Direcciones invariantes.

Las transformaciones afines mandan lineas paralelas en lineas paralelas, así que podemos decir sin ambigüedad que transforman cada dirección en alguna dirección. Si una dirección no cambia al aplicarle la transformación decimos que es una **dirección invariante** bajo la transformación.

Ejemplos en el plano.

- Las traslaciones dejan a todas las direcciones del plano invariantes. Como toda transformación afín es composición de una lineal con una traslación, al buscar direcciones invariantes basta fijarse en las transformaciones lineales.
- La reflexión del plano en una recta deja a todas la dirección de esa recta invariante. Y la dirección perpendicular también es invariante, aunque el sentido se invierte.
- El estiramiento $T(x,y,z)=(2x,3y)$ deja las direcciones de los ejes invariantes, pero no deja ninguna otra dirección invariante.
- Una rotación alrededor de un punto no deja ninguna dirección invariante, a menos que el ángulo de rotación sea 0° o 180°, en estos casos *todas* las direcciones del plano son invariantes.

Si una transformación lineal del espacio está dada por la matriz M, sus direcciones invariantes están dadas por los vectores $V\neq 0$ tales que $MV=\lambda V$ para algún λ.

Si $MV=\lambda V$ decimos que λ es un **valor propio** y V es un **vector propio** de la matriz M.

¿Como podemos hallar los valores y vectores propios de una matriz?

$MV=\lambda V$ para algún vector V y un escalar λ si y sólo si $(M-\lambda I)V=0$.

Si $(M-\lambda I)V=0$ para un vector $V\neq 0$, la función lineal dada por la matriz $M-\lambda I$ no es inyectiva y su determinante debe ser 0.

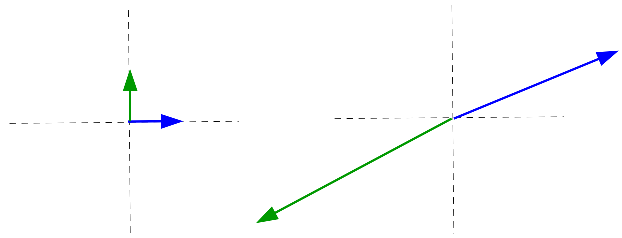
Reciprocamente, si el determinante de $M-\lambda I$ es cero, la función lineal dada por $M-\lambda I$ no es inyectiva y debe existir un vector $V\neq 0$ que vaya a dar al vector 0. Como $(M-\lambda I)V=0$ entonces $MV=\lambda V$ asi que V es un vector propio de M.

Así que para hallar los valores propios de una matriz M necesitamos hallar los valores de λ tales que el determinante de la matriz $M-\lambda I$ es 0.

Veamos primero unos ejemplos en dos dimensiones.

Ejemplo. ¿Cuales son las direcciones invariantes la transformación lineal del plano que manda (1,0) a (4,2) y (0,1) a (-5,-3)? La transformación, que esta dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$



La matriz M-λI es

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

El determinante de M-λI es $(4-\lambda)(-3-\lambda)+10=(\lambda-2)(\lambda+1)$ y los valores propios son $\lambda = 2$ y $\lambda = -1$

Así que hay una dirección en la que los vectores se estiran al doble y otra en la que solo cambian de sentido.

Para $\lambda = -1$, buscamos un vector tal que TV=-1V, es decir (M+I)V=0. Si V=(x,y)

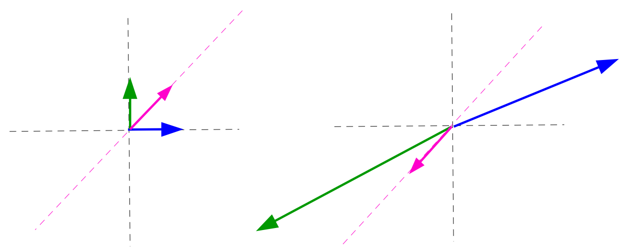
$$(M+I)V = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x-5y \\ 2x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un vector que satisface esta condición es (x,y) = (1,1).

Comprobemos que (1,1) es un vector propio de la matriz M:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así que los vectores en la dirección de (1,1) no cambian de dirección al aplicarles la transformación.



