Direcciones invariantes

Cada transformación lineal manda lineas paralelas en lineas paralelas, así que envía cada dirección a alguna dirección.

Si una dirección no cambia al aplicarle la transformación decimos que es una **dirección invariante**.

Cada transformación lineal manda lineas paralelas en lineas paralelas, así que envía cada dirección a alguna dirección.

Si una dirección no cambia al aplicarle la transformación decimos que es una **dirección invariante**.

Ejemplos en el plano.

- Las traslaciones

- La reflexión del plano en una recta

- Una rotación alrededor de un punto

Cada transformación lineal manda lineas paralelas en lineas paralelas, así que envía cada dirección a alguna dirección.

Si una dirección no cambia al aplicarle la transformación decimos que es una **dirección invariante**.

Ejemplos en el plano.

- Las traslaciones dejan a todas las direcciones del plano invariantes (aunque no son transformaciones lineales).

- La reflexión del plano en una recta R deja la dirección de R invariante. La dirección perpendicular a R también es invariante, aunque su sentido se invierte.

- Una rotación alrededor de un punto no deja direcciones invariantes, a menos que el ángulo de rotación sea 180°. En este caso todas las direcciones del plano son invariantes.

Ejercicio. ¿Las transformaciones dadas por estas matrices tendrán direcciones invariantes?

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

¿Como podemos hallar todas las direcciones invariantes bajo una transformación lineal?

¿Como podemos hallar todas las direcciones invariantes bajo una transformación lineal?

Si la transformación está dada por la matriz M, las direcciones invariantes están dadas por los vectores $V \neq 0$ tales que $MV=\lambda V$ para algún escalar λ, lo que equivale a que $(M-\lambda I)V=0$.

.

¿Como podemos hallar todas las direcciones invariantes bajo una transformación lineal?

Si la transformación está dada por la matriz M, las direcciones invariantes están dadas por los vectores $V \neq 0$ tales que $MV = \lambda V$ para algún escalar λ, lo que equivale a que $(M - \lambda I)V = 0$.

¿Como podemos hallar todos los valores posibles de λ?

¿Como podemos hallar todas las direcciones invariantes bajo una transformación lineal?

Si la transformación está dada por la matriz M, las direcciones invariantes están dadas por los vectores $V \neq 0$ tales que $MV=\lambda V$ para algún escalar λ, lo que equivale a que $(M-\lambda I)V=0$.

¿Como podemos hallar todos los valores posibles de λ?

Si la función lineal dada por la matriz $(M-\lambda I)$ manda un vector $V \neq 0$ al vector 0, el determinante de la matriz $M-\lambda I$ debe ser 0.

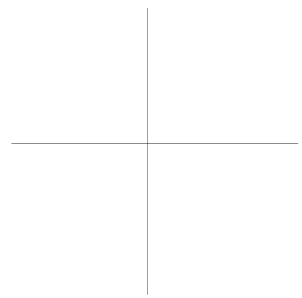
Recíprocamente, si el determinante de la matriz $M-\lambda I$ es cero, entonces la función $F(V) = (M-\lambda I)V$ no es inyectiva y debe existir un vector $V \neq 0$ que vaya a dar al vector 0, así que $MV=\lambda V$.

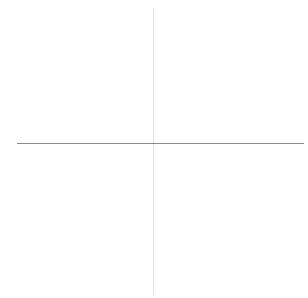
Si $MV=\lambda V$ para algún escalar λ, diremos que λ es un **valor propio** de la matriz M y que V es un **vector propio** de M.

Si $MV=\lambda V$ para algún escalar λ, diremos que λ es un **valor propio** de la matriz M y que V es un **vector propio** de M.

Ejemplo:

Si $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



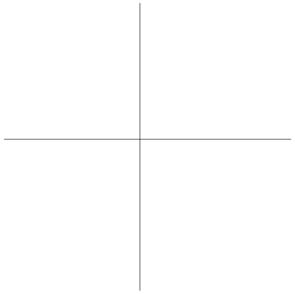


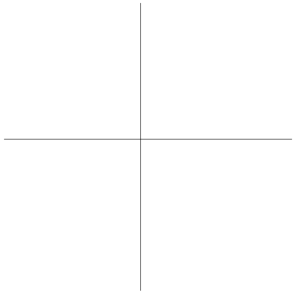
3 es un valor propio de M y (1,0) es un vector propio.

Si $MV=\lambda V$ para algún escalar λ, diremos que λ es un **valor propio** de la matriz M y que V es un **vector propio** de M.

Ejemplo:

Si $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$





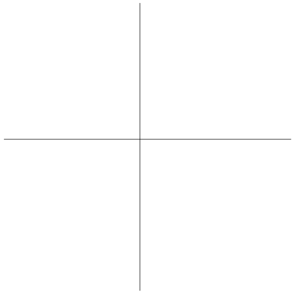
¿Como hallamos todos los valores propios de M?

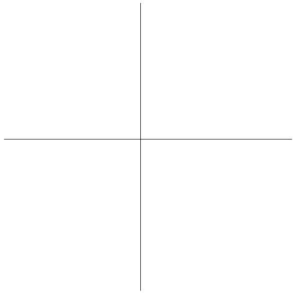
Buscamos los valores de λ tales que $\det(M-\lambda I)=0$.

Si $MV=\lambda V$ para algún escalar λ, diremos que λ es un **valor propio** de la matriz M y que V es un **vector propio** de M.

Ejemplo:

Si $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$





¿Como hallamos todos los valores propios de M?

Buscamos los valores de λ tales que $\det(M-\lambda I)=0$.

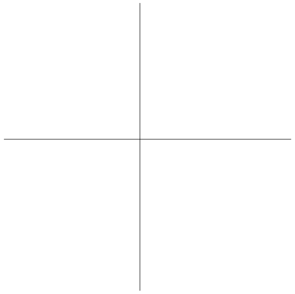
$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ $\qquad \det(M-\lambda I) = (3-\lambda)(1-\lambda) = 0$

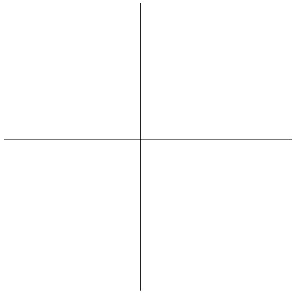
Así que los valores propios son $\lambda=3$, $\lambda=1$

Si $MV=\lambda V$ para algún escalar λ, diremos que λ es un **valor propio** de la matriz M y que V es un **vector propio** de M.

Ejemplo:

Si $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$





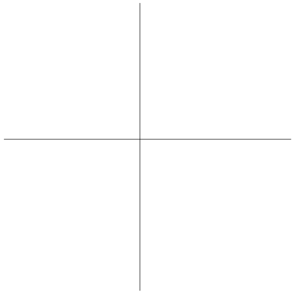
¿Y como hallamos los vectores propios?

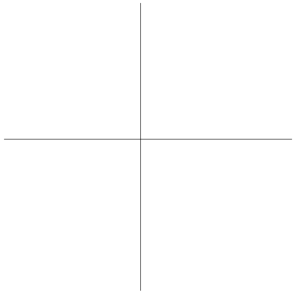
Para $\lambda=1$ buscamos un vector V distinto de 0 tal que $MV=1V$, es decir $(M-1I)V=0$

Si $MV=\lambda V$ para algún escalar λ, diremos que λ es un **valor propio** de la matriz M y que V es un **vector propio** de M.

Ejemplo:

Si $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$





¿Y como hallamos los vectores propios?

Para $\lambda=1$ buscamos un vector V distinto de 0 tal que $MV=1V$, es decir $(M-1I)V=0$

$V=(x,y)$

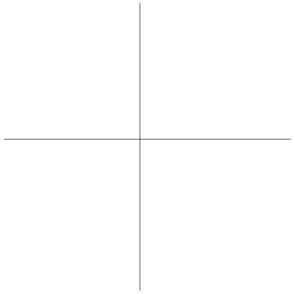
$$(M-1I)V = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

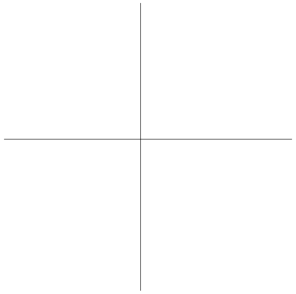
Así que $(x,y)=(1,-1)$ es un vector propio con valor propio 1.

Si $MV=\lambda V$ para algún escalar λ, diremos que λ es un **valor propio** de la matriz M y que V es un **vector propio** de M.

Ejemplo:

Si $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



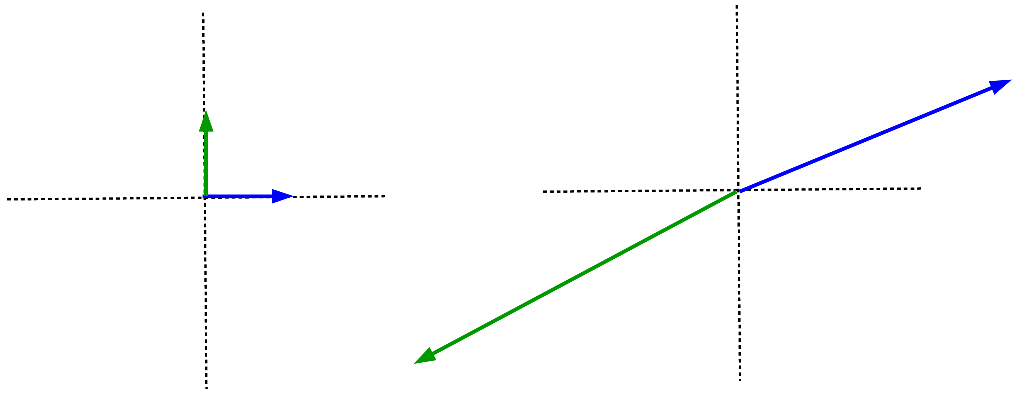


¿Y como hallamos los vectores propios?

