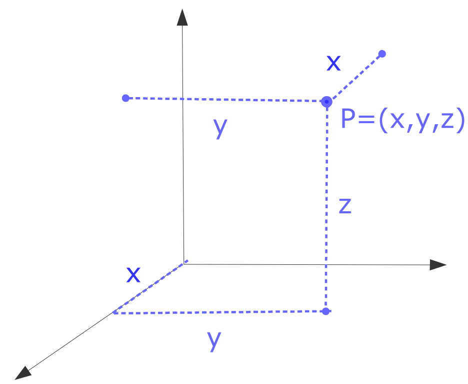
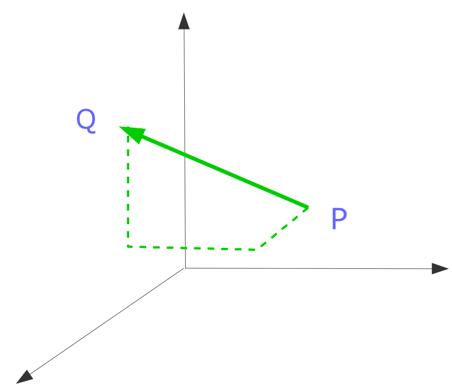
Puntos y vectores en el espacio

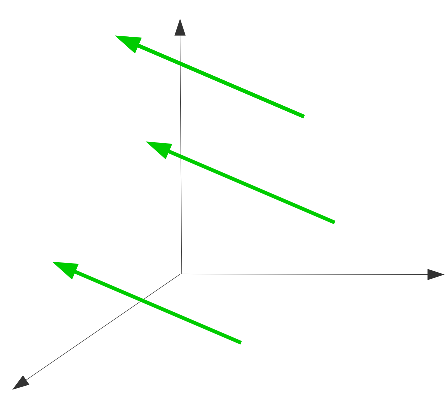
En el espacio euclidiano podemos darles coordenadas a los puntos eligiendo 3 planos perpendiculares y midiendo las distancias de los puntos a esos planos, de modo que hacia un lado de cada plano las distancias sean positivas y hacia el otro sean negativas.
Así, cada punto P del espacio queda representado por una tercia de números reales (x,y,z) que dicen cuanto hay que desplazarse en las direcciones de los ejes (las rectas de intersección de los planos) para ir del origen al punto.



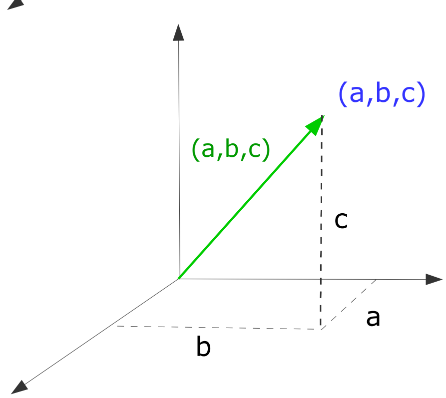
Si P y Q son 2 puntos del espacio, el **vector** PQ es la flecha o segmento dirigido que va de P a Q.
El vector PQ también puede representarse por una tercia de números reales (a,b,c), que miden los desplazamientos necesarios para ir de P a Q en las direcciones de los ejes. Si P=(x,y,z) y Q=(x',y',z') entonces PQ = (x'-x,y'-y,z'-z)



Dos vectores que tienen la misma dirección y el mismo tamaño (lo que ocurre si sus coordenadas son iguales) son considerados iguales, sin importar donde empiecen: los vectores son libres para moverse.



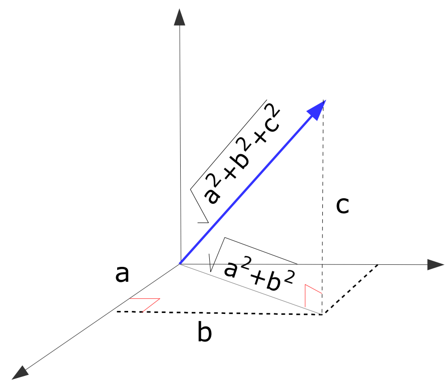
Podemos identificar a cada punto (a,b,c) con el vector con esas mismas coordenadas, que va del origen (0,0,0) al punto (a,b,c).



Los vectores son muy útiles por diversas razones, una de ellas es que podemos sumarlos geométricamente (haciendo un desplazamiento y después el otro) mientras que sumar puntos no tiene sentido. Los vectores pueden representar muchas cosas como posiciones relativas, velocidades, aceleraciones o fuerzas, y la suma vectorial corresponde exactamente a como se suman estas cosas en la física.

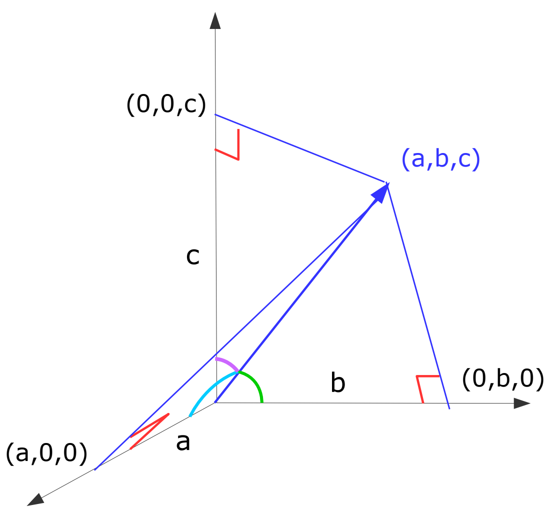
Toda la información geométrica de los vectores está en sus coordenadas:

Por el Teorema de Pitagoras, el tamaño del vector V = (a,b,c), llamado también la **norma** de V, es $|V| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$



A los vectores de norma 1 se les llama **unitarios**.

