Matrices y transformaciones lineales

Las transformaciones lineales tienen una representación muy conveniente usando matrices. Usualmente los vectores se escriben como *renglones* (x,y,z) pero si los escribimos como *columnas* entonces la transformación lineal T(x,y,z) = (ax+by+cz,dx+ey+fz,gx+hy+iz) puede escribirse como el producto de una matriz con el vector:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Los renglones de la matriz son los coeficientes con que aparecen x,y,z en las nuevas coordenadas.

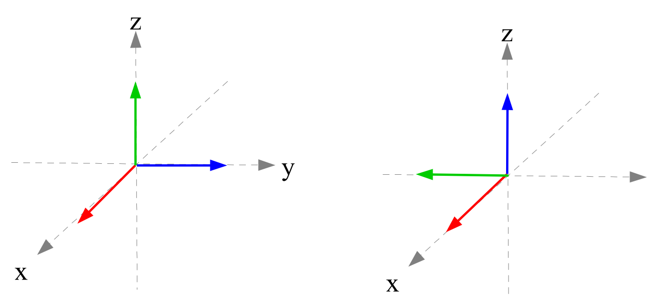
Las columnas de la matriz son las imágenes de los vectores básicos (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1).

Ejemplo. La transformación T(x,y,z) = (y, 3x+2z, x+y-z) se escribe

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

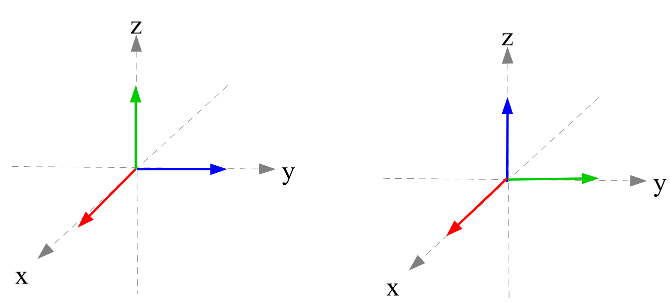
Ejemplo. La rotación de 90 alrededor del eje x deja fijo al vector (1,0,0), envía (0,1,0) a (0,0,1) y envía (0,0,1) a (0,-1,0) así que la rotación es

$$R\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



Ejemplo. La reflexión en el plano y=z deja fijo al vector (1,0,0), envía (0,1,0) a (0,0,1) y envía (0,0,1) a (0,1,0) así que la reflexión es

$$\text{Я}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



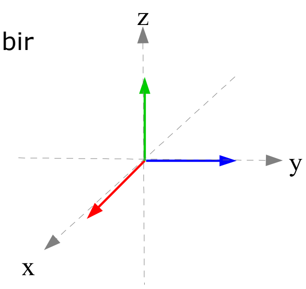
Ejercicio. ¿Como es La rotación de 45° alrededor del eje y?

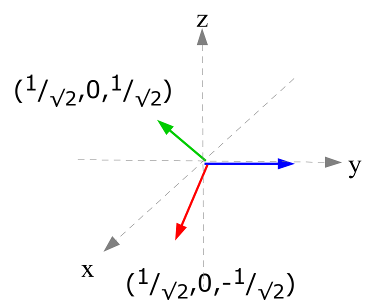
La rotación fija al eje y envía los ejes x y z a las diagonales del plano xz:

$(0,1,0) \rightarrow (0,1,0)$ $\qquad$ $(1,0,0) \rightarrow ({}^{1}/_{\sqrt{2}},0,-{}^{1}/_{\sqrt{2}})$ $\qquad$ $(0,0,1) \rightarrow ({}^{1}/_{\sqrt{2}},0,{}^{1}/_{\sqrt{2}})$

así que como la la rotación es lineal, se puede escribir

$$R \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^{1}/_{\sqrt{2}} & 0 & {}^{1}/_{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -{}^{1}/_{\sqrt{2}} & 0 & {}^{1}/_{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$





Lema. La composición de transformaciones lineales corresponde a la multiplicación de matrices.

Demostración. Si las transformaciones lineales T y S están representadas por las matrices M y N, es decir si $T(V)=MV$ y $S(V)=NV$ para cada vector V, entonces $(S\circ T)(V) = S(T(V)) = S(MV) = N(MV) = (NM)V$ así que la transformación $S\circ T$ esta representada por la matriz NM.

Ejemplo. Si las transformaciones T y S están dadas por las matrices

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

entonces la composición $T\circ S$ esta dada por la matriz producto

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 9 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

Mientras que la matriz de la composición $S\circ T$ esta dada por el producto

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 9 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Observar que $T\circ S$ y $S\circ T$ son muy distintas!