Ahora podemos checar que el vector propio (1,-1) da una dirección invariante:

$$MV = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

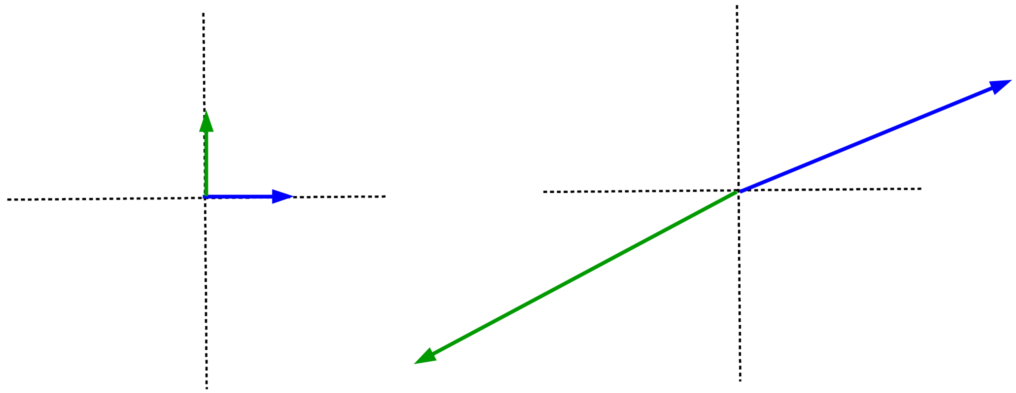
Ejemplo. ¿Cuales son las direcciones invariantes la transformación lineal T del plano que manda (1,0) a (4,2) y (0,1) a (-5,-3)?



Ejemplo. ¿Cuales son las direcciones invariantes la transformación lineal T del plano que manda (1,0) a (4,2) y (0,1) a (-5,-3)?

La transformación T esta dada por la matriz

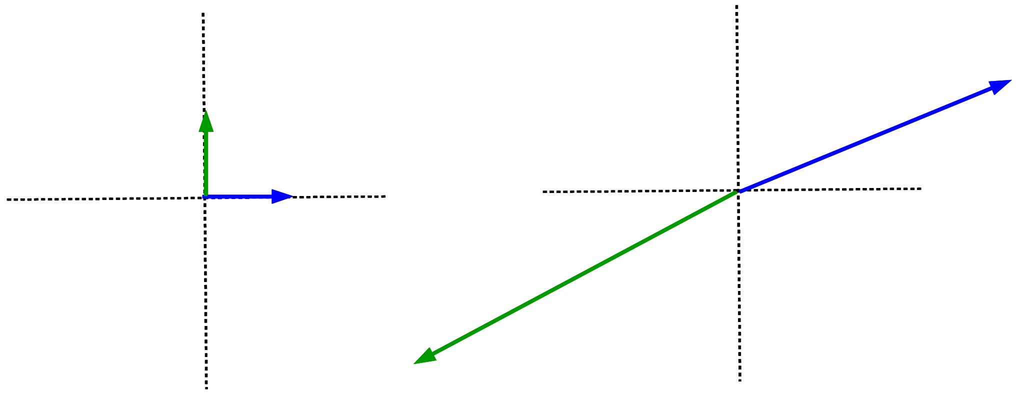
$$M = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$



Ejemplo. ¿Cuales son las direcciones invariantes la transformación lineal T del plano que manda (1,0) a (4,2) y (0,1) a (-5,-3)?

La transformación T esta dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$



$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(M-\lambda I) = (4-\lambda)(-3-\lambda)+10=(\lambda-2)(\lambda+1)$$

Así que los **valores propios** son $\lambda = 2$ y $\lambda = -1$.

Debe haber una dirección invariante en la que los vectores se estiran al doble y otra en la que no cambian de tamaño, pero sí de sentido.

Para $\lambda = -1$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad M-\lambda I = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Buscamos un vector V tal que TV=-V, es decir (M+I)V=0

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x-5y \\ 2x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = -1$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad M-\lambda I = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

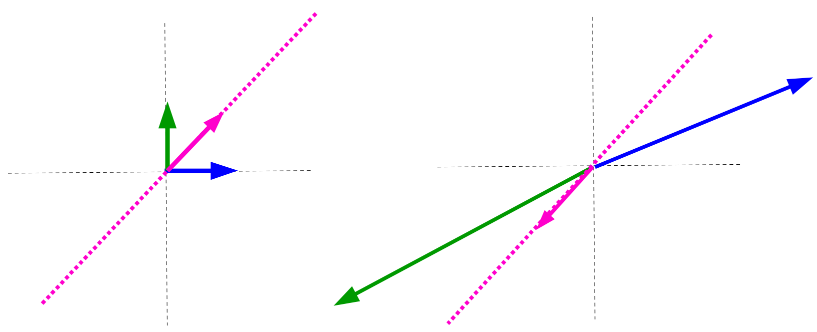
Buscamos un vector V tal que TV=-V, es decir (M+I)V=0

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x-5y \\ 2x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podemos tomar (x,y) = (1,1).

Ahora podemos comprobar que (1,1) es un vector propio de la matriz M:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Así que los vectores en la dirección de (1,1) se multiplican por -1.

Para $\lambda = 2$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad M-\lambda I = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Buscamos un vector V tal que TV=2V, es decir (M-2I)V=0

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-5y \\ 2x-5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 2$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad M-\lambda I = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

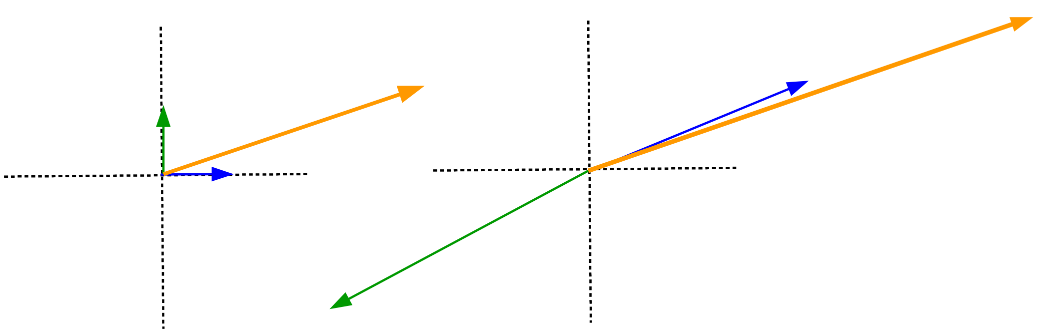
Buscamos un vector V tal que TV=2V, es decir (M-2I)V=0

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-5y \\ 2x-5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podemos tomar (x,y) = (5,2)

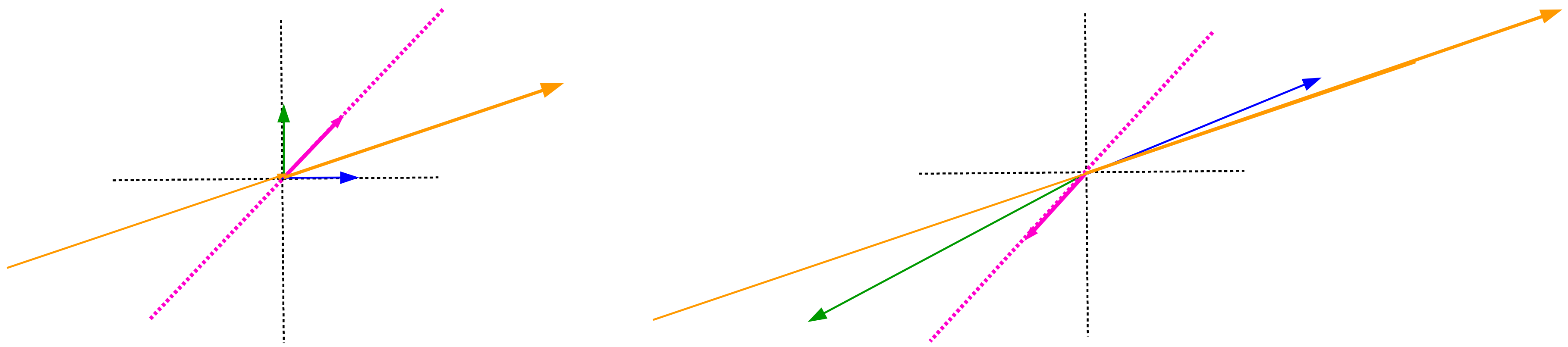
Ahora podemos comprobar que (5,2) es un vector propio de la matriz M:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$



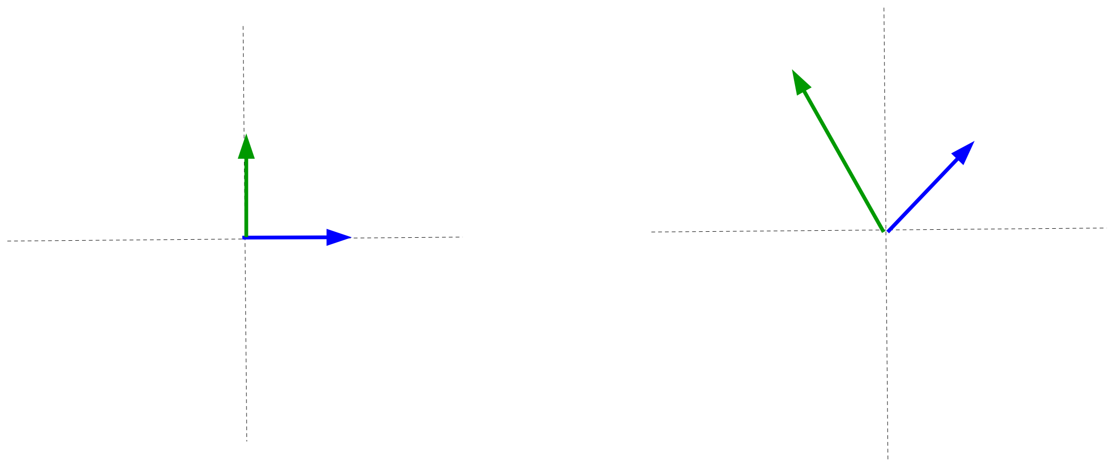
Así que los vectores en la dirección de (5,2) se multiplican por 2.

