Introducción

La geometría analítica es la geometría con coordenadas. Las coordenadas permiten convertir problemas geométricos a problemas algebraicos y viceversa, lo que forma un puente entre la geometría y el álgebra.

GEOMETRIA	ALGEBRA
puntos	números
curvas, superficies	ecuaciones
transformaciones	funciones
formas	invariantes

La geometría analítica:

- añade una perspectiva algebraica a la geometría y una perspectiva geométrica al álgebra

- da una manera sistemática de abordar la geometría euclidiana y le da un modelo algebraico.

- ayuda a hacer geometría “sin ver” (lo que es crucial para las computadoras).

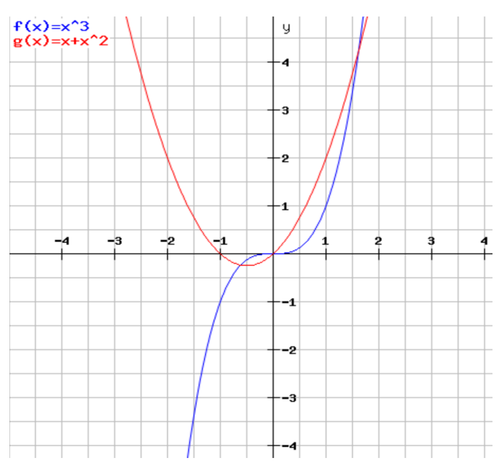
- permite generalizar la geometría a mas dimensiones y desarrollar la geometría no euclidiana.

Ejemplos:

- ¿Existen números que sumados con su cuadrado den el cubo del número?

Algebraicamente, buscamos las soluciones de la ecuación $x + x^2 = x^3$

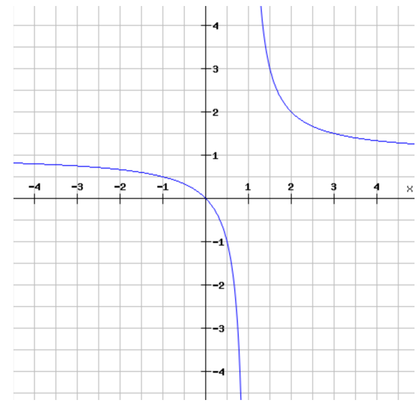
Claramente el 0 es una solución, pero habrán otras?



Geométricamente, podemos ver que las curvas $y=x^2+x$ y $y=x^3$ se tocan en 3 puntos, así que existen 3 soluciones del problema. □

- ¿Existirán muchos pares de números reales tales que su suma sea igual a su producto?

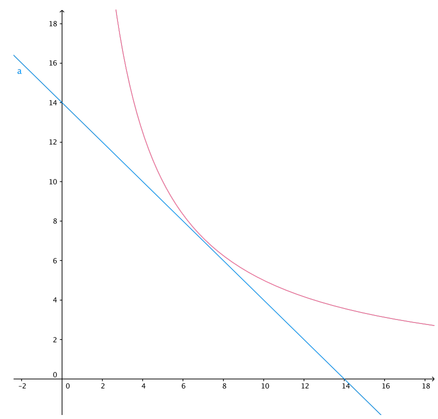
Algebraicamente, buscamos dos números x y y tales que $x+y=xy$



Geométricamente, la ecuación $x+y=xy$ representa una hipérbola, y cada punto de la hipérbola da una solución, así que hay una infinidad de soluciones. □

- ¿Existirán dos números reales cuya suma sea 14 y su producto sea 50?

Algebraicamente, buscamos dos números x y y tales que $x+y=14$ y $xy=50$.



Geométricamente, las soluciones de $x+y=14$ forman una linea recta y las de $xy=50$ forman una hipérbola. Las soluciones comunes son las intersecciones de las 2 curvas. Como las curvas no se intersectan, no existe ningún par de números reales cuya suma sea 14 y su producto sea 50. □

- ¿Que forma tiene el conjunto de puntos del plano cuya distancia a un punto P es el doble de su distancia a otro punto Q?

