Coordenadas

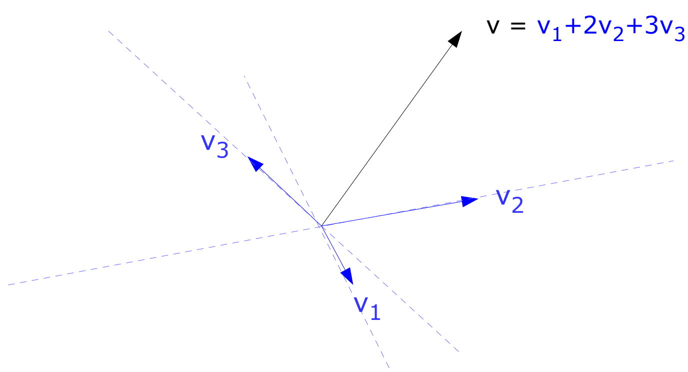
Hay muchas maneras de darle coordenadas a los puntos del espacio, las ecuaciones de las curvas o superficies dependen de las coordenadas que utilicemos y eligiendo las coordenadas adecuadas podemos hacer que las ecuaciones se vuelvan mas sencillas.

Los siguientes resultados, que enunciaremos para el espacio tridimensional, son validos en todas las dimensiones con las modificaciones obvias y las demostraciones son las mismas.

Si v_1,v_2,v_3 son tres vectores linealmente independientes en el espacio entonces cada vector v es puede escribir, de manera única, como combinación lineal de ellos: $v = a_1v_1+a_2v_2+ a_3v_3$

Diremos que las **coordenadas** de v en la **base** v_1,v_2,v_3 son (a_1,a_2,a_3).

Ejemplo.



Las coordenadas del vector $v=v_1+2v_2+3v_3$ en la base v_1,v_2,v_3 son $(1,2,3)$

Si fijamos una base, la función que le asigna a cada vector sus coordenadas en esa base es una función lineal: las coordenadas de u+v son las coordenadas de u mas las coordenadas de v y las coordenadas del vector ru son r veces las coordenadas de u).

Para cada base de vectores, las transformaciones lineales del espacio están dadas por funciones lineales de las coordenadas, de modo a que cada transformación T podemos asignarle una matriz M que dice como cambian las coordenadas de los puntos al aplicarles T. Observar que la matriz *depende de la base*.

Ejemplo. Supongamos que v_1,v_2,v_3 forman una base del espacio y consideremos la transformación lineal T que lleva los vectores v_1,v_2,v_3 a los vectores $v_1+2v_2-v_3$, $4v_1+7v_2-3v_3$ y $-9v_1+5v_3$ respectivamente. Entonces la matriz que da a la transformación T en las coordenadas v_1,v_2,v_3 es

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -9 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

Esto significa que si en la base v_1,v_2,v_3 el vector v tiene coordenadas (x,y,z) entonces Tv tiene coordenadas

$$T\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -9 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

Cambio de coordenadas

Nos interesa saber como cambian las coordenadas de un vector al cambiar de una base v_1,v_2,v_3 a otra base u_1,u_2,u_3. El cambio de coordenadas es una transformación lineal, y por lo tanto puede representarse por una matriz en la base v_1,v_2,v_3. Vamos a hallar esa matriz.

Si escribimos a los vectores u_1,u_2,u_3 como combinaciones lineales de v_1,v_2,v_3:

$u_1 = a_1v_1+a_2v_2+ a_3v_3$

$u_2 = b_1v_1+b_2v_2+ b_3v_3$

$u_3 = c_1v_1+c_2v_2+ c_3v_3$

entonces en la base v_1,v_2,v_3, la matriz de la transformación lineal que lleva los vectores v_1,v_2,v_3 a los vectores u_1,u_2,u_3 es

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

A la matriz P se le conoce como la matriz del cambio de base (de v_1,v_2,v_3 a u_1,u_2,u_3).

Lema. La matriz del cambio de coordenadas es la inversa de la matriz del cambio de base.