Conclusión: la transformación lineal T del plano que manda (1,0) a (4,2) y (0,1) a (-5,-3)



tiene 2 direcciones invariantes, los **vectores propios** son (1,1) y (5,2) con **valores propios** $\lambda = -1$ y $\lambda = 2$

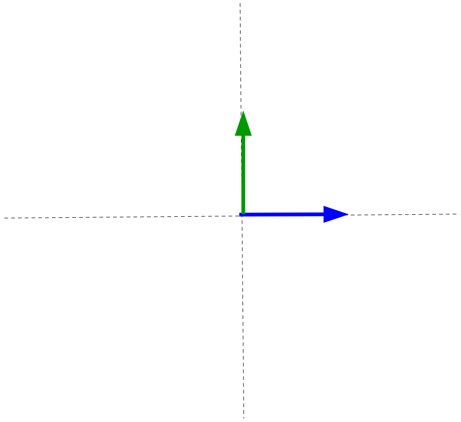
Ejemplo. ¿Cuales son las direcciones invariantes de la transformación lineal T que manda (1,0) a (1,1) y (0,1) a (-1,2)?

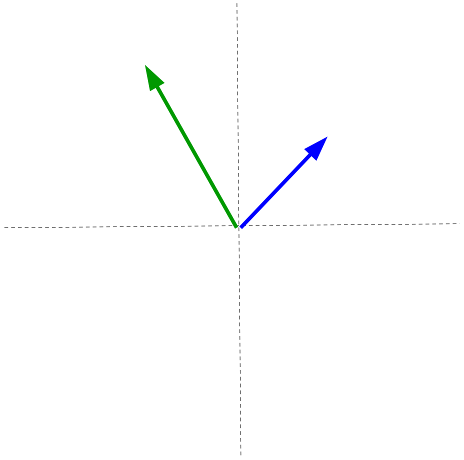


Ejemplo. ¿Cuales son las direcciones invariantes de la transformación lineal T que manda (1,0) a (1,1) y (0,1) a (-1,2)?

T está dada por la matriz

M =

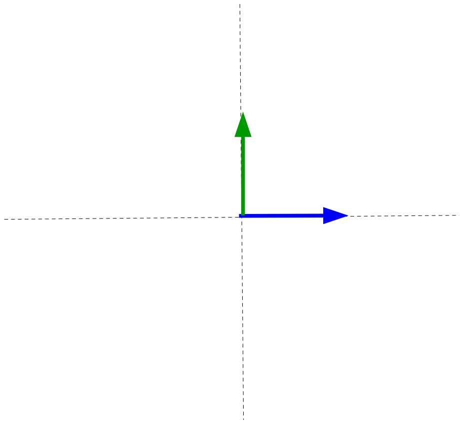


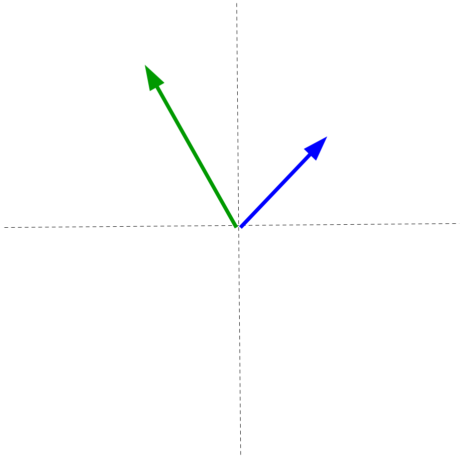


Ejemplo. ¿Cuales son las direcciones invariantes de la transformación lineal T que manda (1,0) a (1,1) y (0,1) a (-1,2)?

T está dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



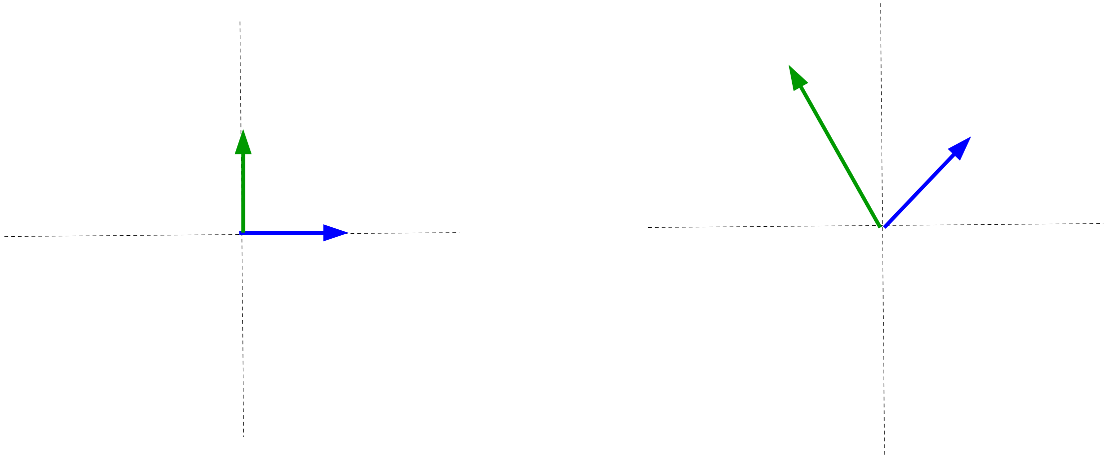


$$M-\lambda I =$$

Ejemplo. ¿Cuales son las direcciones invariantes de la transformación lineal T que manda (1,0) a (1,1) y (0,1) a (-1,2)?

T está dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



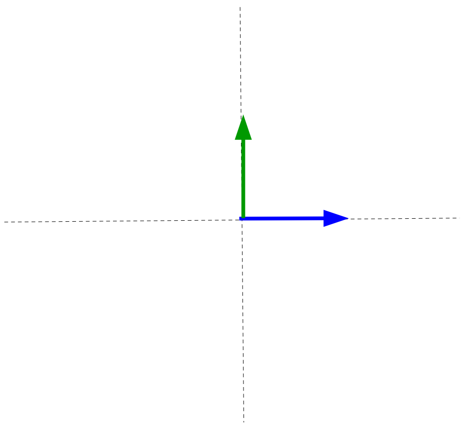
$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

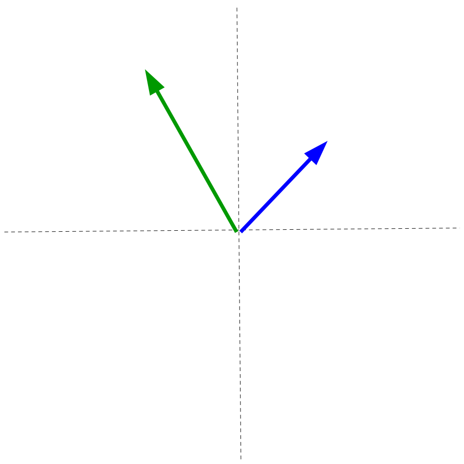
$\det(M-\lambda I) =$

Ejemplo. ¿Cuales son las direcciones invariantes de la transformación lineal T que manda (1,0) a (1,1) y (0,1) a (-1,2)?

T está dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$





$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

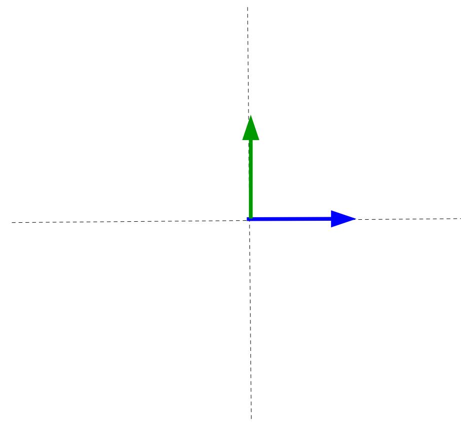
$\det(M-\lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda)+1 = \lambda^2-3\lambda+3$

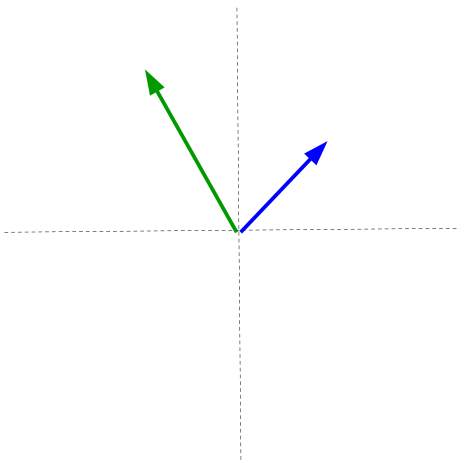
Este polinomio tiene raíces $\lambda =$

Ejemplo. ¿Cuales son las direcciones invariantes de la transformación lineal T que manda (1,0) a (1,1) y (0,1) a (-1,2)?

T está dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$





$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$\det(M-\lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda)+1 = \lambda^2-3\lambda+3$

Este polinomio no tiene raíces reales, ya que $\lambda = \dfrac{3\pm\sqrt{9-12}}{2}$

así que T no deja **ninguna** dirección invariante.

¿Cuantas direcciones invariantes pueden tener las transformaciones lineales del plano?

Teorema. Cada transformación lineal del plano deja 0, 1, 2 o todas las direcciones invariantes.

Teorema. Cada transformación lineal del plano deja 0, 1, 2 o todas las direcciones invariantes.