Observar que la forma del conjunto no depende de P y Q: si movemos P y Q el conjunto solo cambia de tamaño y posición), así que podemos suponer que P=(0,0) y Q=(1,0).

Las distancias de (x,y) a $(0,0)$ y a $(1,0)$ son $\sqrt{x^2+y^2}$ y $\sqrt{(x-1)^2+y^2}$.

$\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$ (la condición geométrica)

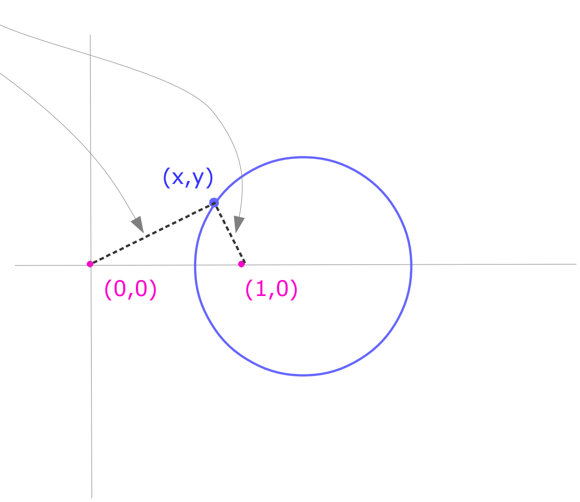
$x^2+y^2 = 4\,[(x-1)^2+y^2]$ (elevar al cuadrado)

$3x^2 - 8x + 3y^2 = -4$ (desarrollar y simplificar)

$x^2 - 8/3x + y^2 = -4/3$ (dividir entre 3)

$x^2 - 8/3x + 16/9 + y^2 = -4/3 + 16/9$ (completar cuadrados)

$(x-4/3)^2 + y^2 = 4/9$ (agrupar)



Esta es la ecuación de un circulo de radio 2/3. □

Ecuaciones.

Las ecuaciones dan relaciones entre variables, que restringen los valores que estas variables pueden tomar. Generalmente esperamos que cada ecuación reduzca en 1 los grados de libertad de sus variables:

- que el conjunto de soluciones de una ecuación en una variable tenga 0 dimensiones, o sea que consista de puntos sueltos en la recta.

- que el conjunto de soluciones de una ecuación en 2 variables tenga 1 dimensión, que sea algo como una *curva* en el plano.

- que el conjunto de soluciones de una ecuación en 3 variables tenga 2 dimensiones, como una *superficie* en el espacio.

Esto ocurre con mucha frecuencia, pero no siempre: hay ecuaciones en 2 variables que no tienen soluciones (como $x^2+y^2=-1$) y otras cuyas soluciones son puntos sueltos (como $x^2+y^2=0$) y lo mismo pasa con ecuaciones en 3 o mas variables.

Aquí hay dos preguntas para que piensen:

¿Existirán ecuaciones que sean satisfechas por todos los valores de las variables?

¿Será posible que 2 ecuaciones distintas tengan exactamente las mismas soluciones?

Es natural preguntarse que pasa al "combinar" ecuaciones, por ejemplo sumándolas o multiplicándolas. ¿Habra alguna relación entre las soluciones? Podemos observar que

- Las soluciones de $P \cdot Q=0$ son la unión de las soluciones de $P=0$ con las soluciones de $Q=0$.
- Las soluciones de $P+Q=0$ incluyen a las soluciones comunes de $P=0$ y de $Q=0$, y quizás muchas otras mas.
- Las soluciones de $P^2+Q^2=0$ son exactamente las soluciones comunes de $P=0$ y de $Q=0$.

Ejemplo. La ecuación $x+y-1=0$ da una recta, $x+2y+3=0$ da otra recta

- Su producto $(x+y-1)(x+2y+3)=0$ da las dos rectas. Pero aunque $x+y=1$, $x+2y=-3$ son ecuaciones de las mismas rectas, su producto $x^2-+3xy+y^2=-3$ da una hipérbola ¿por que?
- Su suma $2x+3y+2=0$ y su resta $-y-4=0$ dan rectas que pasan por el punto de intersección.
- La suma de sus cuadrados $(x+y-1)^2+(x+2y+3)^2=0$ da su punto de intersección.