La dirección de un vector también puede obtenerse de sus coordenadas:



Observar que (aunque no lo parezca) los ángulos rojos son rectos. Por lo tanto los cosenos de los ángulos que el vector (a,b,c) forma con los ejes son

$\cos \alpha = a / |U|$ $\cos \beta = b / |U|$ $\cos \gamma = c / |U|$

Si U es un vector unitario sus coordenadas son los cosenos de los ángulos que forma U con los ejes.

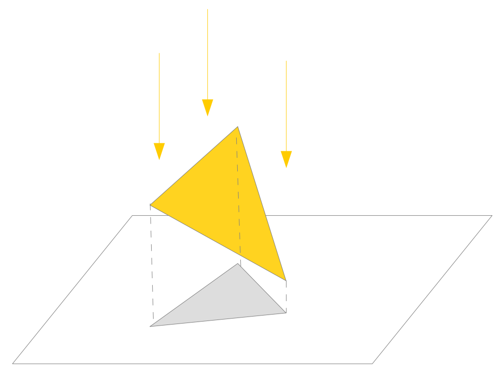
Ejemplos.

- Si P=(1,5,3) a Q=(6,2,4), el vector PQ es Q-P=(5,-3,1).
  La distancia de P a Q es $|Q-P| = \sqrt{5^2+(-3)^2+1^2} = \sqrt{35}$
- El vector V=(1,2,-2) tiene norma $|V| = \sqrt{1^2+2^2+(-2)^2} = 3$
  Un vector unitario en la dirección de V es V/|V| = 1/3 (1,2,-2) = (1/3,2/3,-2/3)
- Los cosenos de los ángulos que el vector (1,2,-2) forma con los ejes son 1/3, 2/3 y -2/3,
  así que los ángulos son $\alpha=\cos^{-1}(1/3)\approx 70.53°$ $\beta=\cos^{-1}(2/3)\approx 48.19°$ $\gamma=\cos^{-1}(-2/3)\approx 131.81°$

Problemas

1. Dibuja el triángulo con vértices (3,2,1) (2,0,3) y (-2,1,2). Calcula la longitud de sus lados y muestra que es un triángulo rectángulo.

2- Considera un triángulo Δ en el espacio y la sombra Δ' que proyecta en el piso al iluminarse verticalmente.
a. Muestra que los lados de Δ' no pueden ser mas grandes que los lados de Δ.
b. ¿Hay alguna relación entre los ángulos de Δ' y los de Δ?
c.* ¿Será posible acomodar a Δ para que su sombra tenga la forma de cualquier otro triángulo?

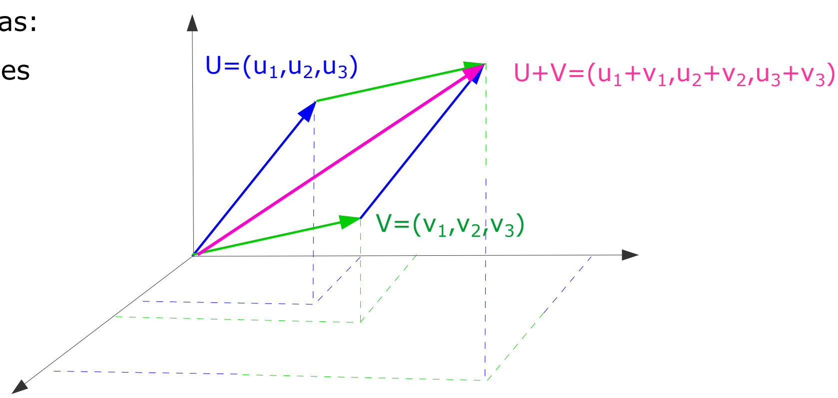


Sumas, múltiplos y combinaciones lineales de vectores.

La suma geométrica de vectores se obtiene algebraicamente sumando sus coordenadas: si $U=(u_1,u_2,u_3)$ y $V=(v_1,v_2,v_3)$ entonces

$U+V = (u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ u_3+bv_3)$

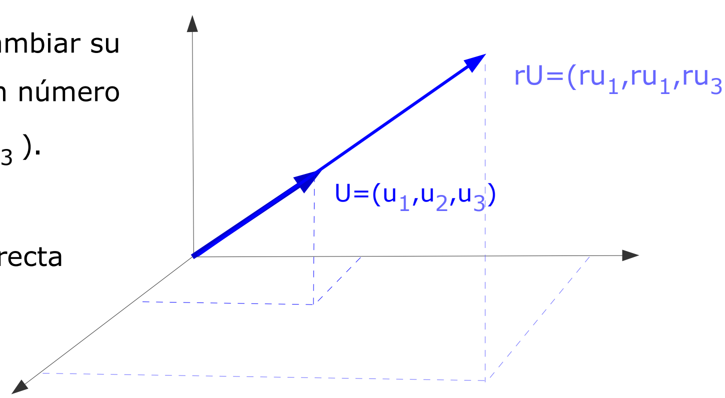
Se sigue inmediatamente que la suma de vectores es conmutativa U+V=V+U y asociativa (U+V)+W=U+(V+W).



Si los vectores U y V están basados en un mismo punto, su suma U+V está en el plano que los contiene.

Los vectores pueden cambiarse de tamaño sin cambiar su dirección multiplicando sus coordenada por un un número real r: Si $U=(u_1,u_2,u_3)$ entonces $rU = (ru_1,ru_2,ru_3)$.

Si $U\neq 0$, sus múltiplos forman una linea recta, la recta generada por U.



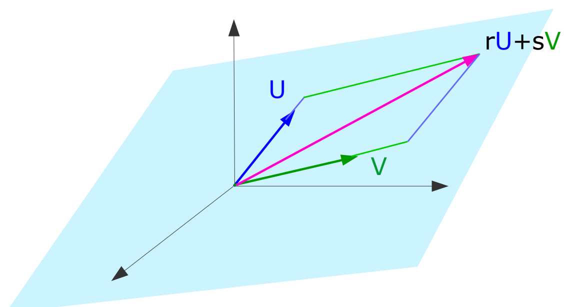
Los vectores pueden combinarse multiplicándolos por números reales y sumándolos, el resultado es una **combinación lineal** de esos vectores.