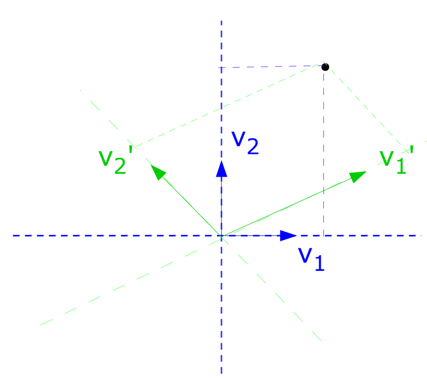
Demostración. Sean $X=(x_1,x_2,x_3)$ las coordenadas de un vector en la base v_1,v_2,v_3 y $X'=(x_1',x_2',x_3')$ las coordenadas del vector en la base u_1,u_2,u_3.

Tenemos que mostrar que $X' = P^{-1}X$ y esto equivale a ver que $PX' = X$.

El cambio de coordenadas de la base u_1,u_2,u_3 a la base v_1,v_2,v_3 es la transformación lineal que manda a (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) (las coordenadas de los vectores u_1,u_2,u_3 en la base u_1,u_2,u_3) a las coordenadas de esos vectores en la base v_1,v_2,v_3. Esto es justamente lo que hace la matriz P, así que P es la matriz que cambia las coordenadas verdes a las azules. •

Ejemplo. En el plano, consideremos la base formada por dos vectores v_1,v_2 y la base formada por los vectores u_1,u_2 donde $u_1=2v_1+v_2$ y $u_2=-v_1+v_2$. La matriz de cambio de base (v_1,v_2 a u_1,u_2) es

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



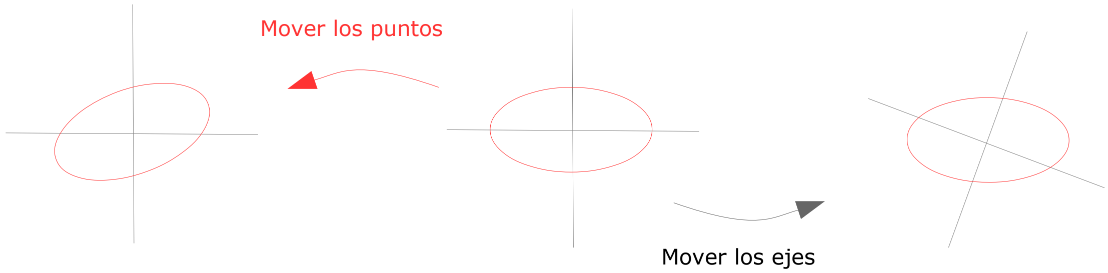
las coordenadas azules se obtienen de las verdes así:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

de modo que las verdes se obtienen de las azules así:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

El lema anterior dice que mover los ejes de coordenadas aplicándoles una transformación lineal P tiene el mismo efecto en las coordenadas de los puntos que mover los puntos aplicándoles la transformación inversa P^{-1}:



Las bases formadas por vectores unitarios y ortogonales son especialmente útiles para la geometría, ya que las normas de los vectores y los ángulos que forman pueden calcularse directamente de las coordenadas usando el teorema de Pitarrosa y la ley de los cosenos. Los cambios de coordenadas entre bases ortogonales también son mas sencillos, porque la inversa de una matriz ortogonal es su transpuesta.

Ejemplo. Consideremos la base canónica de R^3 $v_1=(1,0,0)$, $v_2=(0,1,0)$, $v_3=(0,0,1)$ y la base formada por los vectores $u_1=(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$ $u_2=(1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6},1/\sqrt{6})$ $u_3=(-1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$.

La matriz de cambio de base (de v_1,v_2,v_3 a u_1,u_2, u_3) es

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

como P es ortogonal, $P^{-1}= P^T$, y la matriz de cambio de coordenadas es $X' = P^TX$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, el vector que en la base canónica tiene coordenadas $(1,0,0)$, en la base u_1,u_2,u_3 tendrá coordenadas $(1/\sqrt{3},1/\sqrt{6},-1/\sqrt{2})$.

Si elegimos un sistema de coordenadas en el espacio, cada transformación lineal puede expresarse en esas coordenadas por medio de una matriz. Al cambiar de base las coordenadas cambian y la matriz de la transformación también cambia.

Lema. Si la matriz del cambio de base de v_1,v_2,v_3 a u_1,u_2,u_3 es P y si en la base v_1,v_2,v_3 la transformación T esta dada por la matriz M, entonces en la base u_1,u_2,u_3 la transformación T esta dada por la matriz $P^{-1}MP$.