Para $\lambda = 2$, buscamos un vector tal que TV=2V, es decir (M-2I)V=0Si V=(x,y)

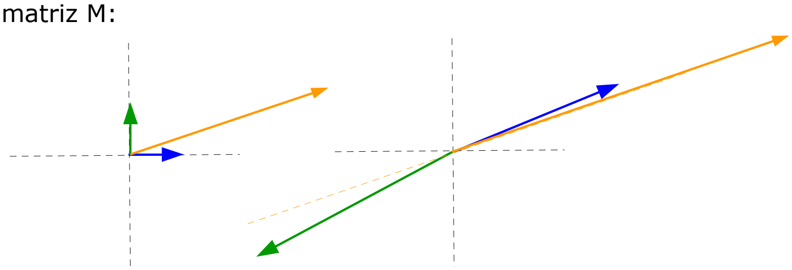
$$(M+I)V = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-5y \\ 2x-5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un vector que satisface esta condición es (x,y) = (5,2).

Comprobamos que (5,2) es un vector propio de la matriz M:

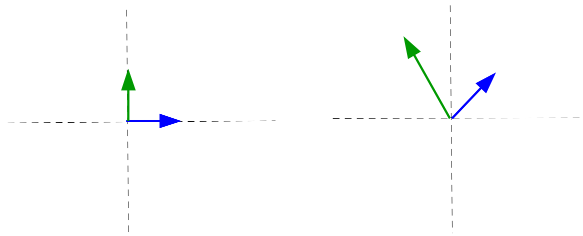
$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Así que los vectores en la dirección de (5,2) no cambian de dirección pero son estirados al doble.



Ejemplo. Considerar la transformación lineal que manda (1,0) a (1,1) y (0,1) a (-1,3), dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



La matriz M-λI es

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es $(1-\lambda)(2-\lambda)+1= \lambda^2-3\lambda+3$. Este polinomio no tiene raíces reales, ya que $\lambda= \frac{3\pm\sqrt{9-12}}{2}$ así que la transformación no deja ninguna dirección invariante.

Teorema. Las transformaciones lineales del plano pueden dejar 0, 1, 2 o todas las direcciones invariantes.

Demostración. Las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz M están dadas por los vectores $V\neq 0$ tal que $MV=\lambda V$. Los valores posibles de λ son las raíces de $\det(M-\lambda I)=0$, y como $\det(M-\lambda I)$ es un polinomio de grado 2 en λ, tiene 0, 1 o 2 raíces reales.

Si la transformación lineal estira a dos vectores no paralelos V_1 y V_2 por el mismo factor λ, entonces estira a todas las combinaciones lineales de V_1 y V_2 por ese mismo factor, así que todas las direcciones en el plano deben ser invariantes.

Si para cada λ hay una sola dirección en la que la transformación estira por el factor λ, entonces como hay a lo mas 2 valores de λ, debe haber a lo mas 2 direcciones invariantes. •

Corolario. Las isometrías del plano que fijan algún punto son las rotaciones y reflexiones.

Demostración. Las isometrías de plano que fijan el origen están dadas por matrices ortogonales, y solo hay de dos tipos, ya que solo hay 2 vectores unitarios perpendiculares a un vector unitario dado:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \qquad \text{donde } a^2+b^2=1$$

Para las del primer tipo

$$\det\begin{pmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(a-\lambda)+b^2 = \lambda^2-2a\lambda+a^2+b^2 = \lambda^2-2a\lambda+1$$

las raíces de este polinomio son $\lambda= \frac{2a\pm\sqrt{-4b^2}}{2}$ que no son reales si $b\neq 0$, y por lo tanto estas isometrías no dejan direcciones invariantes: son rotaciones por un ángulo θ donde $a=\cos\theta$ $b=\operatorname{sen}\theta$. Si b=0 entonces a=1 o a=-1, que corresponden a la identidad y a la rotación de 180, que dejan todas las direcciones invariantes.

Para las del segundo tipo

$$\det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & -a-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(-a-\lambda)-b^2 = \lambda^2-a^2-b^2 = \lambda^2-1$$

cuyas raíces son $\lambda=1$ y $\lambda=-1$, así que esta isometría deja dos direcciones invariantes, en una ($\lambda=1$) los vectores quedan fijos y en la otra ($\lambda=-1$) cambian de sentido. Para ver que estas isometrías son reflexiones falta que ver que las 2 direcciones invariantes son ortogonales.