Ejemplos.

- Una combinación lineal de los vectores (1,2,3) y (2,0,1) es el vector 3(1,2,3)-2(2,1,-1)=(-1,4,11)
- ¿El vector (4,4,7) es combinación lineal de los vectores (1,2,3) y (2,0,1)?
  Para ver si lo es, hay que ver si existen reales r y s tales que r(1,2,3)+s(2,0,1)=(4,4,7)
  es decir r+2s=4, 2r=4 y 3r+s=7. Por la segunda ecuación r=2 y entonces por la primera s=1, y estos valores de r y s satisfacen la tercera y podemos comprobar que 2(1,2,3)+1(2,0,1)=(4,4,7).
- ¿El vector (2,3,5) es combinación lineal de los vectores (1,2,3) y (2,0,1)?
  Hay que ver si existen reales r y s tales que r(1,2,3)+s(2,0,1)=(2,3,5) es decir
  r+2s=2, 2r=3 y 3r+s=5. La segunda ecuación da r=3/2, entonces la primera da s=1/4 pero la tercera da s=1/2, así que no existen tales r,s y (2,3,5) NO es combinación lineal de (1,2,3) y (2,0,1).

Lema. Si U y V son dos vectores no colineales en el espacio, entonces las combinaciones lineales de U y V forman un plano (llamado el plano **generado** por U y V).

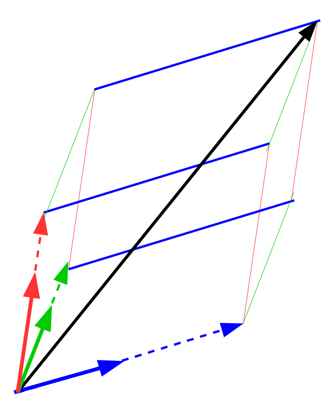
Demostración. Los múltiplos de un vector en un plano están en el plano, y la suma de dos vectores en un plano están en el plano, así que todas las combinaciones lineales de 2 vectores U y V están en el plano que los contiene.



Recíprocamente, si W es cualquier vector del plano que contiene a U y V, entonces hay un paralelogramo con lados paralelos a U y V que pasa por laos extremos de W, así que W es suma de múltiplos de U y V. •

Lema. Si U, V y W son 3 vectores que no están en el mismo plano, entonces cada vector en el espacio es una combinación lineal de U, V y W.

Demostración. La suma de 3 vectores basados en el mismo punto está dada por la diagonal del paralelepípedo determinado por los 3 vectores.



Dado cualquier vector Z basado en el mismo punto que U, V y W, podemos dibujar planos paralelos a los generados por U y V, U y W y V y W que pasen por la cola y la punta de Z. Estos 6 planos determinan un paralelepípedo del que Z es una diagonal, sus aristas dan los múltiplos de U, V y W cuya suma es Z. •

Ejemplo.

- ¿Los vectores (1,1,0), (1,0,1) y (0,1,1) son coplanares (están en el mismo plano)?

  Como los vectores tienen distintas direcciones (ninguno es múltiplo de otro) entonces dos de ellos generan un plano. Para ver si el tercer vector está en el plano generado por los 2 primeros, hay que ver si es combinación lineal de ellos, checando si la ecuación $(0,1,1)=a(1,1,0)+b(1,0,1)$ tiene soluciones. La ecuación es equivalente al sistema $a+b=0$, $a=1$, $b=1$. Como las últimas ecuaciones contradicen a la primera, no hay soluciones y los vectores no están en el mismo plano.

- Escribe al vector (1,2,3) como combinación lineal de los vectores (1,1,0), (1,0,1) y (0,1,1).

  Para hallar la combinación lineal debemos resolver la ecuación $(1,2,3)=a(1,1,0)+b(1,0,1)+c(0,1,1)$ que equivale al sistema de ecuaciones

  $a+b=1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $a=0$

  $a+c=2$ $\qquad$ $b-c=-1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $c=2$

  $b+c=3$ $\qquad\qquad\qquad$ $2b=2$ $\quad$ $b=1$

  Podemos checar que $0(1,1,0)+1(1,0,1)+2(0,1,1)=(1,2,3)$

  (el que $a=0$ dice que de hecho (1,2,3) está en el plano generado por (1,0,1) y (0,1,1).

Problemas.

3. ¿Cuales de estos vectores están en el plano generado por los vectores (1,2,3) y (3,2,1)?

   a. (3,4,5) $\qquad$ b. (-4,-5,-6) $\qquad$ c. (4,3,5)

4. ¿De cuantas maneras distintas se puede descomponer al vector (0,0,6) como suma de vectores en las direcciones de (5,6,1), (-4,5,0) y (4,7,1)? Encuéntralas todas.

5. Muestra *analíticamente* que cada vector (x,y,z) de $\mathbf{R}^3$ es una combinación lineal de los vectores (1,2,3), (2,-1,1) y (3,0,2).