Demostración. Las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz M están dadas por los vectores $V \neq 0$ tal que $MV=\lambda V$ para algún número real λ.

Los valores posibles de λ son las raíces de $\det(M-\lambda I)=0$, y como $\det(M-\lambda I)$ es un polinomio de grado 2 en λ, tiene 0, 1 o 2 raíces reales.

Teorema. Cada transformación lineal del plano deja 0, 1, 2 o todas las direcciones invariantes.

Demostración. Las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz M están dadas por los vectores $V \neq 0$ tal que $MV = \lambda V$ para algún número real λ.

Los valores posibles de λ son las raíces de $\det(M-\lambda I)=0$, y como $\det(M-\lambda I)$ es un polinomio de grado 2 en λ, tiene 0, 1 o 2 raíces reales.

Si la transformación lineal estira a dos vectores no paralelos V_1 y V_2 por el mismo factor λ, entonces estira a todas las combinaciones lineales de V_1 y V_2 por ese mismo factor, así que (por la semejanza de triángulos) todas las direcciones en el plano deben ser invariantes.

Teorema. Cada transformación lineal del plano deja 0, 1, 2 o todas las direcciones invariantes.

Demostración. Las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz M están dadas por los vectores $V \neq 0$ tal que $MV = \lambda V$ para algún número real λ.

Los valores posibles de λ son las raíces de $\det(M-\lambda I)=0$, y como $\det(M-\lambda I)$ es un polinomio de grado 2 en λ, tiene 0, 1 o 2 raíces reales.

Si para cada λ hay una sola dirección en la que la transformación estira por el factor λ, entonces como hay a lo mas 2 valores de λ, debe haber a lo mas 2 direcciones invariantes. •

Corolario. Las isometrías del plano que fijan algún punto son rotaciones y reflexiones.

Demostración ?

Corolario. Las isometrías del plano que fijan algún punto son rotaciones y reflexiones.

Demostración. Podemos elegir las coordenadas en el plano de modo que un punto fijo sea el origen. Las isometrías del plano que fijan al origen son transformaciones lineales que envían vectores unitarios ortogonales a vectores unitarios ortogonales.

Corolario. Las isometrías del plano que fijan algún punto son rotaciones y reflexiones.

Demostración. Las isometrías de plano que fijan el origen están dadas por matrices ortogonales, y solo hay de dos tipos:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \qquad \text{donde } a^2+b^2=1$$

(ya que solo existen 2 vectores unitarios perpendiculares a un vector unitario dado).

Corolario. Las isometrías del plano que fijan algún punto son rotaciones y reflexiones.

Demostración. Las isometrías de plano que fijan el origen están dadas por matrices ortogonales, y solo hay de dos tipos:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \qquad \text{donde } a^2+b^2=1$$

Para las del primer tipo

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ -b & a-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det M-\lambda I &= (a-\lambda)(a-\lambda)+b^2 \\ &= \lambda^2-2a\lambda+a^2+b^2 \end{aligned}$$

Corolario. Las isometrías del plano que fijan algún punto son rotaciones y reflexiones.

Demostración. Las isometrías de plano que fijan el origen están dadas por matrices ortogonales, y solo hay de dos tipos:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad o \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \qquad \text{donde } a^2+b^2=1$$

Para las del primer tipo

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ -b & a-\lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \det M-\lambda I &= (a-\lambda)(a-\lambda)+b^2 \\ &= \lambda^2-2a\lambda+a^2+b^2 \end{aligned}$$

las raíces de este polinomio son $\lambda = \dfrac{2a\pm\sqrt{-4b^2}}{2}$ que no son reales si $b\neq 0$, y por lo tanto estas isometrías no dejan direcciones invariantes: son las rotaciones (si $b=0$ entonces $a=1$ o -1, que corresponden a la identidad y a la rotación de 180.

Corolario. Las isometrías del plano que fijan algún punto son rotaciones y reflexiones.

Demostración. Las isometrías de plano que fijan el origen están dadas por matrices ortogonales, y solo hay de dos tipos:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \qquad \text{donde } a^2+b^2=1$$

Para las del segundo tipo

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & -a-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det M-\lambda I &= (a-\lambda)(-a-\lambda)-b^2 \\ &= \lambda^2-a^2-b^2 \\ &= \lambda^2-1 \end{aligned}$$

Corolario. Las isometrías del plano que fijan algún punto son rotaciones y reflexiones.

Demostración. Las isometrías de plano que fijan el origen están dadas por matrices ortogonales, y solo hay de dos tipos:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \qquad \text{donde } a^2+b^2=1$$

Para las del segundo tipo

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & -a-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det M-\lambda I &= (a-\lambda)(-a-\lambda)-b^2 \\ &= \lambda^2-a^2-b^2 \\ &= \lambda^2-1 \end{aligned}$$

Las raíces son $\lambda=1$ y $\lambda=-1$, así que esta isometría deja dos direcciones invariantes, en una ($\lambda=1$) los vectores quedan fijos y en la otra ($\lambda=-1$) cambian de sentido: estas isometrías deben ser las reflexiones en rectas. Para ver que son reflexiones son falta mostrar que los 2 vectores propios son perpendiculares.

Ejercicio. Muestra que esta matriz corresponde a la reflexión en una recta, y di en cual.

$$M = \begin{pmatrix} {}^{3}/_{5} & {}^{4}/_{5} \\ {}^{4}/_{5} & -{}^{3}/_{5} \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Muestra que esta matriz corresponde a la reflexión en una recta, y di en cual.

$$M = \begin{pmatrix} {}^{3}/_{5} & {}^{4}/_{5} \\ {}^{4}/_{5} & -{}^{3}/_{5} \end{pmatrix}$$

Es una matriz ortogonal, así que corresponde a una isometría.

Ejercicio. Muestra que esta matriz corresponde a la reflexión en una recta, y di en cual.

$$M = \begin{pmatrix} {}^{3}/_{5} & {}^{4}/_{5} \\ {}^{4}/_{5} & -{}^{3}/_{5} \end{pmatrix}$$

Es una matriz ortogonal, así que corresponde a una isometría.

Para ver que es una reflexión hay que ver que hay 2 direcciones invariantes ortogonales, una con valor propio 1 y otra con valor propio -1.

Ejercicio. Muestra que esta matriz corresponde a la reflexión en una recta, y di en cual.

$$M = \begin{pmatrix} {}^3/_5 & {}^4/_5 \\ {}^4/_5 & -{}^3/_5 \end{pmatrix}$$

Es una matriz ortogonal, así que corresponde a una isometría.

Para ver que es una reflexión hay que ver que hay 2 direcciones invariantes ortogonales, una con valor propio 1 y otra con valor propio -1.

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} {}^3/_5 - \lambda & {}^4/_5 \\ {}^4/_5 & -{}^3/_5 - \lambda \end{pmatrix} \qquad \det(M-\lambda I) = ({}^3/_5-\lambda)(-{}^3/_5-\lambda)-({}^4/_5)^2 = \lambda^2-1$$

Ejercicio. Muestra que esta matriz corresponde a la reflexión en una recta, y di en cual.

$$M = \begin{pmatrix} {}^3/_5 & {}^4/_5 \\ {}^4/_5 & -{}^3/_5 \end{pmatrix}$$

Es una matriz ortogonal, así que corresponde a una isometría.

Para ver que es una reflexión hay que ver que hay 2 direcciones invariantes ortogonales, una con valor propio 1 y otra con valor propio -1.

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} {}^3/_5 - \lambda & {}^4/_5 \\ {}^4/_5 & -{}^3/_5 - \lambda \end{pmatrix} \qquad \det(M-\lambda I) = ({}^3/_5-\lambda)(-{}^3/_5-\lambda)-({}^4/_5)^2 = \lambda^2-1$$

Así que debe ser una reflexión, en la dirección correspondiente a $\lambda=1$

$$\begin{pmatrix} -{}^2/_5 & {}^4/_5 \\ {}^4/_5 & -{}^8/_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -{}^2/_5 x + {}^4/_5 y \\ {}^4/_5 x - {}^8/_5 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Muestra que esta matriz corresponde a la reflexión en una recta, y di en cual.

$$M = \begin{pmatrix} {}^{3}/_{5} & {}^{4}/_{5} \\ {}^{4}/_{5} & -{}^{3}/_{5} \end{pmatrix}$$

Es una matriz ortogonal, así que corresponde a una isometría.

Para ver que es una reflexión hay que ver que hay 2 direcciones invariantes ortogonales, una con valor propio 1 y otra con valor propio -1.

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} {}^{3}/_{5} - \lambda & {}^{4}/_{5} \\ {}^{4}/_{5} & -{}^{3}/_{5} - \lambda \end{pmatrix} \qquad \det(M-\lambda I) = ({}^{3}/_{5}-\lambda)(-{}^{3}/_{5}-\lambda)-({}^{4}/_{5})^{2} = \lambda^{2}-1$$

Así que debe ser una reflexión, en la dirección correspondiente a $\lambda=1$

$$\begin{pmatrix} -{}^{2}/_{5} & {}^{4}/_{5} \\ {}^{4}/_{5} & -{}^{8}/_{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -{}^{2}/_{5}x + {}^{4}/_{5}y \\ {}^{4}/_{5}x - {}^{8}/_{5}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una solución es $(x,y) = (2,1)$, que da la dirección de la recta de reflexión.

Direcciones invariantes (en el espacio)

Cada transformación afín manda lineas paralelas en lineas paralelas, así que envía cada dirección a alguna dirección.

Si una dirección no cambia al aplicarle la transformación decimos que es una **dirección invariante**.

Cada transformación afín manda lineas paralelas en lineas paralelas, así que envía cada dirección a alguna dirección.

Si una dirección no cambia al aplicarle la transformación T decimos que esa es una **dirección invariante** de T.

Ejemplos en el espacio.

- Las traslaciones

- La reflexión del espacio en un plano

- Una rotación del espacio alrededor de una recta

Cada transformación afín manda lineas paralelas en lineas paralelas, así que envía cada dirección a alguna dirección.