Demostración. La matriz P cambia las coordenadas de la base u_1,u_2,u_3 a la base v_1,v_2,v_3, la matriz M da la transformación en las coordenadas v_1,v_2,v_3 y la matriz P^{-1} vuelve a cambiar de las coordenadas v_1,v_2,v_3 a las coordenadas u_1,u_2,u_3, así que la matriz $P^{-1}MP$ da la transformación en las coordenadas u_1,u_2,u_3. •

Ejemplo. En la base canónica la transformación lineal que manda (1,0) a (4,-1) y (0,1) a (-2,5) esta dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

En la base formada por los vectores (2,0) y (0,-3) la misma transformación esta dada por la matriz $P^{-1}MP$, donde P es la matriz de cambio de base que manda (1,0) a (2,0) y (0,1) a (0,-3).

$$P^{-1}MP= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -2 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2/3 & 5 \end{pmatrix}$$

En la base formada por los vectores (2,1) y (-1,1) la misma transformación esta dada por la matriz $R^{-1}MR$, donde R es la matriz de cambio de base que manda (1,0) a (2,1) y (0,1) a (-1,1).

$$R^{-1}MR= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

así que al cambiar de coordenadas la matriz de una transformación lineal puede hacerse mas sencilla o mas complicada. Esta ultima matriz es diagonal porque los vectores de la base son v. propios de T.

Problemas.

1. Si en la base v_1,v_2 los vectores u_1,u_2 tienen coordenadas (1,2) y (-1,3) respectivamente ¿que coordenadas tienen los vectores v_1,v_2 en la base u_1,u_2?

2. Las coordenadas de un vector v en la base e_1, e_2, e_3 son (x,y,z) ¿cuales son sus coordenadas en la base e_1+e_2, e_2+e_3, e_1+e_3?

3. En la base e_1,e_2 la transformación lineal T tiene matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ¿que matriz tiene T en la base e_1+3e_2 y e_1+2e_2 ?

4. Si un vector V del espacio tiene las mismas coordenadas en dos bases ortogonales* distintas ¿que relación hay entre las bases? *bases formadas por vectores unitarios y ortogonales.

5. Demuestra que la matriz de una transformación lineal T en una base v_1,v_2,v_3 es diagonal si y solo si v_1,v_2,v_3 son vectores propios de T.

Ecuaciones y cambio de coordenadas.

La ecuación de una curva o superficie es una relación entre las coordenadas de los puntos de la curva o superficie que los distingue de los demás puntos del espacio.

Las ecuaciones de las curvas y las superficies dependen de las coordenadas, al hacer una transformación, o al cambiar la base de coordenadas, sus ecuaciones cambian.

Llamemos a las coordenadas de un punto antes de la transformación (x,y,z) y a sus coordenadas después de la transformación (x',y',z'). Esto lo podemos expresar como $T(x,y,z)=(x',y',z')$.

Si conocemos la ecuación antes de la transformación (que es una ecuación en las coordenadas x,y,z) entonces podemos obtener la ecuación después de la transformación (que es una ecuación en las coordenadas x',y',z') escribiendo las coordenadas x,y,z en términos de las coordenadas x',y',z', lo que equivale a encontrar $(x,y,z)=T^{-1}(x',y',z')$ y sustituirlas en la ecuación original.

Si la transformación T es lineal, existe una matriz M tal que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

así que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ lo que nos da las coordenadas (x,y,z) en términos de (x',y',z').

Las ecuaciones lineales y cuadráticas pueden escribirse usando matrices, esto permite ver fácilmente como cambian al hacer una transformación lineal:

En el plano, la ecuación lineal $Ax+By=C$ puede escribirse como $(A,B) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C$

y la ecuación cuadrática (sin términos lineales) $Ax+Bxy+Cz=D$ puede escribirse como

$$(x\ y) \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D$$

En el espacio, la ecuación lineal $Ax+By+Cz=D$ puede escribirse como $(A\ B\ C) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = D$

y la ecuación cuadrática (sin términos lineales) $Ax+By+Cz+Dxy+Exz+Fyz=G$ puede escribirse

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = G$$

Ejemplos.