El Producto punto

Podemos definir un producto interior de vectores en el espacio de manera similar a como se hizo en el plano. Si $U = (u_1,u_2,u_3)$ y $V = (v_1,v_2,v_3)$ el **producto punto** (o **producto interno** o **producto escalar**) de U y V es el número

$$U \cdot V = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

Ejemplo. El producto punto de los vectores U=(1,2,3) y V=(4,5,-6) es

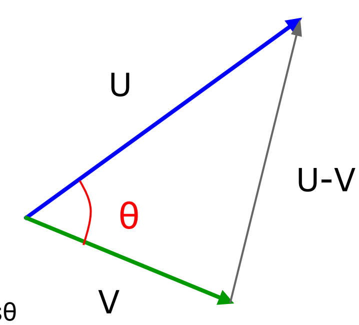
$$U \cdot V = 1\cdot4+2\cdot5-3\cdot6 = 4+10-18 = -4$$

Observar que por su definición, el producto punto tiene las siguientes propiedades:

- $U \cdot V = V \cdot U$ *es conmutativo*
- $U \cdot (V+W) = U \cdot V + U \cdot W$ *se distribuye con la suma*
- $U \cdot \lambda V = \lambda\, U \cdot V$ *saca escalares*

Lema. El producto interno en R^3 tiene el mismo significado geométrico que en R^2:

$U \cdot V = |U||V| \cos\theta$ donde θ es el ángulo que forman U y V



Demostración. Si $U = (u_1,u_2,u_3)$ y $V = (v_1,v_2,v_3)$

entonces en el plano generado por U y V la ley de los cosenos dice

$|U-V|^2 = |U|^2 + |V|^2 - 2|U||V| \cos\theta$

en coordenadas esto es

$(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+(u_3-v_3)^2 = u_1^2 +u_2^2 +u_3^2 +v_1^2 +v_2^2 +v_3^2 -2|U||V| \cos\theta$

desarrollando y simplificando queda

$$- 2u_1v_1-2u_2v_2-2u_3v_3 = -2|U||V| \cos\theta$$

y dividiendo entre -2 queda

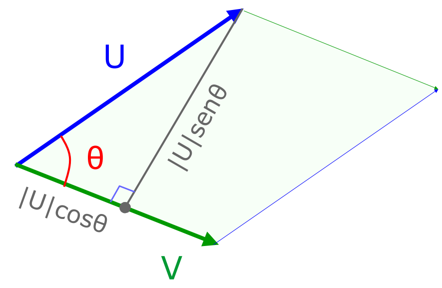
$$u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3 = |U|\ |V| \cos\theta$$

Ejemplo. El ángulo entre los vectores U=(1,2,3) y V=(4,5,-6) esta dado por

$\cos\theta = U\cdot V / |U|\ |V| = (1\cdot4+2\cdot5-3\cdot6) / (1^2+2^2+3^2)^{1/2}(4^2+5^2+6^2)^{1/2} = -3/\sqrt{14}\sqrt{77} = -3/7\sqrt{22}$

El área del paralelogramo generado por dos vectores U y V es
Area = base x altura = |U||V| senθ.

Podemos calcular el área usando el producto interno ya que
$|U|^2|V|^2 \text{ sen}^2\theta + |U|^2|V|^2 \cos^2\theta = |U^2|V|^2$
Así que $(\text{Area})^2 = |U|^2|V|^2 - (U{\cdot}V)^2$



Ejemplo. El área del paralelogramo generado por los vectores U=(1,2,3) y V=(4,5,-6) es

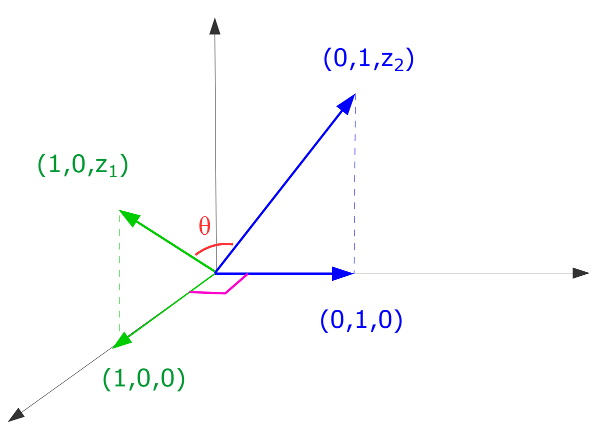
$$\text{Area} = \sqrt{|U|^2|V|^2 - (U{\cdot}V)^2} = \sqrt{(1^2+2^2+3^2)\,(4^2+5^2+6^2) - (1{\cdot}4+2{\cdot}5-3{\cdot}6)^2} = \sqrt{14{\cdot}77 - (-4)^2} = \sqrt{1062}$$

Problemas

6. Si U=(2,-2,1) y V=(3,1,2), encuentra:
   a. La norma de U y V y el ángulo entre ellos.
   b. Los ángulos que forma U con los ejes **x** y **y** y con el plano **xy**.

7. Sea Δ el triángulo con vértices en (1,2,3), (2,1,0) y (3,1,1)
   a. ¿Cuanto miden los lados de Δ?
   b. ¿Cuanto miden los ángulos de Δ?
   c. ¿Cual es el área de Δ?

8. Los vectores $(1,0,z_1)$ y $(0,1,z_2)$ se proyectan a dos vectores perpendiculares en el plano xy. Muestra que, dependiendo de como sean z_1 y z_2, los vectores $(1,0,z_1)$ y $(0,1,z_2)$ pueden formar cualquier ángulo θ mayor que 0° y menor que 180°.



Vectores ortogonales

En el espacio tridimensional es fácil hallar vectores ortogonales a un vector dado, porque hay una infinidad de direcciones ortogonales a una dirección dada y hay una infinidad de vectores en cada dirección. Observar que los vectores ortogonales a un vector dado forman un plano.

Ejemplo. Hallar varios los vectores ortogonales a (1,2,3).

Los vectores ortogonales a (1,2,3) son los vectores (x,y,z) que satisfacen

$(1,2,3) \cdot (x,y,z) = 0$ o sea los que satisfacen la ecuación $\mathbf{x + 2y + 3z = 0}$

y esta ecuación lineal tiene muchas soluciones fáciles de adivinar, de hecho podemos fijar los valores de dos de las variables y obtener un valor para la tercera, por ejemplo (0,3,-2), (2,-1,0), (1,1,-1)

Todas los otros vectores ortogonales a (1,2,3) están en el plano generado por cualesquiera dos de esos vectores, es decir, son combinaciones lineales de dos soluciones, por ejemplo

$(0,3,-2) + (1,1,-1) = (1,4,-3)$

$(2,-1,0) - (1,1,-1) = (1,-2,1)$

Lema. Los vectores del espacio que son ortogonales a un vector U≠0 forman un plano.