Si una dirección no cambia al aplicarle la transformación T decimos que esa es una **dirección invariante** de T.

Ejemplos en el espacio.

- Las traslaciones dejan a todas las direcciones del espacio invariantes. Como cada transformación afín es composición de una transformación lineal con una traslación, basta fijarse en las transformaciones lineales.

- La reflexión del espacio en un plano P deja a todas las direcciones en P invariantes. La dirección perpendicular a P también es invariante, aunque su sentido se invierte.

- Una rotación alrededor de una recta R deja a la dirección de R invariante, y no deja otras direcciones invariantes a menos que el ángulo de rotación sea 180°, en este caso todas las direcciones perpendiculares a R son invariantes.

Igual que en el plano, si una transformación lineal del espacio está dada por la matriz M, sus direcciones invariantes están dadas por los vectores $V \neq 0$ tales que $MV=\lambda V$ para algún λ.

Si $MV=\lambda V$ decimos que λ es un valor propio y V es un vector propio de la matriz M.

¿Como podemos hallar los valores y vectores propios de una matriz?

$MV=\lambda V$ para algún vector V y un escalar λ si y sólo si $(M-\lambda I)V=0$.

Si $(M-\lambda I)V=0$ para un vector $V\neq 0$, la función lineal dada por la matriz $M-\lambda I$ no es inyectiva y su determinante debe ser 0.

¿Como podemos hallar los valores y vectores propios de una matriz?

$MV=\lambda V$ para algún vector V y un escalar λ si y sólo si $(M-\lambda I)V=0$.

Si $(M-\lambda I)V=0$ para un vector $V\neq 0$, la función lineal dada por la matriz $M-\lambda I$ no es inyectiva y su determinante debe ser 0.

Reciprocamente, si el determinante de $M-\lambda I$ es cero, la función lineal dada por $M-\lambda I$ no es inyectiva y debe existir un vector $V\neq 0$ que vaya a dar al vector 0. Como $(M-\lambda I)V=0$ entonces $MV=\lambda V$ asi que V es un vector propio de M.

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \det(M-\lambda I) = -\lambda^3-1$$

cuya única raíz real es $\lambda=-1$, este es el único valor propio de la matriz.

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \det(M-\lambda I) = -\lambda^3-1$$

cuya única raíz real es $\lambda=-1$, este es el único valor propio de la matriz.

Ahora buscamos un vector propio.

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \det(M-\lambda I) = -\lambda^3-1$$

cuya única raíz real es $\lambda=-1$, este es el único valor propio de la matriz.

Ahora buscamos un vector propio. Si $\lambda=-1$

$$M-\lambda I \quad = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \det(M-\lambda I) = -\lambda^3-1$$

cuya única raíz real es $\lambda=-1$, este es el único valor propio de la matriz.

Ahora buscamos un vector propio. Si $\lambda=-1$ y $V=(x,y,z)$

$$(M-\lambda I)V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ x+y \\ -y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \det(M-\lambda I) = -\lambda^3-1$$

cuya única raíz real es $\lambda=-1$, este es el único valor propio de la matriz.

Ahora buscamos un vector propio. Si $\lambda=-1$ y $V=(x,y,z)$

$$(M-\lambda I)V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ x+y \\ -y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto sucede si $z=-x$, $y=-x$, así que un vector propio es $V=(1,-1,-1)$

y la única recta invariante es $-x=y=z$.

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \det(M-\lambda I) =$$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$\det(M-\lambda I) = -\lambda^3+3\lambda+2$ sus raíces son $\lambda=-1$, $\lambda=2$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$\det(M-\lambda I) = -\lambda^3+3\lambda+2$ sus raíces son $\lambda=-1$, $\lambda=2$

Busquemos ahora los vectores propios correspondientes a estos valores propios.

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \det(M-\lambda I) = -\lambda^3+3\lambda+2 \qquad \text{sus raíces son } \lambda=-1,\ \lambda=2$$

Busquemos ahora los vectores propios correspondientes a estos valores propios.

Para $\lambda=-1$

$$(M-\lambda I) = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \det(M-\lambda I) = -\lambda^3+3\lambda+2 \qquad \text{sus raíces son } \lambda=-1,\ \lambda=2$$

Busquemos ahora los vectores propios correspondientes a estos valores propios.

Para $\lambda=-1$

$$(M-\lambda I)V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \det(M-\lambda I) = -\lambda^3+3\lambda+2 \qquad \text{sus raíces son } \lambda=-1,\ \lambda=2$$

Busquemos ahora los vectores propios correspondientes a estos valores propios.

Para $\lambda=-1$

$$(M-\lambda I)V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La única condición es que $x+y+z=0$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \det(M-\lambda I) = -\lambda^3+3\lambda+2 \qquad \text{sus raíces son } \lambda=-1,\ \lambda=2$$

Busquemos ahora los vectores propios correspondientes a estos valores propios.

Para $\lambda=-1$

$$(M-\lambda I)V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La única condición es que $x+y+z=0$, y esto es un plano donde todas las direcciones son invariantes y los vectores no cambian de tamaño sino solo de sentido, así que en ese plano la transformación es una rotación de 90°.

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$\det(M-\lambda I) = -\lambda^3+3\lambda+2$ sus raíces son $\lambda=-1$, $\lambda=2$

Busquemos ahora los vectores propios correspondientes a estos valores propios.

Para $\lambda=2$

$$(M-\lambda I) = \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \det(M-\lambda I) = -\lambda^3+3\lambda+2 \qquad \text{sus raíces son } \lambda=-1,\ \lambda=2$$

Busquemos ahora los vectores propios correspondientes a estos valores propios.

Para $\lambda=2$

$$(M-\lambda I)V = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+y+z \\ x-2y+z \\ x+y-2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$ $\det(M-\lambda I) = -\lambda^3+3\lambda+2$ sus raíces son $\lambda=-1$, $\lambda=2$

Busquemos ahora los vectores propios correspondientes a estos valores propios.

Para $\lambda=2$

$$(M-\lambda I)V = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2x+y+z \\ x-2y+z \\ x+y-2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Esto sucede si $-3x+3y=0$, $-3y+3z=0$ o sea si $x=y=z$

Ejercicio. Encuentra las direcciones invariantes de la transformación dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \det(M-\lambda I) = -\lambda^3+3\lambda+2 \qquad \text{sus raíces son } \lambda=-1,\ \lambda=2$$

Busquemos ahora los vectores propios correspondientes a estos valores propios.

Para $\lambda=2$

$$(M-\lambda I)V = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+y+z \\ x-2y+z \\ x+y-2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto sucede si $-3x+3y=0$, $-3y+3z=0$ o sea si $x=y=z$

y esta es una recta invariante, donde los vectores se alargan al doble.

Hay muchas transformaciones lineales del plano que cambian las direcciones de todas las rectas (no dejan direcciones invariantes).

Hay muchas transformaciones lineales del plano que cambian las direcciones de todas las rectas (no dejan direcciones invariantes).

¿Que pasará con las transformaciones lineales del espacio?

¿podrán cambiar todas las direcciones?

Teorema. Cada transformación lineal del espacio deja al menos una dirección invariante.

Teorema. Cada transformación lineal del espacio deja 1, 2, 3 o una infinidad de direcciones invariantes.

Demostración ?

Teorema. Cada transformación lineal del espacio deja 1, 2, 3 o una infinidad de direcciones invariantes.

Demostración. Para cada matriz M de 3x3, $\det(M-\lambda I)$ es un polinomio real de tercer grado, así que debe tener al menos una raíz real λ, esta da un valor propio y a esta corresponde al menos un vector propio, que da una dirección invariante.

Teorema. Cada transformación lineal del espacio deja 1, 2, 3 o una infinidad de direcciones invariantes.

Demostración. Para cada matriz M de 3x3, $\det(M-\lambda I)$ es un polinomio real de tercer grado, así que debe tener al menos una raíz real λ, esta da un valor propio y a esta corresponde al menos un vector propio, que da una dirección invariante.

Si hay dos vectores no paralelos V_1 y V_2 que se estiran por el mismo factor λ , entonces todas las combinaciones lineales de V_1 y V_2 se estiran por ese mismo factor, así que todas las direcciones del plano generado por V_1 y V_2 son invariantes.

Si para cada λ solo hay una dirección que se estira por el factor λ, entonces como hay a lo mas 3 valores de λ debe haber a lo mas 3 direcciones invariantes. •

Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y reflexiones con rotación (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).

Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y reflexiones con rotación (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).

Demostración. Podemos elegir las coordenadas para que el origen sea un punto fijo.

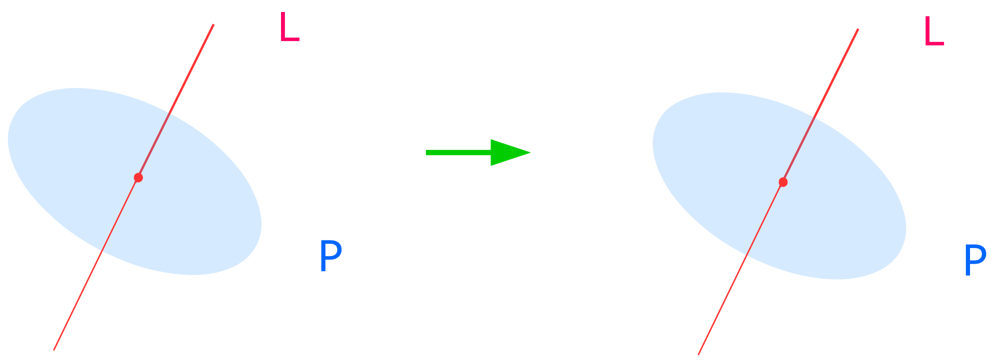
Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y reflexiones con rotación (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).

Demostración. Si la isometría I fija el origen entonces es lineal, y como todas las transformaciones lineales del espacio deben dejar al menos una dirección invariante.

Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y reflexiones con rotación (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).

Demostración. Si la isometría I fija el origen entonces es lineal, y como todas las transformaciones lineales del espacio deben dejar al menos una dirección invariante.

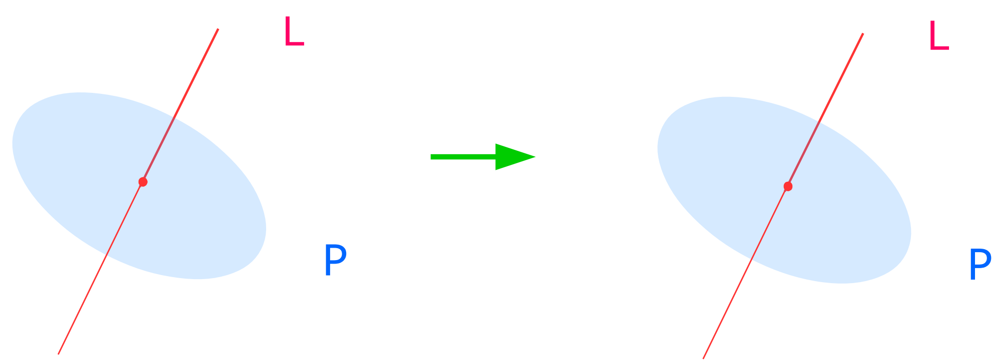
Así que I debe mandar a alguna línea L que pasa por el origen sobre si misma. Como ademas I debe preservar ángulos, I debe mandar al plano P que pasa por el origen y es perpendicular a L sobre si mismo.



Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y reflexiones con rotación (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).

Demostración. Si la isometría I fija el origen entonces es lineal, y como todas las transformaciones lineales del espacio deben dejar al menos una dirección invariante.

Así que I debe mandar a alguna línea L que pasa por el origen sobre si misma. Como ademas I debe preservar ángulos, I debe mandar al plano P que pasa por el origen y es perpendicular a L sobre si mismo.



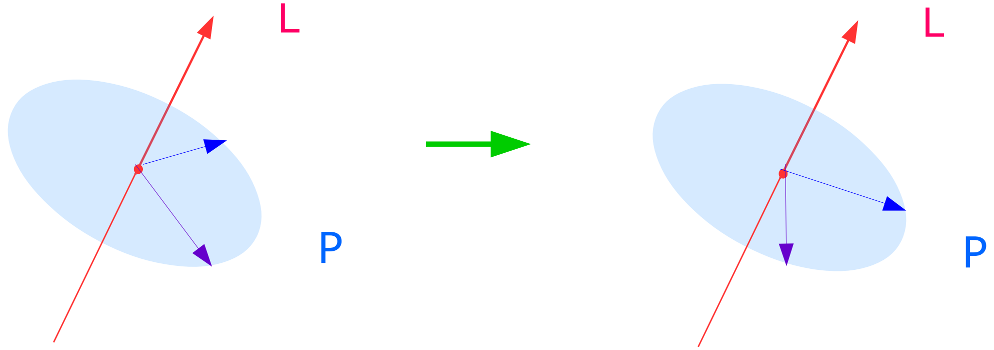
La isometría I puede preservar o invertir la orientación de la linea L.

La isometría I puede preservar o invertir la orientación del plano P, y actúa en P como una rotación o como una reflexión.

Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y reflexiones con rotación (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).

Demostración.

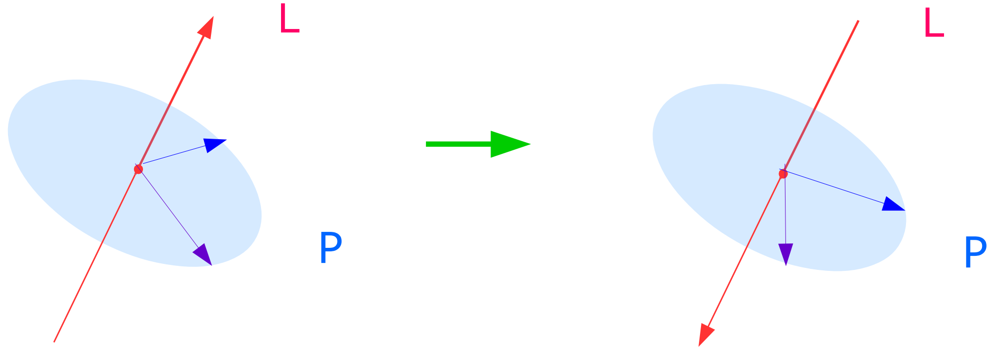
Caso 1. Si I preserva la orientación en L y preserva la orientación en P entonces I es una rotación alrededor de L.



Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y reflexiones con rotación (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).

Demostración.

Caso 2. Si I invierte la orientación en L y preserva la orientación en P, entonces I se obtiene rotando alrededor de L y reflejando en P (es una rotación con reflexión).

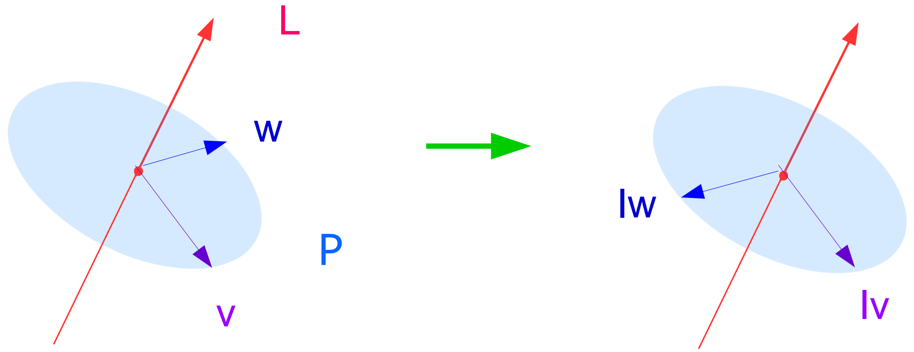


Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y reflexiones con rotación (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).

Demostración.

Caso 3. . Si I preserva la orientación de L e invierte la orientación en P, entonces hay un vector v en P tal que Iv=v y otro vector w en P perpendicular a v tal que Iw=-w.

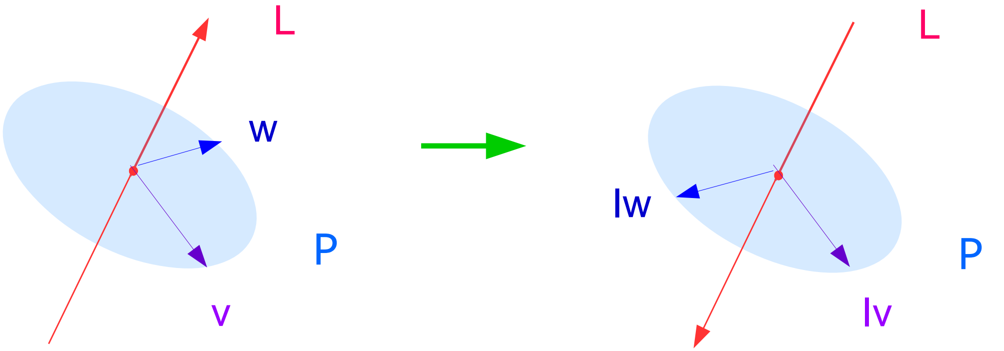
Como I fija a L y v e invierte a w, I es una reflexión en el plano generado por L y v.



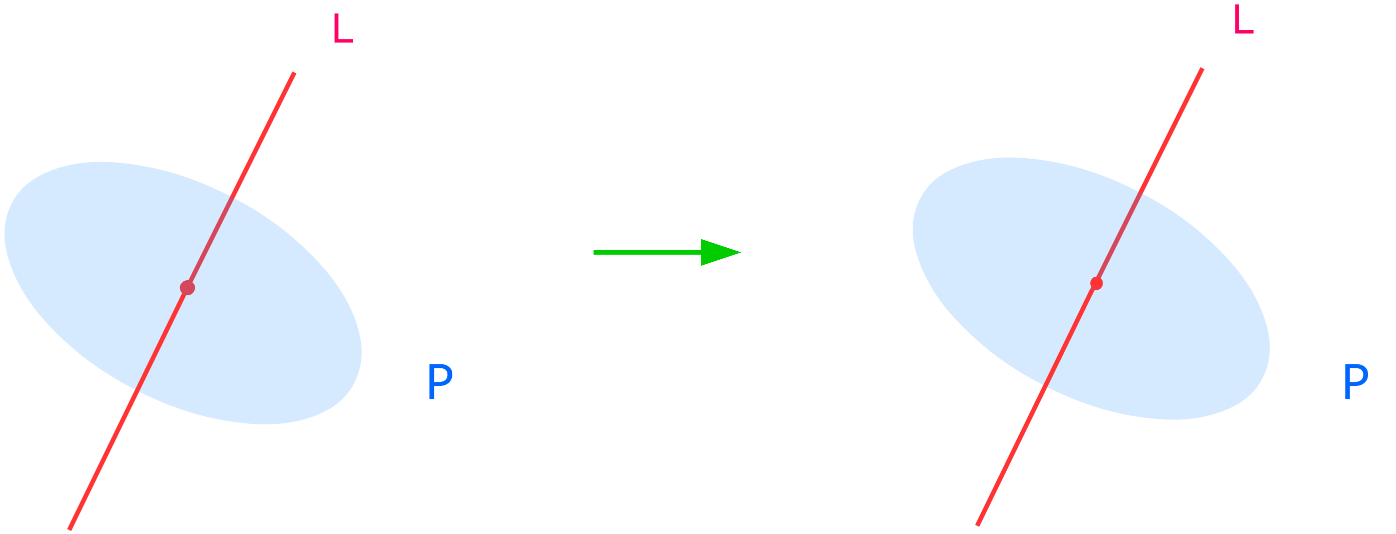
Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y reflexiones con rotación (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).

