V_4, V_5, V_6 tres vectores basados en p que generen a H' .

Como $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6$ no pueden ser linealmente independientes, uno de ellos, digamos V_6 , es combinación lineal de los otros:

$$V_6 = a_1V_1 + a_2V_2 + a_3V_3 + a_4V_4 + a_5V_5 \quad \text{así que}$$

$$-a_4V_4 - a_5V_5 + V_6 = a_1V_1 + a_2V_2 + a_3V_3$$

Este vector está en H y también está en H'

Y la intersección de H y H' debe contener a la línea generada por ese vector.

Corolario.

- Dos planos distintos en $\mathbf{R}^4$ se intersectan en una recta, un punto o el vacío.
- Dos hiperplanos distintos en $\mathbf{R}^4$ se intersectan en un plano o el vacío.

Demostración (continua).

Si H y H' se intersectan en una línea, sea V_1 un vector ($\neq 0$) en esa línea y elijamos V_2, V_3, V_4, V_5 de modo que V_1, V_2, V_3 generen a H y que V_1, V_4, V_5 generen a H' .

Como V_1, V_2, V_2, V_4, V_5 no pueden ser linealmente independientes, uno de ellos debe ser combinación de los otros, digamos V_5 (los otros casos son similares)

$$V_5 = a_1 V_1 + a_2 V_2 + a_3 V_3 + a_4 V_5 \quad \text{así que} \quad V_5 - a_4 V_4 = a_1 V_1 + a_2 V_2 + a_3 V_3$$

El vector $V_5 - a_4 V_4$ esta en H y también esta en H' porque es igual a $a_1 V_1 + a_2 V_2 + a_3 V_3$.

Así que la intersección de H y H' debe contener al plano generado por $a_1 V_1$ y por $V_5 - a_4 V_4$ •

Ejemplo. Como son los puntos en la intersección de los hiperplanos $x=0$ y $z=0$?

Son los puntos de la forma $(0,y,0,w)$ que forman un plano

Ejemplo. ?Como son los puntos en la intersección de los hiperplanos

$$x+y+z+w=1 \qquad 4x+3y+2z+w=0?$$

Si despejamos w en la primera ecuación y la sustituimos en la segunda queda

$$w=1-x-y-z \qquad 4x+3y+2z+(1-x-y-z)=0 \quad \text{de donde} \quad 3x+2y+z=-1$$

$$\text{Así que } z=-1-2y-3x \quad \text{y} \quad w=1-x-y-(-1-2y-3x)=2+2x+y$$

Por lo que los puntos de la intersección son de la forma $(x,y,-1-2y-3x,2+2x+y)$

Las transformaciones lineales de $\mathbf{R}^4$ se pueden representar usando matrices de 4×4 .

Las isometrías de $\mathbf{R}^4$ (que fijan el origen) están dadas por matrices...

En $\mathbf{R}^2$ hay reflexiones en rectas

En $\mathbf{R}^3$ hay reflexiones en planos

En $\mathbf{R}^4$ hay reflexiones en hiperplanos

La matriz de la reflexión en el hiperplano $y=0$ es ...

Y la matriz de la reflexión en el hiperplano $x=y$ es ...

En $\mathbf{R}^2$ las rotaciones son alrededor de puntos.

En $\mathbf{R}^3$ las rotaciones son alrededor de rectas.

En $\mathbf{R}^4$ las rotaciones son alrededor de planos

La rotación alrededor de $\mathbf{R}^4$ en el plano $x=0$ esta dada por la matriz...

La rotación alrededor de $\mathbf{R}^4$ en el plano $y=z$ esta dada por la matriz...

Así que en $\mathbf{R}^4$ podemos rotar alrededor de planos, ¿pero no podremos también rotar alrededor de rectas?

Así que en $\mathbf{R}^4$ podemos rotar alrededor de planos, ¿pero no podremos también rotar alrededor de rectas?

Lema. No hay isometrías de $\mathbf{R}^4$ que dejen invariante una sola dirección.

Demostración ?

Así que en $\mathbf{R}^4$ podemos rotar alrededor de planos, ¿pero no podremos también rotar alrededor de rectas?

Lema. No hay isometrías de $\mathbf{R}^4$ que dejen invariante una sola dirección.

Demostración. Si una isometría I deja invariante a una recta entonces debe dejar invariante al hiperplano H ortogonal a la recta, y I actúa en H como una isometría. Pero H tiene la forma de $\mathbf{R}^3$ y cualquier isometría de $\mathbf{R}^3$ deja una dirección invariante. La dirección invariante en H es otra dirección invariante de I . •

Las isometrías de $\mathbf{R}^2$ que fijan el origen son ...

Las isometrías de $\mathbf{R}^2$ que fijan el origen son rotaciones y reflexiones

Las isometrías de $\mathbf{R}^2$ que fijan el origen son rotaciones y reflexiones

Las isometrías de $\mathbf{R}^3$ que fijan el origen son ...

Las isometrías de $\mathbf{R}^2$ que fijan el origen son rotaciones y reflexiones

Las isometrías de $\mathbf{R}^3$ que fijan el origen son rotaciones, reflexiones y rotaciones con reflexión

Las isometrías de $\mathbf{R}^2$ que fijan el origen son rotaciones y reflexiones

Las isometrías de $\mathbf{R}^3$ que fijan el origen son rotaciones, reflexiones y rotaciones con reflexión

Las isometrías de $\mathbf{R}^4$ que fijan el origen son ...