- $x+2y=3$ puede escribirse $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3$
- $3x^2-4xy+7y^2=5$ puede escribirse como $\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\-2 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=5$
- $x+2y+3z=4$ puede escribirse $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=4$
- $x^2+2y^2-3z^2-4xy+5yz+6xz=7$ puede escribirse como $\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\-2 & 2 & 5/2\\3 & 5/2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=7$

Dada una ecuación lineal $VX = c$ donde V es el vector de coeficientes y X es la columna de coordenadas, si hacemos una transformación lineal $X'=TX$ entonces $X=T^{-1}X'$ y sustituyendo en la ecuación original queda $V(T^{-1}X') = VT^{-1}X' = c$

Así que al hacer la transformación el vector de coeficientes V cambia por el vector VT^{-1} y si T es una isometría entonces $T^{-1} = T^T$ y $VT^{-1} = VT^T$.

Ejemplo. ¿Como cambia la ecuación $2x+y=3$ al hacer la transformación $(x',y') = (\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y, -\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y)$?

La ecuación puede escribirse como $\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=4$

La transformación es $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/5 & 3/5\\-3/5 & 4/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ Como T es una isometría $T^{-1}=T^T$

y la ecuación transformada es $\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4/5 & -3/5\\3/5 & 4/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=4$

multiplicando las matrices queda $\begin{pmatrix}11/5 & -2/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=4$

o sea $\frac{11}{5}x' - \frac{2}{5}y' = 4$.

Dada una ecuaciones cuadrática (sin términos lineales) $X^TSX = c$ donde S es alguna matriz simétrica y X es un vector (columna) de coordenadas, si hacemos una transformación $X'=TX$ entonces $X=T^{-1}X'$ y sustituyendo en la ecuación original queda

$(T^{-1}X')^TS(T^{-1}X') = X'^TT^{-1T}SP^{-1}X' = X'^TT^{-1T}ST^{-1}X' = c$

Así que al hacer la transformación la matriz S cambia por la matriz $T^{-1T}ST^{-1}$

Si T es una isometría entonces $T^{-1} = T^T$ y $T^{-1T}ST^{-1} = TST^T$.

Ejemplo. ¿Como cambia $2x^2+6xy+2y^2 = 5$ al hacer la transformación $(x',y') = (\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y,-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y)$?

La ecuación puede escribirse como $X^TSX = c$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5$$

La transformación es $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Como T es una isometría $T^{-1}= T^T$ y la ecuación transformada puede escribirse $X'^TTST^TX' = c$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 5$$

y haciendo el producto de matrices queda

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14/25 & 21/25 \\ 21/25 & 27/25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 5$$

o sea $\frac{14}{25}\, x'^2+\frac{42}{25}\, x'y'+\frac{27}{25}\, y^2 = 5$

Problemas. *Usando matrices*

6. ¿Como cambia la ecuación $x^2+2xy+3y^2 = 4$ al hacer la transformación $(x',y')=(x+y,y-x)$?

7. ¿Como cambia $x^2+2y^2-3z^2+4xy=5$ al hacer la transformación $(x',y',z')=(x,y-x,x+y+z)$?

Ecuaciones de segundo grado.

Queremos saber que forma tienen las soluciones de todas las ecuaciones cuadráticas en 2 o 3 variables. Empezaremos por las ecuaciones sin términos lineales como

$3x^2+4y^2 = 5$ $\qquad$ $2x^2+6xy+2y^2 = 1$ $\qquad$ $x^2+2y^2-3z^2 = 2$ $\qquad$ $x^2+2y^2-3z^2-4xy+6xz = -7$

Ya conocemos sus formas cuando las ecuaciones no tienen términos cruzados, ahora queremos saber sus formas cuando si los tienen. Una posibilidad es que existan otras formas, y otra es que sean las mismas formas pero en otras posiciones.

Para averiguarlo podemos hacer cambios de coordenadas: si existe una base de coordenadas donde la ecuación no tenga términos cruzados entonces su forma debe parecerse a una de las que conocemos, aunque quizás deformada por la transformación que cambia las coordenadas, pero si esta transformación es una isometría entonces la forma debe ser exactamente la misma.