Ejemplo. ¿Como es la composición de la rotación de 45° en el eje x seguida de la rotación de 45° en el eje y?

Las rotaciones están dadas por las matrices

$$M=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad N=\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

la rotación en el eje x seguida de la rotación en el eje y esta dada por la matriz NM (ojo con el orden!)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}$$

La rotación en el eje y seguida de la rotación en el eje x esta dada por la matriz MN

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

que es muy distinta!

No todas las matrices de 3x3 dan transformaciones biyectivas de R^3, la transformación es biyectiva si tiene una inversa. Por el lema anterior, si la transformación T está dada por la matriz M, entonces la inversa de T esta dada por la matriz inversa M^{-1}

Ejemplo. La inversa de la transformación $T(x,y,z)=(x,x+y,x+y+z)$ es $T^{-1}(x,y,z)=(x,y-x,z-y)$

Esto puede comprobarse haciendo el producto de las matrices, que debe ser la identidad:

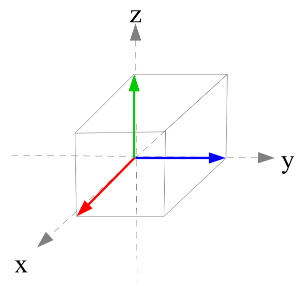
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

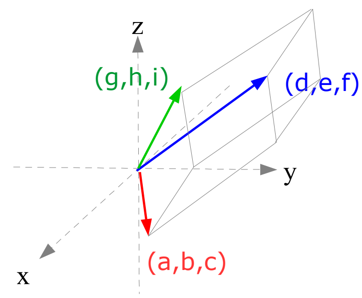
Aquí no encontramos la inversa de T, solo checamos que lo es. Mas adelante veremos como encontrar las inversas de las matrices directamente.

Recordar que el determinante de una matriz M de 3x3 es

$$\det M = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Lema. El determinante de la matriz M mide cuanto cambian los volúmenes de las figuras al aplicarles la transformación T(V)=MV.





Demostración. La transformación T convierte a los cubos generados por los vectores (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) (basados en cualquier punto) en los paralelepípedos generados por las imágenes esos 3 vectores bajo T.

El volumen del paralelepípedo generado por los vectores U, V y W esta dado por el triple producto escalar U x V · W, que es el determinante de la matriz cuyos renglones son U, V y W.

Y este determinante es igual al de la matriz cuyas columnas son U, Y y W, que es la matriz M. Así que el determinante mide cuanto cambian los volúmenes de los cubos al aplicarles la transformación.

Los volúmenes de todos los sólidos en R^3 cambian en la misma proporción, ya que todos los sólidos en R^3 pueden aproximarse por cubos y sus imágenes se aproximan por las imágenes de esos cubos. •

Ejemplo. El determinante de la matriz

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

es $1\cdot5\cdot9+4\cdot8\cdot3+2\cdot6\cdot7-7\cdot5\cdot3-4\cdot2\cdot9-1\cdot8\cdot6 = 45+96+84-105-72-48 = 0$ así que la matriz *no* es invertible. En este caso la función lineal T(V)=MV aplasta el espacio a un plano.

Ejemplo. La transformación T(x,y,z) = (2x+4y+z, y+2z, x+2y+3z) esta dada por la matriz

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

cuyo determinante es 5, así que T multiplica los volúmenes por 5.

Corolario. Si M y N son matrices de 3x3 entonces det(MN) = det(M) det(N).

Demostración (geométrica). Si det(M) 0 y det(N)≠0 entonces M y N corresponden a transformaciones S y T que multiplican los volúmenes por los factores det(M) y det(N) respectivamente.

Así que su composición $T \circ S$ es una transformación que multiplica los volúmenes por el factor det(M)·det(N). Pero a la transformación $T \circ S$ le corresponde la matriz MN, así que debe multiplicar los volúmenes por el factor det(MN).

Otra demostración (algebráica). Basta multiplicar las matrices y comparar sus determinantes, pero estas son unas cuentas largas... •

Corolario. La matriz M representa una transformación (biyectiva) si y solo si su determinante es distinto de 0.

Demostración (geométrica). Si el determinante no es 0, la función manda un cubo a un paralelepípedo no aplanado, así que las imágenes de los vectores básicos no son coplanares y ya mostramos que en este caso la función es biyectiva y por tanto tiene inversa. Y si la función es biyectiva entonces la imagen del cubo unitario es un paralelepípedo no aplanado, así que su volumen, que es el determinante, no es 0.