¿Que pasará con las soluciones de una ecuación si la modificamos "un poquito" ?

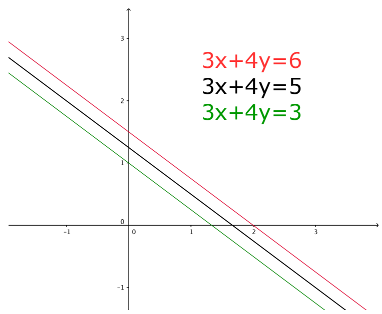
Si la ecuación esta dada por un polinomio (que es una función continua), esperamos que al cambiar un poco los coeficientes las soluciones también cambien poco, pero esto no siempre sucede.

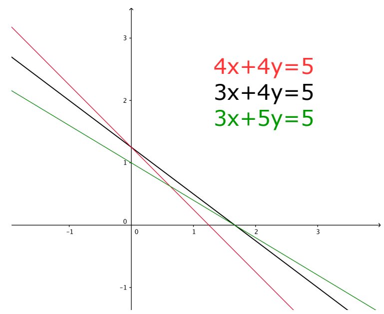
Ejemplos.

- Considerar la ecuación de la linea recta $3x+4y=5$

Si cambiamos el termino constante la recta se mueve sin cambiar de pendiente.

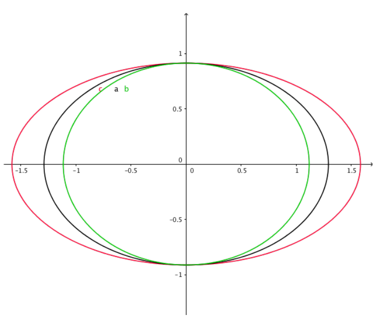
Si aumentamos el coeficiente de x la pendiente aumenta, pero si aumentamos el coeficiente de y la pendiente disminuye.





- Considerar ahora la ecuación de la elipse $3x^2+6y^2=5$.

Si aumentamos el termino constante su tamaño aumenta y si lo disminuimos su tamaño disminuye sin cambiar de forma.



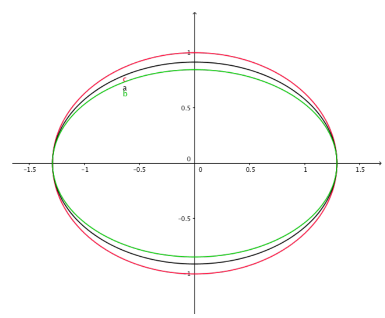
$2x^2+6y^2=5$

$3x^2+6y^2=5$

$4x^2+6y^2=5$

Si aumentamos el coeficiente de x^2 la elipse *se acorta*, y si lo achicamos *se alarga*.

Y si aumentamos el coeficiente de y^2 la elipse *se angosta*, y si lo achicamos *se ensancha*.



$2x^2+5y^2=5$

$3x^2+6y^2=5$

$4x^2+7y^2=5$

- La ecuación $x^3+1=x^2+x$, tiene 2 soluciones: $x=1$, $x=-1$.

  si la modificamos a $x^3+1.01=x^2+x$ tiene solo una solución.

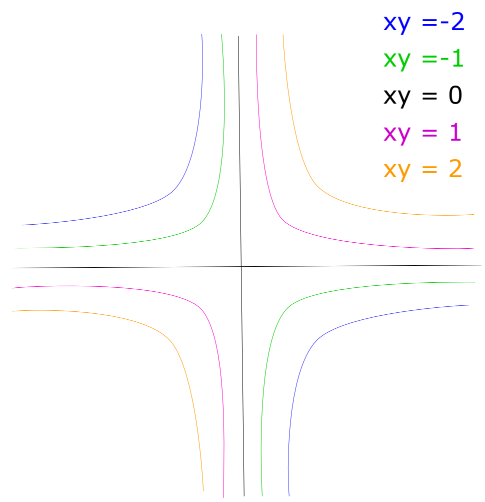
  Y si la modificamos a $x^3+0.99=x^2+x$ entonces tiene 3 soluciones!