Demostración. Esto es intuitivamente claro, pero vamos a tratar de demostrarlo con mas rigor.

Cada plano que contiene a U hay una recta formada por vectores ortogonales a U.

Como hay una infinidad de planos que contienen a U, hay una infinidad de direcciones ortogonales a U.

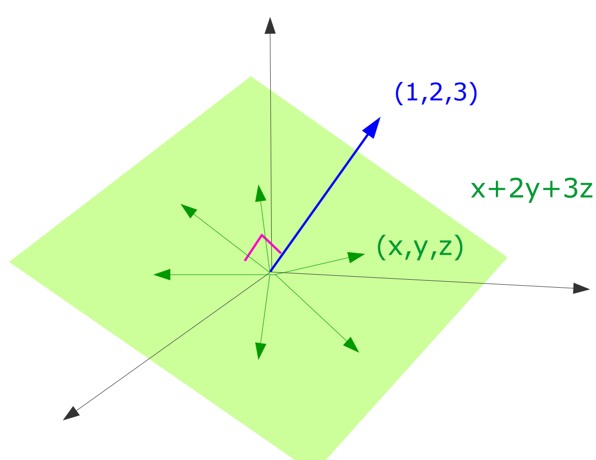
Si 2 vectores V y W son ortogonales a U entonces sus combinaciones lineales son ortogonales a U ya que $U\cdot(aV+bW)=aU\cdot V+bU\cdot W = a\,0 + b\,0 = 0$. Estas combinaciones lineales de V y W forman un plano.

Falta ver que todos los vectores ortogonales a U están en el mismo plano.

Si existieran 3 vectores V, W y Z ortogonales a U que que no están en el mismo plano, estos generarían a R^3, y todos los vectores de R^3 serían ortogonales a U. •

Ejemplo.

Los puntos (x,y,z) del espacio que satisfacen la ecuación x+2y+3z=0 forman un plano, que contiene a los vectores (x,y,z) basados en el origen que son ortogonales al vector (1,2,3).



Hallar un vector ortogonal a dos vectores dados es siempre posible, pero no es tan fácil porque solo hay una dirección ortogonal a dos direcciones distintas.

Ejemplo. Hallar todos los vectores que son ortogonales a (1,2,3) y a (4,5,6)

Los vectores ortogonales a (1,2,3) y (4,5,6) son los vectores (x,y,z) que satisfacen

$(1,2,3) \cdot (x,y,z) = 0$ y $(4,5,6) \cdot (x,y,z) = 0$

o sea os que satisfacen el sistema de ecuaciones

$\mathbf{x + 2y + 3z = 0}$ y $\mathbf{4x + 5y + 6z = 0}$

Adivinar la solución en este caso no es fácil: hay que resolver el sistema.

Restando a la segunda ecuación el doble de la primera ecuación podemos eliminar a **z** y queda $\mathbf{2x + y = 0}$

Restando al cuádruple de la primera ecuación la segunda podemos eliminar a **x** y queda $\mathbf{3y + 6z = 0}$

O sea que $\mathbf{y = -2x}$ y $\mathbf{y=-2z}$ y los valores de **x** y **z** están determinados por los valores de **y**: si hacemos por ejemplo $\mathbf{y = 2}$ entonces queda $\mathbf{x =-1}$ y $\mathbf{z = -1}$ así que un vector ortogonal a (1,2,3) y a (4,5,6) es (-1,2,-1) y todos los otros vectores ortogonales son múltiplos de (-1,2,-1).

Problemas

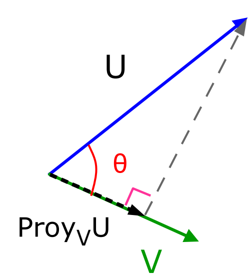
9. ¿Cuantos vectores ortogonal a (1,2,3) de la forma (1,2,c) existen? ¿Cuantos vectores ortogonales a (1,2,3) de la forma (a,b,3) existen?

10. a. Encuentra un vector ortogonal a (1,5,2) y a (3,-1,4), usando solamente el producto punto.
    b. Encuentra dos vectores ortogonales a (1,1,1) que sean ortogonales entre si, usando el producto punto.

11. ¿Que figura forman los vectores en el espacio (basados en el origen) que forman un ángulo constante con un vector V? ¿Y los vectores cuyo producto punto con un vector fijo es constante?

Proyecciones

La proyección de un vector U en la dirección del vector V es la “sombra” de U de U al iluminarse perpendicularmente hacia V se le denota por $Proy_V U$.



$Proy_V U$ es un múltiplo de V de tamaño $|U|\cos\theta = U\cdot V/|V|$,

Como el vector unitario en la dirección de V es V/|V| entonces

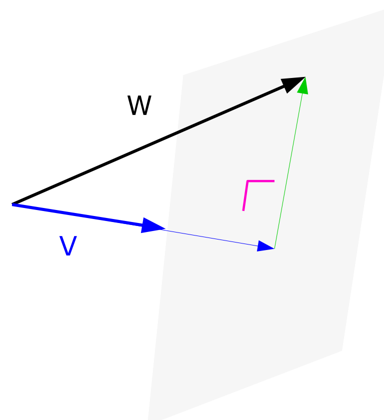
$Proy_V U = (U\cdot V/|V|^2)\, V = (U\cdot V/V\cdot V)\, V$

Ejemplo. La proyección de (3,5,7) en la dirección del vector V=(1,2,2) es

$Proy_V U$ = (3,5,7)·(1,2,2) /(1,2,2)·(1,2,2) (1,2,2) = (3·1+5·2+7·2)/(1·1+2·2+2·2) (1,2,2) = 27/9 (1,2,2)

Lema. Si V es un vector no 0, entonces cada vector W en el espacio puede descomponerse de manera única como suma de un vector paralelo a V y un vector perpendicular a V.