Demostración (algebráica). Si una matriz M es invertible entonces det(M)set(M^{-1}) = det(MM^{-1}) = det(I) = 1 así que det(M) ≠ 0.

Y si det M ≠ 0 entonces podemos hallar la inversa explicitamente:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}^{T}$$

Para obtener la inversa de M primero hay que calcular su *matriz de cofactores*, que en cada entrada tiene el determinante de la submatriz de M que se obtiene borrando el renglón y la columna correspondientes a esa entrada, cambiándole el signo de manera alternada. Luego hay que transponer esta matriz (intercambiando renglones y columnas) y dividirla entre el determinante de M. De este mismo modo se puede encontrar la inversa de cualquier matriz de nxn con determinante distinto de 0.

Ejemplo. Si

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Entonces

$$M^{-1} = \frac{1}{22} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{vmatrix}^{T} = \frac{1}{22} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 10 \\ 13 & -1 & -5 \\ -8 & 4 & -2 \end{vmatrix}^{T} = \begin{vmatrix} {}^{4}/_{22} & {}^{13}/_{22} & {}^{-8}/_{22} \\ {}^{2}/_{22} & {}^{-1}/_{22} & {}^{4}/_{22} \\ {}^{10}/_{22} & {}^{-5}/_{22} & {}^{-2}/_{22} \end{vmatrix}$$

Se aprecia aquí que la geometría y el álgebra a veces dan información complementaria. •

Problemas.

1. Da las matrices de 3 transformaciones lineales *distintas* de R^3 que envíen los ejes x,y,z a las rectas generadas por los vectores (1,2,3) (1,1,1) y (0,-3,1) respectivamente.

2. Da las matrices correspondientes a las siguientes transformaciones lineales

   a. La rotación de 45° alrededor del eje z

   b. La rotación de 30° alrededor del eje y

   c. La rotación de 180° alrededor de la recta x=y=z

   d. La reflexión en el plano x+y+z=0

      hint para c y d : elije 3 vectores (no coplanares) cuyas imágenes puedas adivinar y úsalas para hallar las imágenes de los vectores (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1).

3. Si T(x,y,z)=(x-y+z,x+y-z,x+y+z) y S(x,y,z)=(x-y,y+z,x+z)
   a. Escribe las transformaciones usando matrices.
   b. Usa matrices para calcular las composiciones $T \circ S$ y $S \circ T$.
   c. Encuentra las inversa de T, si es que existe, usando matrices. Comprueba tu resultado!

4. ¿Cuales de estas matrices corresponden a transformaciones (biyectivas) de R^3?
¿Cuales preservan longitudes? ¿Cuales preservan volúmenes? ¿Cuales preservan ángulos?

$$\text{a. } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{b. } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{c. } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \qquad \text{d. } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Isometrías

Las transformaciones del espacio que preservan distancias son llamadas **isometrías**.

Las transformaciones del espacio que mandan rectas en rectas y preservan longitudes, ángulos, áreas y volúmenes se llaman **transformaciones rígidas**.

Ejemplos. Todas las traslaciones, rotaciones, reflexiones y sus composiciones son transformaciones rígidas.

Lema. Las isometrías son transformaciones rígidas.

Demostración. Veamos primero que preservan lineas rectas. Por la desigualdad del triángulo tres puntos están alineados si y solamente si la suma de dos de sus distancias es igual a la tercera distancia.

Si p,q,r son tres puntos alineados de modo que d(p,q)+d(q,r)=d(p,r) y I es una isometría que los envía a los puntos p', q', r' entonces d(p',q') + d(q',r') = d(p,q) + d(q,r) = d(p,r) = d(p',r') de modo que p', q' y r' deben estar alineados.

Para ver que una isometría debe preservar ángulos basta observar que debe enviar cada triángulo a otro con los mismos lados, y por lo tanto con los mismos ángulos.

Como cada isometría preserva longitudes y ángulos, debe preservar la forma y tamaño de los paralelogramos y los paralelepípedos, y todas las áreas y volúmenes se pueden aproximar por áreas de triángulos y volúmenes de paralelepípedos. •

Decimos que una matriz es **ortogonal** si sus columnas son vectores unitarios y ortogonales.

Ejercicio. ¿Cuales de estas matrices son ortogonales?

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Lema. La transformación lineal dada por la matriz M es una isometría si y solo si M es ortogonal.

Demostración. La transformación T(V)=MV envía los vectores (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) a los vectores columna de la matriz, que llamaremos V_1,V_2 y V_3, y la transformación es T(x,y,z) = $xV_1 + yV_2 + zV_3$.