Para $\lambda=1$ $\quad \begin{pmatrix} a-1 & b \\ b & -a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-1)x+by \\ bx-(a+1)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ una solución es $(x,y) = (b,-a+1)$ ya que $b^2+a^2-1=0$

Para $\lambda=-1$ $\quad \begin{pmatrix} a+1 & b \\ b & -a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+1)x+by \\ bx+(-a+1)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ una solución es $(x,y) = (-b,a+1)$ ya que $-b^2-a^2+1=0$

Y los vectores propios $(b,-a+1)$ y $(-b,a+1)$ son ortogonales por la misma razón. •

Ejercicio. Muestra que la siguiente matriz corresponde a la reflexión del plano y di en cual recta.

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} 3/5-\lambda & 4/5 \\ 4/5 & -3/5-\lambda \end{pmatrix} = (3/5-\lambda)(-3/5-\lambda)-4/5^2 = \lambda^2-1$$

Es una matriz ortogonal, así que corresponde a una isometría, como tiene 2 direcciones invariantes debe ser una reflexión, la dirección de la recta de reflexión esta dada por el vector propio correspondiente a $\lambda=1$:

$$(M+I)V = \begin{pmatrix} -2/5 & 4/5 \\ 4/5 & -8/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5\,x + 4/5\,y \\ 4/5\,x - 8/5\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las soluciones son los vectores (x,y) tales que $-2/5\,x + 4/5\,y = 0$ (la otra ecuación es equivalente a esta)

Así que la recta de reflexión tiene ecuación $x-2y=0$.

Problemas.

1. Encuentra los valores propios y vectores propios de estas matrices:

   a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. ¿Cuales son las direcciones invariantes de estas transformaciones lineales?
   a. $T(x,y)=(4x+2y, x+3y)$
   b. $T(x,y)=(y, 2x)$

3. Encuentra varias transformaciones del plano que tengan exactamente 1 dirección invariante.

4. ¿Cual de las siguientes matrices corresponde a rotación y cual a una reflexión en el plano? ¿Cual es la recta de reflexión?

$$\begin{pmatrix} 5/13 & 12/13 \\ 12/13 & -5/13 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 12/13 & 5/13 \\ -5/13 & 12/13 \end{pmatrix}$$

Consideremos ahora transformaciones afines del espacio.

Ejemplos.

- Las traslaciones en R^3 dejan todas las direcciones invariantes. Como cada transformación afín es composición de una transformación lineal y una con traslación que no cambia las direcciones, para hallar sus direcciones invariantes basta considerar las transformaciones lineales.
- La reflexión del espacio en un plano P deja a todas las direcciones en P invariantes. La dirección perpendicular a P también es invariante, aunque su sentido se invierte.
- Una rotación alrededor de una recta R deja a la dirección de R invariante, y no deja otras direcciones invariantes a menos que el ángulo de rotación sea 0° o 180°, en este caso todas las direcciones del plano ortogonal a R son invariantes.

Igual que en el plano, para hallar las direcciones invariantes de una transformación lineal del espacio, debemos hallar los valores propios y vectores propios de la matriz que la representa.

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \det(M-\lambda I) = -\lambda^3 -1$$

cuya única raíz real es $\lambda=-1$, este es el único valor propio de la matriz. Ahora buscamos sus vectores propios

$$(M-I) \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ x+y \\ -y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto sucede si z=-x, y=-x, así que un vector propio es V=(1,-1,-1) y la única recta invariante es -x=y=z.

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad N-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \det(N-\lambda I) = -\lambda^3+3\lambda+2$$

Y las raíces de $-\lambda^3+3\lambda+2$ son $\lambda=-1$, $\lambda=2$.

Busquemos ahora los vectores propios correspondientes a estos valores propios.

Para $\lambda=-1$, buscamos un vector V tal que MV=1V, es decir (M-I)V=0. Si V=(x,y,z)

$$(N+I)V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La única condición es que x+y+z=0, y esto es un plano. En ese plano todas las direcciones son invariantes y los vectores solo cambian de orientación, así que la transformación actúa ahí como una rotación de 90°.

Para $\lambda=2$, buscamos un vector V tal que MV=2V, es decir (M-2I)V=0. Si V=(x,y,z)

$$(N-2I)V = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+y+z \\ x-2y+z \\ x+y-2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto sucede si x=y=z, así que un vector propio es V=(1,1,1), que da la otra dirección invariante.