Demostración.

Caso 4. Si I invierte la orientación en L y también invierte la orientación en P, entonces I fija a v e invierte a L y a w, así que I es una rotación de 180° alrededor de la recta generada por v.



Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y rotaciones con reflexión (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).



¿Que distingue a estas transformaciones?

- Rotaciones
- Reflexiones
- Rotaciones con reflexión

Ejemplo. ¿A que isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿A que isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} {}^{1}/_{3} & {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & {}^{1}/_{3} & {}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} & -{}^{1}/_{3} \end{pmatrix}$$

Como es una matriz ortogonal sus valores propios solo pueden ser $\lambda=1$ o $\lambda=-1$.
(pero no sabemos si ambos sean)

Ejemplo. ¿A que isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} {}^{1}/_{3} & {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & {}^{1}/_{3} & {}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} & -{}^{1}/_{3} \end{pmatrix}$$

Para $\lambda=1$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿A que isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} ^1/_3 & ^2/_3 & -^2/_3 \\ ^2/_3 & ^1/_3 & ^2/_3 \\ ^2/_3 & -^2/_3 & -^1/_3 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda=1$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -^2/_3 & ^2/_3 & -^2/_3 \\ ^2/_3 & -^2/_3 & ^2/_3 \\ ^2/_3 & -^2/_3 & -^4/_3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿A que isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} {}^{1}/_{3} & {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & {}^{1}/_{3} & {}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} & -{}^{1}/_{3} \end{pmatrix}$$

Para $\lambda=1$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -{}^{2}/_{3} & {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} & {}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} & -{}^{4}/_{3} \end{pmatrix}$$

Los vectores propios deben cumplir:

$$-{}^{2}/_{3}\, x + {}^{2}/_{3}\, y - {}^{2}/_{3}\, z = 0$$

$${}^{2}/_{3}\, x - {}^{2}/_{3}\, y - {}^{4}/_{3}\, z = 0$$

Ejemplo. ¿A que isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} {}^{1}/_{3} & {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & {}^{1}/_{3} & {}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} & -{}^{1}/_{3} \end{pmatrix}$$

Para λ=1

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -{}^{2}/_{3} & {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} & {}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} & -{}^{4}/_{3} \end{pmatrix}$$

Los vectores propios deben cumplir:

$$\begin{array}{llll} -{}^{2}/_{3}\,x + {}^{2}/_{3}\,y - {}^{2}/_{3}\,z = 0 & \quad -{}^{6}/_{3}\,z = 0 & \quad z = 0 & \\ {}^{2}/_{3}\,x - {}^{2}/_{3}\,y - {}^{4}/_{3}\,z = 0 & \quad {}^{4}/_{3}\,x - {}^{4}/_{3}\,y - {}^{2}/_{3}\,z = 0 & & \quad x = y \end{array}$$

Así que los vectores propios son los múltiplos de (1,1,0)

Ejemplo. ¿A que isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} {}^{1}/_{3} & {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & {}^{1}/_{3} & {}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} & -{}^{1}/_{3} \end{pmatrix}$$

Para $\lambda=-1$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿A que isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda=-1$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿A que isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} {}^{1}/_{3} & {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & {}^{1}/_{3} & {}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} & -{}^{1}/_{3} \end{pmatrix}$$

Para $\lambda=-1$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} {}^{4}/_{3} & {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & {}^{4}/_{3} & {}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} & {}^{2}/_{3} \end{pmatrix}$$

Los vectores propios deben cumplir:

$${}^{4}/_{3}\,x + {}^{2}/_{3}\,y - {}^{2}/_{3}\,z = 0$$

$${}^{2}/_{3}\,x + {}^{4}/_{3}\,y + {}^{2}/_{3}\,z = 0$$

$${}^{2}/_{3}\,x - {}^{2}/_{3}\,y + {}^{2}/_{3}\,z = 0$$

Ejemplo. ¿A que isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Para $\lambda=-1$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Los vectores propios deben cumplir:

$$\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 \qquad\qquad\qquad z = 0$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \qquad \frac{6}{3}x = 0 \qquad x = 0$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \qquad \frac{6}{3}y = 0 \qquad y = 0$$

Así que no hay vectores propios para $\lambda=-1$ (el (0,0,0) no cuenta como vector propio!)

Ejemplo. ¿A que isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} {}^{1}/_{3} & {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & {}^{1}/_{3} & {}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} & -{}^{1}/_{3} \end{pmatrix}$$

Como solo hay una dirección de vectores propios y corresponde al valor propio $\lambda=1$, la isometría debe ser una rotación alrededor de esa recta.

Ejemplo. ¿A que isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} {}^{1}/_{3} & {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & {}^{1}/_{3} & {}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} & -{}^{1}/_{3} \end{pmatrix}$$

Como solo hay una dirección de vectores propios y corresponde al valor propio $\lambda=1$, la isometría debe ser una rotación alrededor de esa recta.

¿Podremos hallar el ángulo de rotación?

Ejemplo. ¿A que isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Como solo hay una dirección de vectores propios y corresponde al valor propio $\lambda=1$, la isometría debe ser una rotación alrededor de esa recta.

¿Podremos hallar el ángulo de rotación?

Basta calcular cuanto gira algún vector perpendicular al vector propio $V=(1,1,0)$

Ejemplo. ¿A que isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} {}^{1}/_{3} & {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & {}^{1}/_{3} & {}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} & -{}^{1}/_{3} \end{pmatrix}$$

Como solo hay una dirección de vectores propios y corresponde al valor propio $\lambda=1$, la isometría debe ser una rotación alrededor de esa recta.

¿Podremos hallar el ángulo de rotación?

Basta calcular cuanto gira algún vector perpendicular al vector propio $V=(1,1,0)$

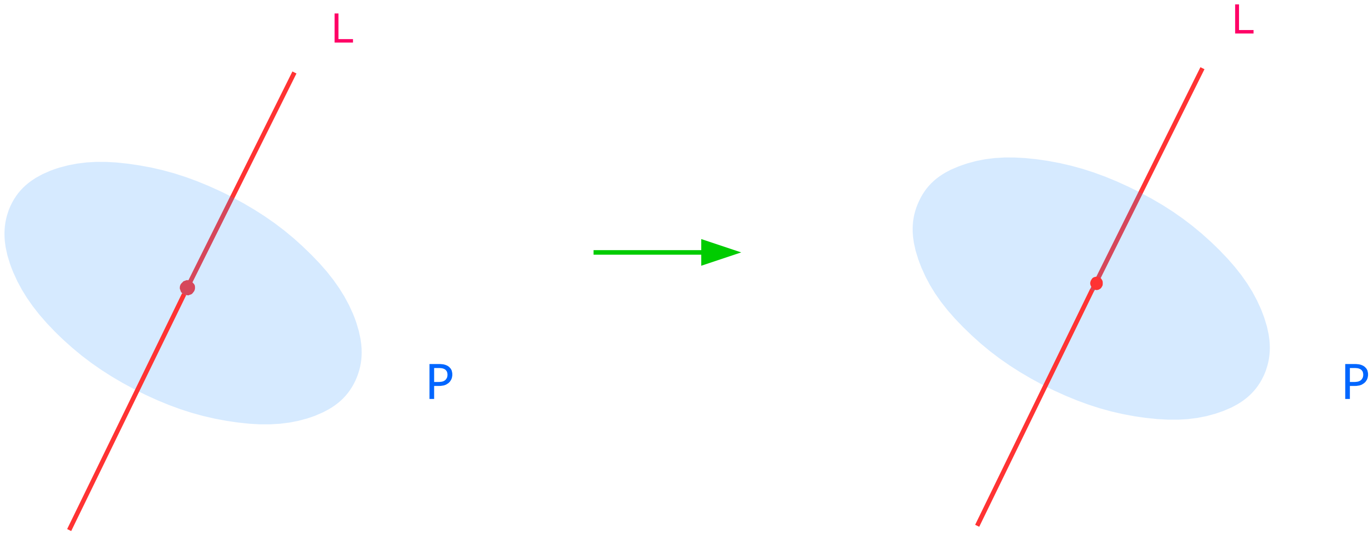
Podemos tomar el vector $U=(0,0,1)$

Entonces $MU=(-{}^{2}/_{3},{}^{2}/_{3},-{}^{1}/_{3})$

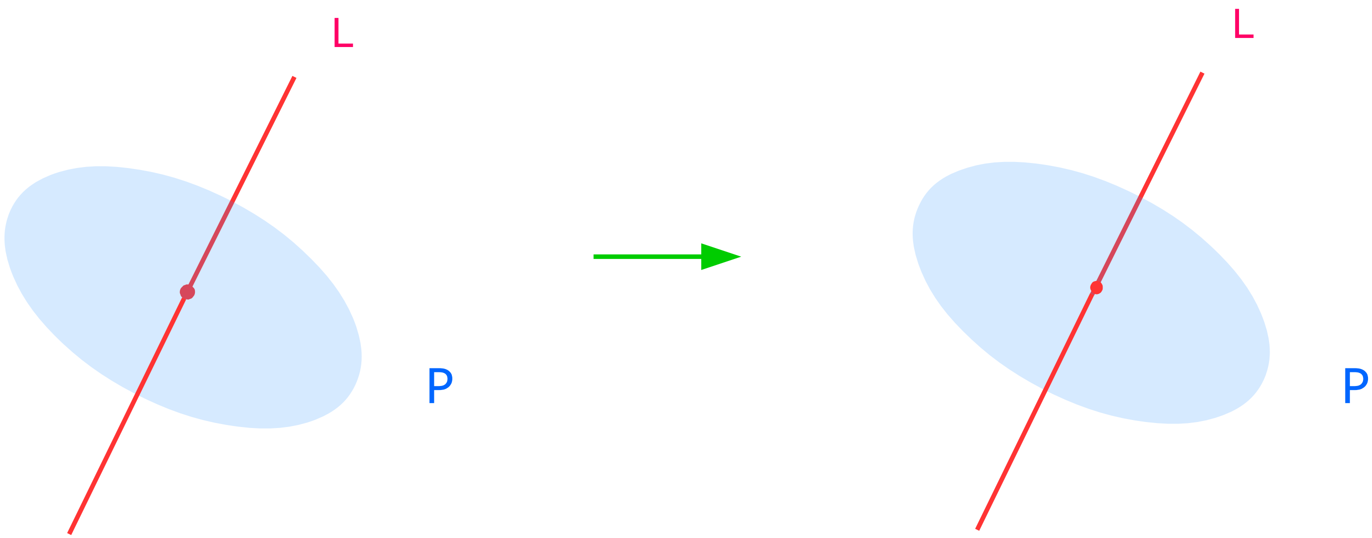
El ángulo entre U y MU esta dado por $\cos\theta = \dfrac{U\cdot MU}{|U||MU|} = \dfrac{(0,0,1)\cdot(-{}^{2}/_{3},{}^{2}/_{3},-{}^{1}/_{3})}{1 \qquad\qquad 1} = -{}^{1}/_{3}$

Así que el ángulo de la rotación es $\theta=\cos^{-1}(-{}^{1}/_{3}) = 109.47°$

Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y rotaciones con reflexión (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).