Demostración. Basemos a V y W en el origen. Si P es el plano perpendicular a V que pasa por la punta de W entonces hay un múltiplo V' de V cuya punta esta en el plano. Entonces W= V' + (W-V') donde W-V' es un vector del plano ortogonal a V.



Esto puede verse analíticamente: V' = $Proy_V W$ = (U·V/V·V)V y W- $Proy_V W$ es perpendicular a V ya que

V · (W − $Proy_V W$) =
= V · (W - (W·V/V·V) V) =
= V·W - V·(W·V/V·V) V) =
= V·W − (W·V/V·V) V·V =
= V·W - W·V = 0 •

Ejemplo. El vector (3,2,-4) se puede descomponer como suma de un vector paralelo y uno perpendicular a (1,-2,-1).

$Proy_{(1,-2,-1)}$(3,2,-4) = [(3,2,-4)·(1,-2,-1)/(1,-2,-1)·(1,-2,-1)] (1,-2,-1) = 3/6 (1,-2,-1) = (1/2,-1,-1/2)

(3,2,-4) = (1/2,-1,-1/2) + (3,2,-4)-(1/2,-1,-1/2) = (1/2,-1,-1/2) + (5/2,3,-1/2)

paralelo a (1,-2—1) *perpendicular a* (1,-2,-1)

ya que es un múltiplo *ya que* (5/2,3,-1/2)·(1,-2,-1)=0

Problemas

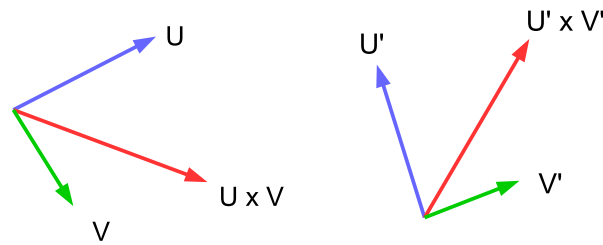
12. Si U=(2,-2,1) y V=(3,1,2) encuentra:
   a. La proyección de U en la dirección de (1,0,0) y la proyección de (1,0,0) en la dirección de V.
   b. La proyección de U en la dirección de V y la proyección de V en la dirección de U.

13. a. Escribe al vector (0,3,7) como suma de un vector paralelo y otro perpendicular a (1,2,3).
    b. Ahora intercambia los papeles de los dos vectores.

14. Dado un plano y cualquier vector en el espacio, demuestra que es posible descomponer al vector como la suma de un vector en el plano y un vector perpendicular al plano.

Un producto de vectores.

¿Será posible definir un producto de vectores en R^3 que de un vector y que sea independiente de las coordenadas? ¿Y -siendo optimistas- será posible definirlo de modo que además saque sumas y escalares?



$$U \times (V+W) = U \times V + U \times W$$

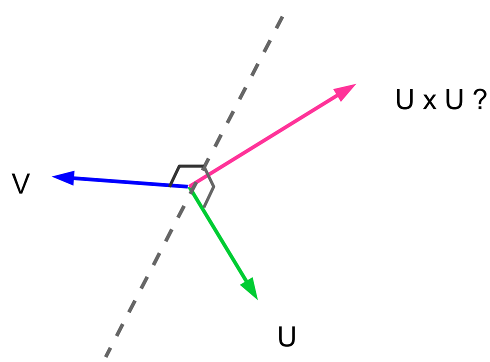
$$U \times aV = a\, U \times V$$

¿Quien podrá ser U x U (el producto de un vector por si mismo)?

Al girar alrededor de la recta generada por U el vector U no cambia, así que el producto UxU no debería cambiar. Los únicos vectores que no cambian al girar en esa recta son los múltiplos de U, así que UxU = aU. Si ahora giramos U para convertirlo en -U el producto debe girar igual, así que -U x -U = -aU. Pero si el producto saca escalares entonces -U x -U = (-1)(-1) U x U = U x U así que -aU = aU por lo tanto a =0, por lo tanto **U x U debe ser 0**.

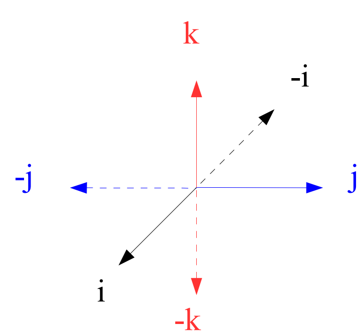
¿Y que podemos decir del producto de dos vectores U y V del mismo tamaño y no paralelos?

Al girar 180° alrededor de la recta perpendicular a U y a V, el vector U se convierte en -U y el vector V es convierte en -V, así que el producto U x V debería convertirse en -U x -V. Pero -U x -V = U x V así que U x V no cambia. Como los únicos vectores que no cambian al girarse alrededor de una recta son los vectores de la recta, U x V debe estar en esa recta, así que **U x V debe ser perpendicular a U y a V**.

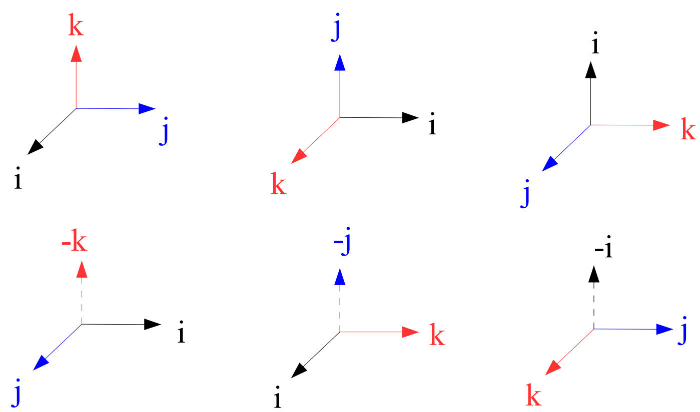


Veamos ahora como podemos definir el producto vectorial en términos de los vectores básicos, denotados como:

i = (1,0,0) **j** = (0,1,0) **k** = (0,0,1).