Hay muchas transformaciones lineales del plano que no dejan direcciones invariante (por ejemplo las rotaciones con ángulo distinto de 180°). Uno puede preguntarse siocurre lo mismo para las transformaciones del espacio

Teorema. Cada transformación lineal de del espacio deja 1, 2, 3 o una infinidad de direcciones invariantes.

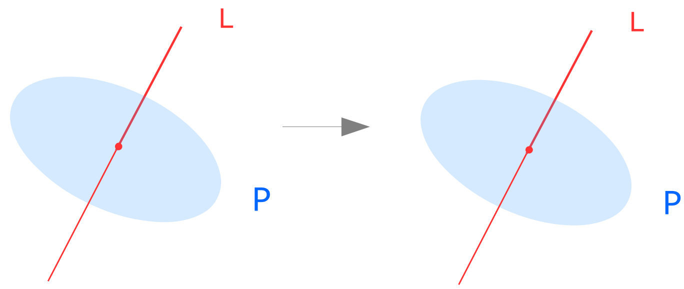
Demostración. Para cada matriz M de 3x3, $\det(M-\lambda I)$ es un polinomio real de tercer grado, así que debe tener al menos una raíz real λ, esta da un valor propio y a esta corresponde al menos un vector propio de la matriz, que da una dirección invariante.

Si hay dos vectores no paralelos V_1 y V_2 que se estiran por el mismo factor λ, entonces todas las combinaciones lineales de V_1 y V_2 se estiran por ese mismo factor, así que todas las direcciones del plano generado por V_1 y V_2 son invariantes.

Si para cada λ solo hay una dirección que se estira por el factor λ, entonces como hay a lo mas 3 valores de λ debe haber a lo mas 3 direcciones invariantes. •

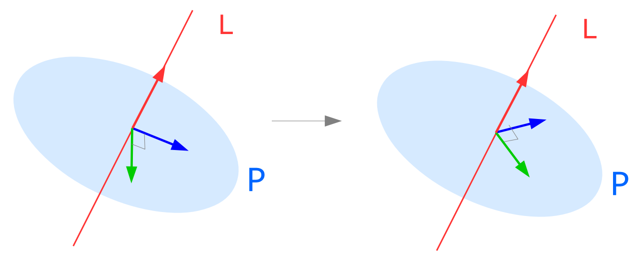
Corolario. Las isometrías del espacio que fijan el origen son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y las rotaciones con reflexión (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).

Demostración. Si la isometría I fija el origen entonces es lineal, y como todas las transformaciones lineales del espacio deben dejar al menos una dirección invariante, I debe mandar a alguna recta L que pasa por el origen sobre si misma. Como ademas I debe preservar ángulos, I debe mandar al plano P que pasa por el origen y es perpendicular a L sobre si mismo.

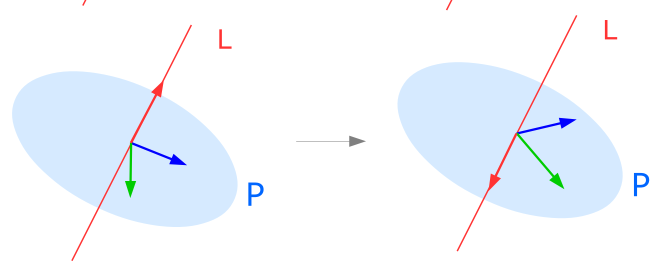


Observar que I puede preservar o invertir la orientación de la linea L (hay un vector unitario u en L tal que Iu=u o Iu=-u) y que I puede preservar o invertir la orientación en el plano P, actuando en P como una rotación o como una reflexión

Caso 1. Si I preserva la orientación en L y preserva la orientación en P, entonces I es una rotación alrededor de L.

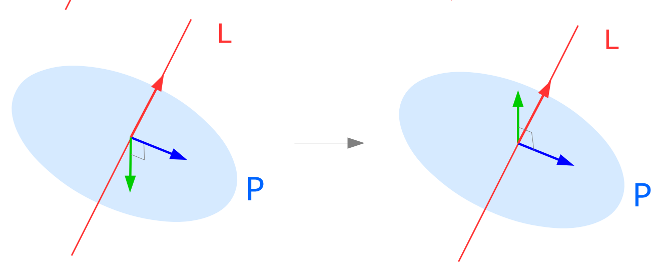


Caso 2. Si I invierte la orientación en L y preserva la orientación en P, entonces I se obtiene rotando alrededor de L y reflejando en P (es una rotación con reflexión).