Si cambiamos únicamente el termino constante de una ecuación P=c, las nuevas soluciones no pueden tocar a las anteriores (ya que las condiciones P=c y P=c' son contradictorias si c≠c').

Sin importar quien sea P las ecuaciones P=c dan una partición de dominio de P en *curvas de nivel* que pueden tener formas muy distintas.

Ejemplos.

- Considerar las ecuaciones xy=c



Las soluciones de xy=0 son las rectas x=0 y y=0.

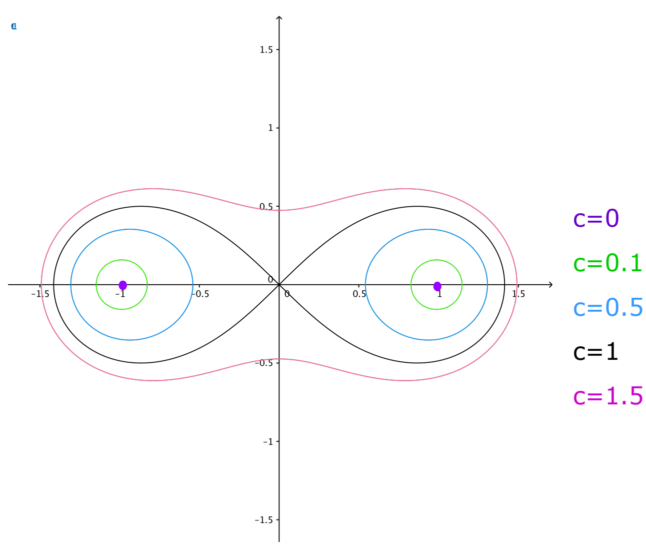
Para c≠0, las soluciones de xy=c forman hipérbolas, que están en el primer y tercer cuadrantes si c>0 y están en el segundo y cuarto cuadrantes si c<0.

Observar que cada punto del plano que no está en los ejes está exactamente en una de estas hipérbolas.

- ¿Que forma tendrá el conjunto de los puntos del plano tales que el producto de sus distancias a dos puntos fijos son una constante?

Si los puntos sin (-1,0) y (1,0) y la constante es c, la ecuación es $[(x-1)^2+y^2][(x+1)^2+y^2]=c^2$

Si c=0 las soluciones son los puntos (1,0) y (-1,0)



Para valores chicos de c, las soluciones de la ecuación deben estar cerca de esos dos puntos

Al aumentar c las soluciones se alejan mas y mas, cubriendo eventualmente a todos los puntos del plano.

(gratificado con geogebra)

Problemas.

1. ¿ Cuantos números reales hay que sumados con su inverso den el cuadrado del número?

2. a. ¿Existirán 2 números reales, distintos de 0, tales que su suma sea 1 y la suma de sus cuadrados sea 1?

   b. ¿Existirán 3 números reales, todos distintos de 0, tales que su suma sea 1 y la suma de sus cuadrados sea 1?

   (hint: interpreta geométricamente los 2 problemas)

3. a. Encuentra una ecuación en las variables x,y cuyas soluciones sean 2 puntos del plano.

   b. Encuentra una ecuación cuyas soluciones formen una recta y un circulo.

.

4. a. Dibuja *sin ayuda electrónica* las soluciones de la ecuación $x^3+xy^2-x = 0$. (hint: factorizar)

   b. ¿Como se ven *aproximadamente* las soluciones de $x^3+xy^2-x = 0.1$? (sin ayuda electrónica y sin factorizar, usando el inciso a.)

5. Dibuja (usando *geogebra* o algún otro graficador de funciones implícitas) las soluciones de las siguientes ecuaciones:

   a. $y^2=x^3+x^2$ b. $y^2=x^3+x^2+0.1$ c. $y^2=x^3+x^2-0.1$?

6. Si P y Q son dos puntos del plano, ¿que forma tiene el conjunto de todos los puntos del plano que están al triple de distancia de P que de Q?

7. ¿Si se eleva al cuadrado una ecuación se obtiene otra ecuación con las mismas soluciones?