Teorema. Para cada ecuación cuadrática sin términos lineales hay un cambio ortogonal de coordenadas que elimina los términos cruzados.

Demostración. Cada ecuación cuadrática sin términos lineales se puede escribir como

$$X^T S X = c$$

donde X es el vector (columna) de coordenadas, S es una matriz simétrica y c es una constante.

La ecuación no tiene términos cruzados si la matriz S es una matriz diagonal.

Al hacer un cambio de coordenadas $X'=TX$ la ecuación se convierte en

$$X'^T T^{-1T} S T^{-1} X' = c$$

Si T es ortogonal, entonces $T^{-1} = T^T$ y $T^{-1T} S T^{-1} = TST^{-1}$.

Así que necesitamos hallar un cambio de coordenadas de modo que T sea ortogonal y TST^{-1} sea diagonal.

La matriz S representa una transformación lineal y TST^{-1} representa esa misma transformación al cambiar de coordenadas. Como la matriz S es simétrica, tiene suficientes vectores propios para formar una base. Y si escribimos una transformación lineal en una base de vectores propios entonces su matriz es diagonal.

Así que si cambiamos las coordenadas para que los ejes tengan la dirección de los vectores propios de S, la matriz TST^{-1} será una matriz diagonal, y la ecuación en estas coordenadas no tendrá términos cruzados. •

El teorema anterior muestra que cada ecuación cuadrática homogénea puede convertirse en una ecuación sin términos cruzados por medio de una isometría, así que las soluciones de la primera ecuación tienen la misma forma que las soluciones de la segunda, solo que están en otra posición.

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $2x^2 + 6xy + 2y^2 = 5$?

La ecuación se escribe en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5$$

Los valores propios de $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ son las raíces de $\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2-9 = \lambda^2-4\lambda-5 = (\lambda-5)(\lambda+1)$

así que en la base formada por los vectores propios la forma cuadrática esta dada por la matriz diagonal $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y la ecuación en esa base es

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 5$$ o sea $5x'^2 - y^2 = 5$ por lo que se trata de una hipérbola

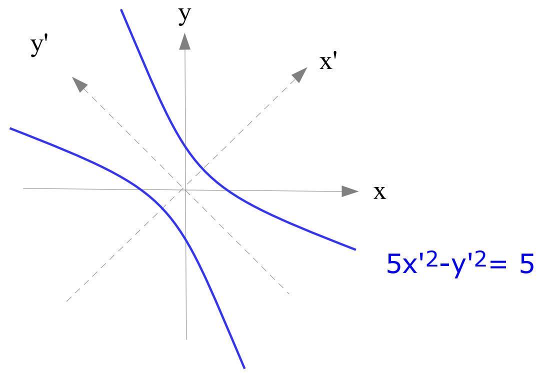
Los ejes de la hipérbola tienen las direcciones de los vectores propios:

Para $\lambda = 5$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ y un vector propio es } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = -1$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ y un vector propio es } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Podemos comprobar lo anterior haciendo el cambio de coordenadas a la base de vectores propios unitarios, que son $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. En esta base, la matriz es

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 5/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿Que superficie representa la ecuación $3x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 4xy + 8xz + 4yz = -7$?

La ecuación se escribe en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -7$$

Los valores propios de la matriz son las raíces de $\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3+12\lambda^2-21\lambda-98$

$$= -(\lambda-7)^2(\lambda+2)$$

Así que los valores propios son -2, 7, 7 y en la base de los vectores propios la matriz queda

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

y la ecuación en esas coordenadas es $-2x'^2 + 7y'^2 + 7z'^2 = -7$

por lo que la superficie es un hiperboloide de revolución de dos hojas.