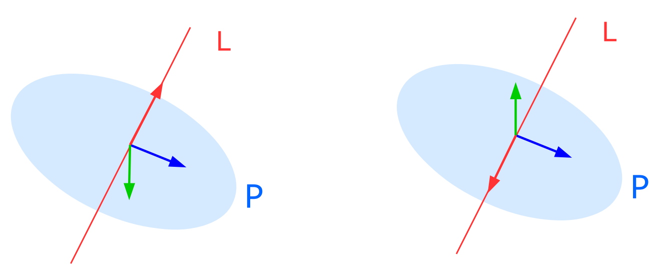


Caso 3. Si I preserva la orientación en L e invierte la orientación en P, entonces hay un vector v en P tal que Iv=v y otro vector w en P perpendicular a v tal que Iw=-w.

Como I fija a u y v e invierte a w, entonces I es una reflexión en el plano generado por u y v.



Caso 4. Si I invierte la orientación en L y también invierte la orientación en P, entonces I fija a v e invierte a u y a w, así que I es una rotación de 180 alrededor de la recta generada por v. •



El resultado anterior no solo dice como son todas las isometrías del espacio que fijan un punto, también nos dice como distinguirlas usando sus valores y vectores propios. Observar que las isometrías solo pueden tener como valores propios a 1 y a -1:

- Las rotaciones tienen como valor propio sólo a 1, excepto si son de 180°, que también tienen como valor propio al -1. Al 1 le corresponde una dirección invariante y (en el caso de rotaciones de 180°) al -1 le corresponden una infinidad de direcciones invariantes.
- Las reflexiones tienen como valores propios a 1 y -1. A -1 le corresponde sólo una dirección invariante y a 1 le corresponden una infinidad de direcciones invariantes.
- Las rotaciones con reflexión solo tienen como valor propio a -1. Y sólo hay una dirección invariante, a menos que la rotación sea de 180°.

  Todas las rotaciones de con reflexión de 180° son iguales, ya que dejan todas las direcciones invariantes, así que la matriz que les corresponde a todas es la misma:

  $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ y esta es la *reflexión en el origen*, que manda cada vector V a -V.

Ejemplo. ¿A que isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} ^1/_3 & ^2/_3 & -^2/_3 \\ ^2/_3 & ^1/_3 & ^2/_3 \\ ^2/_3 & -^2/_3 & -^1/_3 \end{pmatrix}$$

M es ortogonal, así que corresponde a una isometría.

$$\det(M-\lambda I) = 1/27 \det \begin{pmatrix} 1-3\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-3\lambda & 2 \\ 2 & -2 & -1-3\lambda \end{pmatrix} = (1-3\lambda)(1-3\lambda)(-1-3\lambda)+8+8+4(1-3\lambda)+4(1-3\lambda)+4(1+3\lambda) = ?$$

Es fácil checar que λ=1 hace al determinante 0 pero λ=-1 no lo hace 0, así que el único valor propio es 1 y la transformación debe ser una rotación

Para hallar la recta de rotación hay que hallar un vector propio correspondiente a λ=1.

Es fácil ver que (1,1,0) es un vector propio, así que la recta de rotación es x=y, z=0.

Para hallar el ángulo de rotación basta tomar un vector V perpendicular al vector propio (1,1,0) y calcular el ángulo θ entre V y MV. Si tomamos V=(0,0,1) entonces $MV=(-^2/_3, ^2/_3, -^1/_3)$

El ángulo entre V y MV esta dado por $\cos\theta = \dfrac{V\cdot MV}{|V||MV|} = -^1/_3$

Así que el ángulo de la rotación es $\theta=\cos^{-1}(-^1/_3) = 109.47°$.

Orientación.

Las transformaciones del plano (o del espacio) pueden separarse en dos clases: aquellas que **preservan la orientación** del plano (o del espacio) y aquellas que **invierten la orientación**.

Intuitivamente, una transformación del espacio preserva la orientación si convierte una mano derecha en otra mano derecha (aunque sea muy deformada) y una transformación invierte la orientación si convierte una mano derecha en una mano izquierda.