Si observamos a los vectores i, j y k desde distintos lados observamos que k esta situado respecto a i y j de la misma manera que j esta situado respecto a k y i, y de la misma manera que i esta situado respecto a j y k. Pero k esta situado respecto a j y i como -k esta situado respecto a i y j.



Ya vimos que **i** x **i** = 0 y que **i** x **j** = a**k**. Digamos que a=1.

Si el producto es independiente de las coordenadas entonces:

i x **i** = **0**	**j** x **j** = **0**	**k** x **k** = **0**
i x **j** = **k**	**j** x **k** = **i**	**k** x **i** = **j**
j x **i** = **-k**	**k** x **j** = **-i**	**i** x **k** = **-j**

Si queremos que el producto de vectores saque sumas de vectores y producto por escalares, entonces el producto de $U = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $V = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ debe ser

$$
\begin{aligned}
U \times V &= (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}) \times (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) = \\
&\quad u_1v_1\, \mathbf{i}\times\mathbf{i} + u_1v_2\, \mathbf{i}\times\mathbf{j} + u_1v_3\, \mathbf{i}\times\mathbf{k} + \\
&\quad + u_2v_1\, \mathbf{j}\times\mathbf{i} + u_2v_2\, \mathbf{j}\times\mathbf{j} + u_2v_3\, \mathbf{j}\times\mathbf{k} + \\
&\quad + u_3v_1\, \mathbf{k}\times\mathbf{i} + u_3v_2\, \mathbf{k}\times\mathbf{j} + u_3v_3\, \mathbf{k}\times\mathbf{k} = \\
&= u_1v_2\, \mathbf{k} - u_1v_3\, \mathbf{j} - u_2v_1\, \mathbf{k} - u_2v_3\, \mathbf{i} + u_3v_1\, \mathbf{j} - u_3v_2\, \mathbf{i}
\end{aligned}
$$

Y esta es básicamente la única definición posible de un producto que es independiente de las coordenadas y saca sumas y escalares.

Definimos el **producto vectorial** (o **producto cruz**) de dos vectores usando la fórmula anterior:

$$(u_1,u_2,u_3) \times (v_1,v_2,v_3) = (u_2v_3 - u_3v_2\, ,\, u_3v_1 - u_1v_3\, ,\, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Notar que en cada coordenada aparecen los productos cruzados de las otras dos coordenadas, con distintos signos.

La manera mas fácil de acordarse de esta fórmula es como un determinante:

$$U \times V = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

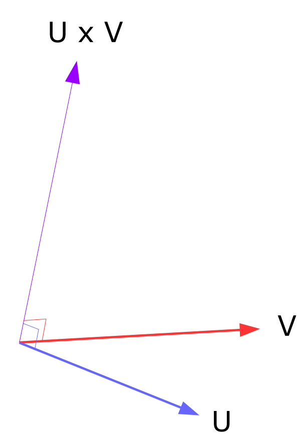
Ejemplo. Si U = (1,2,3) y V = (4,5,6) entonces

$U \times V = (2{\cdot}6 - 5{\cdot}3,\ 3{\cdot}4 - 6{\cdot}1,\ 1{\cdot}5 - 4{\cdot}2) = (-3,6,-3)$

Se sigue de la definición que el producto vectorial tiene las siguientes propiedades algebraicas :

- $U \times U = 0$
- $U \times V = -V \times U$
- $U \times (V+W) = U \times V + U \times W$
- $U \times \lambda V = \lambda U \times V$

Teorema. U x V es un vector perpendicular a U y V.



Demostración.

Si $(u_1,u_2,u_3) \times (v_1,v_2,v_3)$ entonces

$U \times V = = (u_2v_3 - u_3v_2\ ,\ u_3v_1 - u_1v_3\ ,\ u_1v_2 - u_2v_1)$

Para ver que U x V es perpendicular a U usamos el producto punto:

$U \cdot (U \times V) = (u_1,u_2,u_3) \cdot (u_2v_3 - u_3v_2\ ,\ u_3v_1 - u_1v_3\ ,\ u_1v_2 - u_2v_1) =$

$= u_1\, u_2v_3 - u_1\, u_3v_2 + u_2u_3v_1 - u_2u_1v_3 + u_3u_1v_2 - u_3u_2v_1 = 0$

Así que U x V es perpendicular a U. De igual manera se prueba que U x V es perpendicular a V. •

Ejemplo. Encontrar dos vectores perpendiculares a (1,2,3) que sean perpendiculares entre si.

Hallar el primero es fácil, ya que hay muchas direcciones posibles, basta con hallar un vector cuyo producto interior con (1,2,3) sea 0, como (1,1,-1). Encontrar el segundo es mas difícil porque solo hay una dirección posible. Podemos hallarla tomando el producto cruz de los dos:

(1,2,3) x (1,1,-1) = (-21-13,31+11,11-12) = (-5,4,-1).

Lema. U x V = (0,0,0) si y solo si U y V son paralelos.

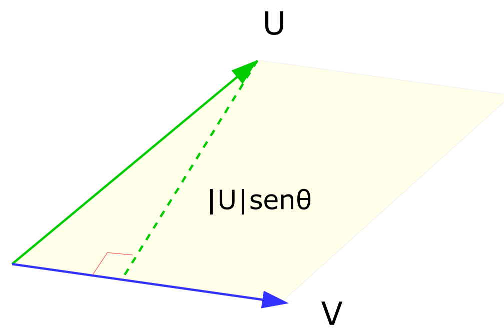
Demostración.