Si la transformación es una isometría entonces las columnas V1,V2 y V3, deben ser vectores unitarios porque vienen de vectores unitarios y deben ser ortogonales ya que por el teorema de Pitágoras la imagen de un triángulo rectángulo debe ser un triángulo rectángulo.

Si la matriz es ortogonal entonces V_1,V_2 y V_3 son ortogonales y tienen norma 1, y por el teorema de Pitágoras $|T(x,y,z)|^2 = x^2\,|V_1|^2 + y^2\,|V_2|^2 + z^2\,|V_3|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = |(x,y,z)|^2$. •

Problemas.

5. Muestra que el determinante de una matriz ortogonal es 1 o -1

6. ¿Cual es la diferencia geométrica entre las isometrías cuyas matrices tienen determinante 1 y aquellas cuyas matrices tienen determinante -1?

Lema. Una matriz M es ortogonal si y solo si $MM^T = 1$.

Demostración. Las entradas (ij) de la matriz MM^T dan los productos punto de las columnas (i) y (j) de M.

Si las columnas de M son vectores ortogonales de norma 1 entonces el producto punto las columnas i y j es 1 cuando i=j y es 0 cuando i≠j, así que MM^T es la matriz identidad.

Recíprocamente, si las entradas (ij) de MM^T son 1 cuando i=j y 0 cuando i≠j, entonces el producto punto de la columna i con ella misma (que es el cuadrado de su norma) es 1 y el producto punto de dos columnas distintas es 0, lo que dice que las columnas son ortogonales. •

Corolario. Si M es una matriz ortogonal entonces $M^{-1} = M^T$.

Este corolario de una manera muy sencilla de encontrar las inversas de las isometrías.

Ejemplo. La matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

es ortogonal, así que corresponde a una isometría, y su inversa es la matriz transpuesta:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Dadas 3 direcciones ortogonales cualesquiera en R^3, hay una isometría que lleva los ejes de coordenadas a esas direcciones.

Ejercicio. Dar una isometría que envíe el eje x a la recta x=y=z.

Un vector en la recta x=y=z es U=(1,1,1), un vector perpendicular a U es V=(1,1,-2) y un vector perpendicular a U y a V es W=UxV=(-3,3,0). Así que 3 vectores perpendiculares unitarios son $U/|U|=(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $V/|V|=(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$ y $W/|W|=(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ y la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$$

da una transformación lineal que hace lo que queremos.

Las matrices de rotaciones o reflexiones en direcciones distintas a los ejes coordenados pueden ser difíciles de hallar directamente, pero sabiendo como hacer rotaciones y reflexiones en las direcciones de los ejes es posible hacerlas:

Si I es una isometría que manda el eje x a la recta L, y R es una rotación alrededor del eje x entonces podemos aplicar I^{-1} para llevar la recta L al eje x, ahí podemos rotar y luego aplicar I para regresar L a su lugar original, el resultado $I \circ R \circ I^{-1}$ es una rotación alrededor de la recta L.

De manera similar puede hallarse la reflexión en cualquier plano que pase por el origen.

Ejemplo. ¿Cual es la matriz correspondiente a la rotación de 90° alrededor de la recta generada por (2,1,-2)?

Si R es la rotación de 90 alrededor del eje x y hallamos una isometría I que lleve el eje x a esa recta, la rotación alrededor de la recta es la composición $I \circ R \circ I^{-1}$.

Para hallar I, buscamos una matriz ortogonal cuyas columnas sean vectores unitarios y ortogonales y el primero tenga la dirección de (2,1,-2). Un vector ortogonal a este es (1,0,1) y uno perpendicular a los dos es

(2,1,-2) x (1,0,1) = (1,-4,-1). Como $|(2,1,-2)|=3$, $|(1,0,1)|=\sqrt{2}$ y $|(1-4,-1)|=\sqrt{18}$.

los vectores unitarios en esas direcciones son $(2/3, 1/3, -2/3)$, $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ y $(1/\sqrt{18}, -4/\sqrt{18}, -1/\sqrt{18})$ y la matriz de la isometría I es

$$M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{18} \\ 1/3 & 0 & -4/\sqrt{18} \\ -2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} \end{pmatrix}$$

La matriz de la rotación de 90 alrededor del eje x es

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de la rotación de 90° alrededor de la recta generada por (2,1,-2) es el producto

$$MRM^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-4}{\sqrt{18}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{18}} & \frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-8}{9} \\ \frac{-7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿Como es la rotación de 45° alrededor de la recta L generada por el vector (2,1,-2)?