Ejemplos.

- Las rotaciones preservan la orientación.
- Las reflexiones invierten la orientación.

Podemos saber si una transformación lineal preserva o invierte la orientación viendo el determinante de su matriz: si es positivo la preserva, si es negativo la invierte.

Ejercicio. ¿La transformación T(x,y,z)=(x+z,y+z,x+y+z) preserva o invierte la orientación?

La matriz correspondiente es $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det M = -1$ así que invierte la orientación.

Observar que la composición de dos transformaciones que preservan la orientación (o la de dos transformaciones que invierten la orientación) preserva la orientación. La composición de una transformación que preserva la orientación y una que la invierte debe invertir la orientación.

En particular, la inversa de una transformación que preserva la orientación debe preservarla, y la inversa de una transformación que invierte la orientación debe invertirla.

Ejercicio. Mostrar que la composición de dos rotaciones en rectas por el origen es una rotación en alguna recta por el origen.

La composición de dos rotaciones que pasan por el origen es una isometría que fija el origen y preserva la orientación. Como las únicas isometrías del espacio que preservan orientación son las rotaciones, la composición de las 2 rotaciones debe ser una rotación.

Problemas.

5. Encuentra los valores propios y vectores propios de estas matrices:

a. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

6. ¿Cuales son las direcciones invariantes de estas transformaciones lineales?
   a. T(x,y,z)=(y,x+y, x+y+z)
   b. T(x,y,z)=(3x+y-z, y, 2x+y)

7. Sean V_1 y V_2 dos vectores propios de una transformación lineal.
   a. Muestra que si V_1 y V_2 tienen el mismo valor propio entonces todas las combinaciones lineales de V_1 y V_2 son vectores propios de T.
   b. Demuestra que si V_1 y V_2 tienen distintos valores propios entonces ninguna combinación lineal de V_1 y V_2 es un vector propio de T.

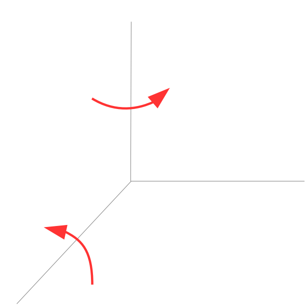
8. Encuentra una transformación lineal del espacio que tenga exactamente 2 direcciones invariantes, si es que existe (comprueba tu resultado!).

9. Muestra que una de estas matrices corresponde a una rotación y otra a una reflexión, y encuentra el eje de rotación y el plano de reflexión.

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Hint: basta ver que las matrices corresponden a isometrías para saber que los valores propios solo pueden ser 1 o -1, y entonces nada mas hay que encontrar las direcciones invariantes.

10. Si se componen la rotación de 90° alrededor del eje x con la rotación de 90° alrededor del eje z se obtiene otra rotación ¿alrededor de cual linea? ¿y por cuantos grados?



Transformaciones autoadjuntas y matrices simétricas

Observar que una transformación lineal T es una isometría si $TU \cdot V = U \cdot TV$ para todos los vectores U y V.

Se dice que una transformación lineal T esa **autoadjunta** si $TU \cdot V = U \cdot TV$ para todos los vectores U y V. Estas transformaciones pueden parecer raras, pero tienen propiedades muy especiales y se usan mucho en el álgebra, el análisis y la física.

Ejemplos.

- Las reflexiones del plano y del espacio son autoadjuntas.
- Las rotaciones del plano y del espacio *no* son autoadjuntas.

Recordar que una matriz M es *simétrica* si es igual a su transpuesta: $M = M^T$.

Ejemplos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que la suma de matrices simétricas es una matriz simétrica. Las inversas de matrices simétricas son simétricas, pero el producto de matrices simétricas no tiene que serlo.

Lema. Una transformación lineal T es autoadjunta si y solo si su matriz asociada es simétrica.

Demostración. Sea M la matriz asociada a T.

$\Leftarrow$ Supongamos primero que T es autoadjunta.

Sea $e_i = (0,..0,1,,0,...1)$ el vector que tiene un 1 en la i-esima entrada y 0 en las demás.

Si la matriz M tiene entradas a_{ij} entonces $e_i \cdot Me_j = a_{ij}$ y $e_j \cdot Me_i = a_{ji}$

así que si la transformación es autoadjunta entonces $a_{ij} = a_{ji}$ y la matriz M es simétrica.