Si queremos saber la posición del hiperboloide necesitamos hallar los vectores propios:

Para $\lambda = -2$

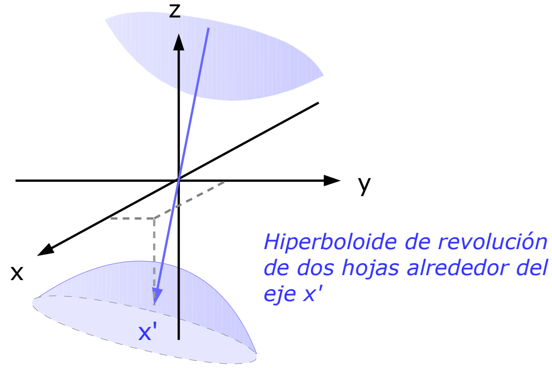
$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ y un vector propio es } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

este vector da la direccion del eje x'

Para $\lambda = 7$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ y un vector propio es } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y otro es } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como todas las combinaciones lineales de dos vectores propios con el mismo valor propio son vectores propios, el plano generado por (1,0,1) y (1,-2,0) esta formado por vectores propios (esto dice que es una superficie de revolución) *y cualquier par de direcciones ortogonales en este plano pueden usarse como los ejes y' y z'.*



Consideremos finalmente las ecuaciones cuadráticas con términos lineales. Estas ecuaciones pueden escribirse como

$$X^TSX + VX = c$$

donde S es una matriz simétrica y V es el vector de los coeficientes lineales. Si hacemos un cambio de coordenadas X'=TX donde T es una isometría, la ecuación se convierte en

$$X^TTST^{-1}X + VT^{-1}X = c$$

La demostración del teorema anterior muestra que hay una T de modo que TST^{-1} es una matriz diagonal, así que al aplicar T se eliminan los términos cruzados y solo quedan términos cuadráticos y lineales. Ahora podemos completar cuadrados y haciendo una traslación obtenemos una nueva ecuación cuadrática en la que cada coordenada aparece a lo mas una vez, y ya conocemos las soluciones de estas ecuaciones.

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x + 6y = 1$?

La ecuación se puede escribir

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = 1$$

Los valores propios de $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ son las raices de det $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)-4 = \lambda^2-5\lambda$, así que $\lambda=0,5$

Para $\lambda = 5$

$$M-\lambda I = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$ y un vector propio es $\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$

Para $\lambda = 0$

$$M-\lambda I = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$ y un vector propio es $\begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}$

si ahora tomamos la isometría que envía los vectores (1,0) y (0,1) a los vectores propios unitarios $(^1/_{\sqrt5},{}^2/_{\sqrt5})$ $(^2/_{\sqrt5},{}^{-1}/_{\sqrt5})$, es decir

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ^1/_{\sqrt5} & ^{-2}/_{\sqrt5} \\ ^2/_{\sqrt5} & ^1/_{\sqrt5} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$$ asi que $$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ^1/_{\sqrt5} & ^2/_{\sqrt5} \\ ^{-2}/_{\sqrt5} & ^1/_{\sqrt5} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}$$

entonces la ecuación queda

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1$$

o sea

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9/\sqrt{5} & 12/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1$$

así que la ecuación transformada es $5x'^2 - 9/\sqrt{5}\, x' + 12/\sqrt{5}\, y' = 1$ y podemos completar cuadrados y hacer una traslación para eliminar el termino lineal en x y queda $5x''^2 + 12/\sqrt{5}\, y'' = 0$ que es una parábola.

Corolario. Las soluciones de cualquier ecuación cuadrática en 3 variables

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz=J$$

forman un elipsoide, un hiperboloide, un paraboloide, un cono, un cilindro, dos planos, un plano, una recta, un punto o el vacío.

Demostración. Todas las ecuaciones de segundo grado se pueden convertir en ecuaciones cuadráticas sin términos cruzados usando isometrías, y estas pueden convertirse en ecuaciones donde cada variable aparezca a lo mas una vez usando traslaciones. Ya sabemos la forma de las soluciones de estas ecuaciones, y las transformaciones que les hicimos no cambian su forma. •

Ejemplo. ¿Que superficie representa la ecuación $x^2+y^2+z^2+2xy+4xz+6yz+x+2y+3z = C$?

La ecuación se puede escribir

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C$$

Los valores propios de la matriz son las raíces de $(1-\lambda)^3-14(1-\lambda)+12 = -\lambda^3 + 3\lambda^2+11\lambda-1$

No es fácil hallar las raíces, pero podemos ver que hay dos raíces positivas y una negativa así que al cambiar de coordenadas la ecuación debe quedar de la forma

$x'^2+y^2+z^2+2xy+4xz+6yz+x+2y+3z = C$

así que la superficie debe ser un hiperboloide de una o dos hojas.

Problemas.