$U \times V = (u_2v_3 - u_3v_2\ ,\ u_3v_1 - u_1v_3\ ,\ u_1v_2 - u_2v_1)$ es el vector (0,0,0) si y solo si:

$$\left.\begin{array}{lll} u_2v_3 - u_3v_2 = 0 & \Leftrightarrow & u_2/v_2 = u_3/v_3 \\ u_3v_1 - u_1v_3 = 0 & \Leftrightarrow & u_3/v_3 = u_1/v_1 \\ u_1v_2 - u_2v_1 = 0 & \Leftrightarrow & u_1/v_1 = u_2/v_2 \end{array}\right\} \text{ estos 3 cocientes son iguales}$$

$u_1/v_1 = u_2/v_2 = u_3/v_3 = k \Leftrightarrow (u_1,u_2,u_3) = k\,(v_1,v_2,v_3) \Leftrightarrow (u_1,u_2,u_3)$ es paralelo a (v_1,v_2,v_3) •

Lema. $|U \times V| = |U||V| \operatorname{sen}\theta$ (que es el área del paralelogramo determinado por U y V)



Demostración.

El área del paralelogramo es $|U||V| \operatorname{sen}\theta$

y ya sabemos que $U\cdot V = |U||V| \cos\theta$.

Como $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, entonces

$|U|^2|V|^2 \cos^2\theta + |U|^2|V|^2 \operatorname{sen}^2\theta = |U|^2|V|^2$

y para ver que $|U\times V| = |U||V| \operatorname{sen}\theta$

basta mostrar que $(U\cdot V)^2 + |U\times V|^2 = |U|^2|V|^2$

Para esto hay que calcular las tres magnitudes usando coordenadas (tarea). •

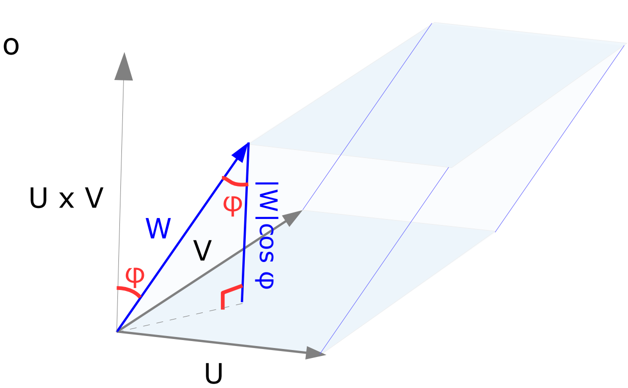
Ejemplo. Si U = (1,2,3) y V = (4,5,6)

$U \cdot V = 1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6 = 32$ y $U \times V = (2\cdot6-5\cdot3,\ 4\cdot3-6\cdot1,\ 1\cdot5-4\cdot2) = (-3,6,-3)$

$|U|^2|V|^2 = 14\cdot77$ $(U \cdot V)^2 = 32^2$,

$|U \times V|^2 = 3^2+6^2+3^2 = 54$ y $32^2 + 54 = 1078 = 14\cdot77$

Lema. $|(U \times V) \cdot W|$ es el volumen del paralelepípedo determinado por U, V y W.



Demostración.

$|(U \times V) \cdot W| =$

$= |U \times V||W| \cos\varphi$ donde φ es el ángulo entre U x V y W

$= |U||V|\operatorname{sen}\theta\ |W|\cos\varphi$ donde θ es el ángulo entre U y V

= área base · altura •

Ejemplos.

- El área del paralelogramo determinado por (1,2,3) y (4,5,6) es
  $|(1,2,3) \times (4,5,6)|=|(3,6,-3)|= \sqrt{54}$
- El volumen del paralelepípedo determinado por (1,2,3), (4,5,6) y (7,8,-9) es
  $(1,2,3) \times (4,5,6) \cdot (7,8,-9) = (-3,6,-3) \cdot (7,8,-9) = -3\cdot 7 + 6\cdot 8 + 3\cdot 9 = 54$

Problemas

15. Encuentra un vector perpendicular a (4,5,6) y (7,8,9)

16. Si U=(2,1,3), V=(1,4,2) y W=(1,-1,-2) calcula:

    a) U x V
    b) V x U
    c) (U x V) · W
    d) U · (V x W)
    e) (U x V) x W
    f) U x (V x W)

17. Encuentra 2 vectores perpendiculares a (2,-5,3) que sean perpendiculares entre si.

18. a. Demuestra *analíticamente* que U x V es vertical si y solo si U y V son horizontales.

    b. Demuestra *analíticamente* que U x V es horizontal si y solo si las sombras de U y V en el plano xy son paralelas.

19. Calcula el área del paralelogramo generado por los vectores (1,2,3) y (2,1,3) usando el producto cruz.

20. Calcula el volumen del paralelepípedo generado por los vectores (1,2,3), (2,1,3) y (3,1,2).

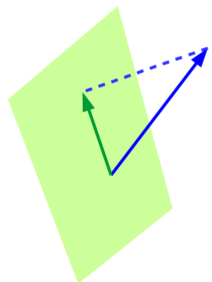
21. Demuestra que $|U\times V|^2 + |U\cdot V|^2 = |U|^2|V|^2$ y que por lo tanto $|U\times V|=|U||V||\mathrm{sen}\theta|$ donde θ es el ángulo que forman U y V.

22. Muestra geométricamente que U · (V x W) = (U x V) · W

23. ¿Es cierto que el producto cruz es asociativo, es decir que U x (V x W) = (U x V) x W para todos los vectores U, V, W?

Problemas de repaso.

24. Encuentra la proyección del vector (0,3,5) al plano generado por los vectores (1,0,2) y (3,1,4). Hint: ¿quien debe ser el vector menos la proyección?



25. ¿Cual es el área del triángulo con vértices en los puntos (1,5,3), (2,4,6) y (0,1,2)?

26. ¿Cual es el volumen del tetraedro con vértices en los puntos (1,5,3), (2,4,6), (0,1,2) y (7,9,8)?