$\Rightarrow$ Supongamos ahora que M es una matriz simétrica. Si escribimos a los vectores como matrices verticales, entonces $U \cdot V = U^TV$ y por la asociatividad del producto de matrices

$MU \cdot V = (MU)^TV = (U^TM^T)V = (U^TM)V = U^T(MV) = U \cdot MV$ así que la transformación es autoadjunta.

•

Lema. Para las transformaciones autoadjuntas, los vectores propios correspondientes a dos valores propios distintos deben ser ortogonales.

Demostración. Si U y V son dos vectores propios correspondientes a los valores propios distintos μ y λ entonces $\mu\,(U\cdot V) = \mu U\cdot V = TU\cdot V = U\cdot TV = U\cdot\lambda V = \lambda\,(U\cdot V)$ así que $\mu=\lambda$ o $U\cdot V=0$. •

Corolario. Las transformaciones autoadjuntas del plano tienen 2 vectores propios ortogonales.

Demostración. Para una matriz simétrica M de 2x2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

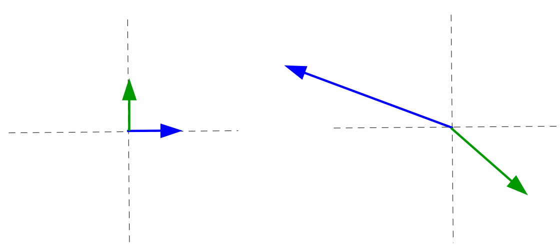
$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda)-b^2 = \lambda^2 -(a+c)\lambda +ac-b^2$$

Las raíces del determinante son $\lambda = \dfrac{a+c \pm \sqrt{(a+c)^2-4(ac-b^2)}}{2} = \dfrac{a+c \pm \sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$

que son dos raíces reales distintas (a menos que a=c y b=0) y por el lema anterior les corresponden vectores propios ortogonales (si a=c y b=0 la matriz es un múltiplo de la identidad y todos los vectores del plano son vectores propios). •

Ejemplo.

$$M = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$



$$\det M-\lambda I = \det \begin{pmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (-5-\lambda)(-2-\lambda)-4=\lambda^2+7\lambda+6 =(\lambda+1)(\lambda+6d)$$

Para $\lambda=-1$

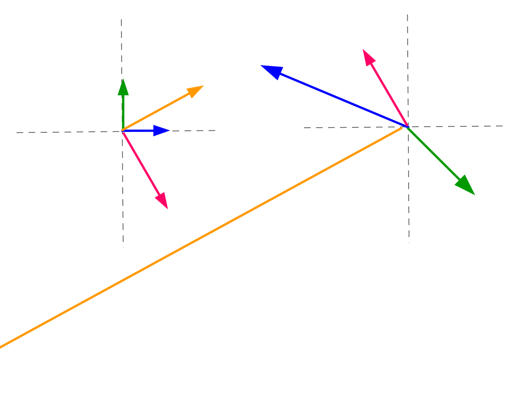
$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un vector propio es (1,-2)

Para $\lambda=-6$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un vector propio es (2,-1)



Y los dos vectores propios son perpendiculares.

Corolario. Las transformaciones autoadjuntas del plano son los estiramientos en 2 direcciones ortogonales.

Demostración. Si la matriz es simétrica entonces la transformación tiene 2 vectores propios ortogonales, y la transformación estira al plano en esas dos direcciones.

Recíprocamente, el estiramiento del plano en dos direcciones ortogonales esta dado por una matriz IEI^{-1}, donde I es una isometría que lleva los ejes coordenados a esas dos direcciones y E es la matriz diagonal de un estiramiento en las direcciones de los ejes coordenados. Como E es diagonal $E=E^T$ y como I es ortogonal $I^{-1}=I^T$ así que $(IEI^{-1})^T = I^{-1T}E^TI^T = IEI^{-1}$ por lo que IEI^{-1} es una matriz simétrica. •

Ejercicio. Encuentra la matriz correspondiente al estiramiento en la dirección de los vectores (3,4) y (-4,3) por los factores 2 y 5 respectivamente.