8. ¿Que curvas representan estas ecuaciones en el plano? Da la forma exacta y su posición.

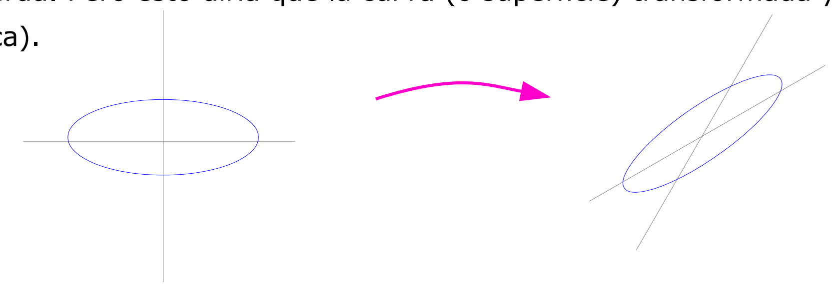
   a. $x^2-8xy-5y^2 = 21$ b. $5x^2-4xy+5y^2 = 21$

9. ¿Que superficie representa esta ecuación en el espacio? Da la forma exacta, sin la posición.

   $6x^2+6y^2+5z^2-4xy-2xz-2yz = 48$

Simetrias.

Las cónicas tienen uno o dos ejes de simetría, que son perpendiculares. Las cuádricas tienen 2 o 3 planos de simetría que son perpendiculares. Al aplicarle a una cónica o una cuádrica una transformación lineal, que mande sus ejes a ejes que no son perpendiculares, uno podría esperar que la simetría se pierda. Pero esto diría que la curva (o superficie) transformada ya no es una cónica (o una cuádrica).



Corolario. Al aplicarle una transformación lineal a una cónica (o una cuádrica) se obtiene siempre otra cónica (otra cuádrica).

Demostración. La cónica (o cuádrica) tiene una ecuación de segundo grado, al aplicarle una transformación lineal esta ecuación se convierte en que es otra ecuación de segundo grado, que debe corresponder a otra cónica (o cuádrica). •

Ojo: No es cierto que los ejes de simetría vayan a dar a los ejes de simetría!

Ejemplo. ¿Como cambia la forma de la elipse $4x^2+y^2 = 3$ al aplicarle la transformación lineal $T(x,y)=(x+y,y)$?

La ecuación se escribe

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3$$

y la transformación es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

y al hacer la transformación la ecuación se convierte en

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 3$$

o sea

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 3 \qquad \text{o sea} \qquad 4x^2 - 8xy + 5y^2 = 3$$

La ecuación es cuadrática y debe corresponder a una cónica, si queremos saber su forma necesitamos hallar los valores propios de la matriz $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -4 \\ -4 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(5-\lambda)-16 = \lambda^2-9\lambda+4 \qquad \text{así que } \lambda = \frac{9\pm\sqrt{65}}{2} \approx 8.531,\ 0.469$$

y la cónica transformada tiene la forma de la elipse $8.531\, x^2 + 0.469\, y^2 = 3$

Problemas.

10. ¿Que forma exacta tiene esta superficie y en que posición está?

$$xy + xz + yz = 1$$

11. Muestra que al aplicarle cualquier transformación lineal a un elipsoide, se obtiene otro elipsoide.

12. ¿La ecuación $x^2+2y^2+3z^2+4xy+5xz+6yz = 7$ corresponde a un elipsoide, un hiperboloide de 1 o de 2 hojas, un cono, o a otra cosa? hint: basta encontrar los signos de los valores propios.

¿A que curvas corresponden estas ecuaciones? basta decir elipse, hipérbola, recta,...

hint: no es necesario hallar los valores propios exactos.

a. $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ b. $x^2 + 3xy + 2y^2 = 1$ c. $x^2 + 4xy + 2y^2 = 1$

$3x^2+3y^2+5z^2x+2xy-2xz-2yz = 1$

$$\begin{matrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{matrix}$$

$-(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-6)$

$6x^2+6y^2+5z^2x-4xy-2xz-2yz = 48$

$$M = \begin{matrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{matrix}$$

$-\lambda^3 +17\lambda^2 -90\lambda +144 = -(\lambda-8)(\lambda-6)(\lambda-3)$

$$M' = \begin{matrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}$$