La rotación de 45° alrededor del eje x tiene matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Podemos usar la misma isometría I del ejemplo anterior para llevar el eje x a la recta L.

La rotación de 45° alrededor de la recta L es la composición $I \circ R \circ I^{-1}$, cuya matriz es el producto

$$MPM^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-4}{\sqrt{18}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8+5\sqrt{2}}{18} & \frac{4+4\sqrt{2}}{18} & \frac{-8+7\sqrt{2}}{18} \\ \frac{4-8\sqrt{2}}{18} & \frac{2+8\sqrt{2}}{18} & \frac{-4-4\sqrt{2}}{18} \\ \frac{-8+\sqrt{2}}{18} & \frac{-4+8\sqrt{2}}{18} & \frac{8+5\sqrt{2}}{18} \end{pmatrix}$$

Moraleja: *las matrices ortogonales pueden verse feas.*

Ejemplo. ¿Que matriz da la reflexión en el plano $2x+y-2z=0$?

Para hallar la reflexión podemos buscar una isometría I que lleve el plano $x=0$ al plano $2x+y-2z=0$.

Si Я es la reflexión en el plano $x=0$, la reflexión buscada es la composición $I \circ R \circ I^{-1}$.

La reflexión en el plano $x=0$ tiene matriz

$$Я = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para hallar la isometria I, basta mandar el vector (0,0,1) a un vector unitario en la dirección de (2,1,-2) que es un vector normal al plano, y mandar los vectores (1,0,0) y (0,1,0) a dos vectores unitarios en ese plano que sean perpendiculares entre si. Esto ya lo hicimos en el ejercicio anterior, la matriz que obtuvimos era

$$M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} \\ 1/3 & 0 & -4/\sqrt{18} \\ -2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} \end{pmatrix}$$

Así que la matriz correspondiente a la reflexión en el plano $2x+y-2z=0$ es

$$MЯM^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} \\ 1/3 & 0 & -4/\sqrt{18} \\ -2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{18} & -4/\sqrt{18} & -1/\sqrt{18} \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} \\ 1/3 & 0 & -4/\sqrt{18} \\ -2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{18} & -4/\sqrt{18} & -1/\sqrt{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 & -4/9 & 8/9 \\ -4/9 & 7/9 & 4/9 \\ 8/9 & 4/9 & 1/9 \end{pmatrix}$$

Problemas

7. ¿Cuales de estas matrices corresponden a isometrias de R^3?

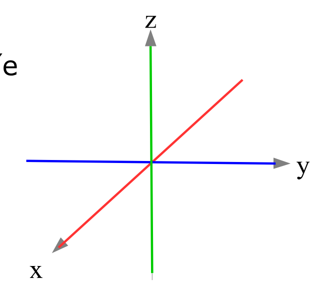
$$a. \begin{pmatrix} 1/5 & -1/3 & 5/8 \\ 2/5 & -1/3 & -4/8 \\ 3/5 & 1/3 & 1/8 \end{pmatrix} \quad b. \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{11} & 7/\sqrt{66} \\ 1/\sqrt{6} & 3/\sqrt{11} & 1/\sqrt{66} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{11} & 4/\sqrt{66} \end{pmatrix} \quad c. \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

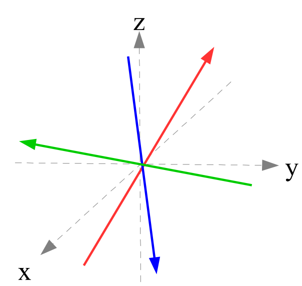
8. Una de estas matrices corresponde a una rotación en una recta y otra corresponde a la reflexión en un plano. ¿cual es cual? (Hint: se distinguen por algo del determinante)

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

¿Cuales son las inversas de estas matrices? Compruebalas.

9. ¿Hay alguna isometría del espacio que envíe los ejes x,y,z a las rectas generadas por los vectores(1,2,3) (1,1,-1) y (5,-4,1)? Encuéntrala o demuestra que no existe.





10. Da explícitamente una matriz ortogonal M de 3x3 *distinta de la identidad*, tal que M^3=Id.

11. a. Da la matriz de la rotación de 90° alrededor de la recta x=2y=3z

b. Da la matriz de la reflexión en el plano x+2y+3z=0

(hint: primero encuentra una isometría que envíe el eje z a esa recta y el plano z=0 a ese plano)

12. ¿Que isometría se obtiene al componer las 3 rotaciones de 90° alrededor de los ejes x, y, z? (da las 3 matrices y encuentra su producto)