La matriz es de la forma IEI^{-1} donde E es la matriz de estiramiento en la dirección de los vectores (1,0) y (0,1):

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

y I es una isometría que envía (1,0) y (0,1) a vectores unitarios en las direcciones de (3,4) y (-4,3):

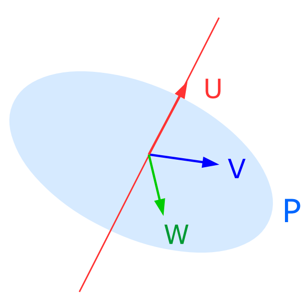
$$I = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

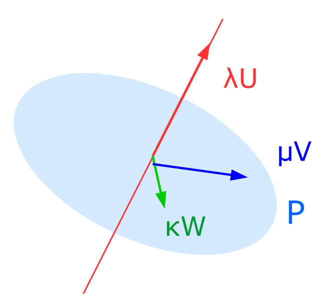
$$IEI^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6/5 & 8/5 \\ -20/5 & 15/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 98/25 & -36/25 \\ -36/25 & 77/25 \end{pmatrix}$$

Teorema. Las transformaciones autoadjuntas del espacio tienen 3 vectores propios perpendiculares.

Demostración. Toda transformación lineal del espacio tiene al menos un valor propio λ y un vector propio U. Si T es autoadjunta, entonces $U\cdot TV=TU\cdot V=\lambda U\cdot V$ por tanto T debe mandar vectores ortogonales a TU a vectores ortogonales a U y el plano P perpendicular a U debe ir a dar en si mismo.

En el plano P, T actúa como una transformación lineal autoadjunta, así que tiene dos vectores propios ortogonales en P, por lo tanto la transformación en el espacio tiene 3 vectores propios ortogonales. •





Teorema. Las transformaciones autoadjuntas del espacio son los estiramientos en 3 direcciones ortogonales.

Demostración. Si la transformación es autoadjunta su matriz M es simétrica, así que tiene 3 vectores propios ortogonales, y la transformación estira al espacio en esas 3 direcciones.

Recíprocamente, un estiramiento del espacio en 3 direcciones ortogonales esta dado por una matriz IEI^{-1}, donde E es la matriz de estiramiento en la dirección de los ejes coordenados y I es la matriz de la isometría que lleva los ejes coordenados a esas 3 direcciones.

Como E es diagonal $E^T=E$ y como I es ortogonal $I^{-1}= I^T$ así que

$(IEI^{-1})^T= I^{-1T}E^TI^T = IEI^{-1}$ lo que dice que IEI^{-1} es una matriz simétrica □

Ejercicio. Muestra que la siguiente matriz corresponde a un estiramiento en 3 direcciones ortogonales, hallando las direcciones y los factores de estiramiento.

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det M-\lambda I = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)+1+1-(3-\lambda)-(3-\lambda)-(5-\lambda) = -\lambda^3+11\lambda^2-36\lambda+36$$

Y las raíces son $\lambda = 2, 3, 6$

Para $\lambda=2$

$$(M-\lambda I)V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$ Y una solución es $(x,y,z)=(1,-1,0)$

Para $\lambda=3$

$$(M-\lambda I)V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$ Y una solución es $(x,y,z)=(1,1,1)$

Para $\lambda=6$

$$(M-\lambda I)V = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$ Y una solución es $(x,y,z)=(1,1,-2)$

Ahora podemos comprobar que las 3 direcciones halladas son las direcciones de estiramiento:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Problemas.

11. Muestra que la siguiente matriz corresponde a un estiramiento del plano en dos direcciones ortogonales, dando las direcciones y los factores de estiramiento.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

12. ¿Cual es la matriz correspondiente a estirar el plano al doble en la dirección del vector (4,3) y cambiar el sentido en la dirección del vector (3,-4)?

13. Demuestra que las reflexiones del espacio en planos por el origen tienen matrices simétricas.

14. Demuestra que la composición de dos rotaciones del espacio en rectas por el origen es una rotación en una recta por el origen.

15. Muestra que el producto de dos matrices simétricas M y N es una matriz simétrica si y solo si las dos matrices conmutan (es decir, si MN=NM).

16. Encuentra los valores propios y los vectores propios de la matriz simétrica

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

17. Muestra que la transformación T(x,y,z)=(x+2y-3z,2x+5y-4z,-3x-4y+8z) estira al espacio en 3 direcciones ortogonales, dando las direcciones y los factores de estiramiento.