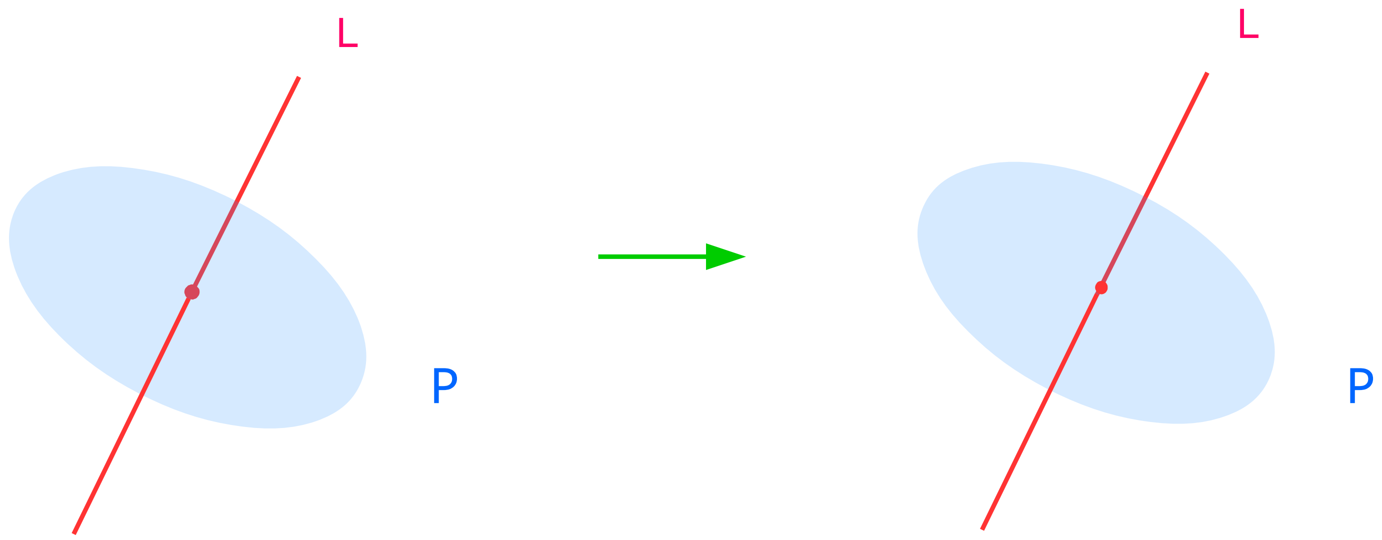
Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y rotaciones con reflexión (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).



¿Que distingue a estas transformaciones?

- Rotaciones
- Reflexiones
- Rotaciones con reflexión

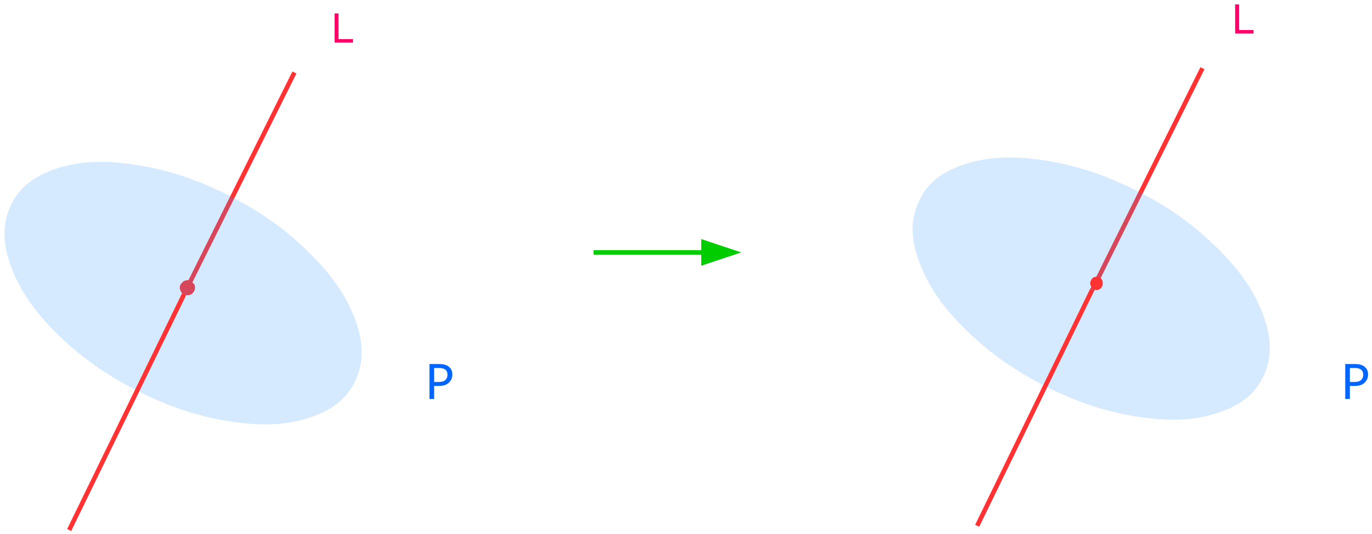
Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y rotaciones con reflexión (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).



¿Que distingue a estas transformaciones?

- Rotaciones
- Reflexiones
- Rotaciones con reflexión

Corolario. Las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y rotaciones con reflexión (que rotan en una recta y reflejan en el plano perpendicular).



¿Que distingue a estas transformaciones?

- Rotaciones: un valor propio 1 (si son 180° entonces también -1)
- Reflexiones: 2 valores propios: 1 y -1
- Rotaciones con reflexión: un valor propio: -1

Ejemplo. ¿A que isometría corresponde esta matriz?

$$M = \begin{pmatrix} {}^{1}/_{3} & {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & {}^{1}/_{3} & {}^{2}/_{3} \\ {}^{2}/_{3} & -{}^{2}/_{3} & -{}^{1}/_{3} \end{pmatrix}$$

Las transformaciones del plano (o del espacio) pueden separarse en dos clases: aquellas que **preservan la orientación** del plano (o del espacio) y aquellas que **invierten la orientación**.

Las transformaciones del plano (o del espacio) pueden separarse en dos clases: aquellas que **preservan la orientación** del plano (o del espacio) y aquellas que **invierten la orientación**.

¿Como podemos saber si una transformación lineal preserva o invierte la orientación?

Las transformaciones del plano (o del espacio) pueden separarse en dos clases: aquellas que **preservan la orientación** del plano (o del espacio) y aquellas que **invierten la orientación**.

¿Como podemos saber si una transformación lineal preserva o invierte la orientación?

Viendo el determinante de la matriz: si es positivo la preserva y si es negativo la invierte.

Observar que la composición de dos transformaciones que preservan la orientación (o la de dos transformaciones que invierten la orientación) preserva la orientación.

La composición de una transformación que preserva la orientación y una que la invierte debe invertir la orientación.

En particular, la inversa de una transformación que preserva la orientación debe preservarla, y la inversa de una transformación que invierte la orientación debe invertirla.

Ejercicio. Demostrar que la composición de dos rotaciones en rectas por el origen es una rotación en alguna recta por el origen.

Ejercicio. Demostrar que la composición de dos rotaciones en rectas por el origen es una rotación en alguna recta por el origen.

La composición de dos rotaciones que pasan por el origen es una isometría que fija el origen y preserva la orientación.

Ya mostramos que las isometrías del espacio que fijan un punto son rotaciones en rectas, reflexiones en planos y reflexiones con rotación, pero las únicas de estas que preservan orientación son las rotaciones en rectas. Así que la composición de las 2 rotaciones debe ser una rotación.

Transformaciones autoadjuntas
y
matrices simétricas

Una transformación lineal T es una **isometría** si para cada par de vectores

$$U \cdot V = TU \cdot TV$$

Una transformación lineal T es una **isometría** si para cada par de vectores

$$U \cdot V = TU \cdot TV$$

Ejemplos.

- Las reflexiones son isometrías.

- Las rotaciones son isometrías.

Una transformación lineal T es una **isometría** si para cada par de vectores

$$U \cdot V = TU \cdot TV$$

Las matrices correspondientes a las isometrías son las matrices **ortogonales**.

Una transformación lineal T es **autoadjunta** si para cada par de vectores

$$TU \cdot V = U \cdot TV$$

Una transformación lineal T es **autoadjunta** si para cada par de vectores

$$TU \cdot V = U \cdot TV$$

Ejemplos.

- Las reflexiones son autoadjuntas.

- Las rotaciones *no son* autoadjuntas.

Una transformación lineal T es **autoadjunta** si para cada par de vectores

$$TU \cdot V = U \cdot TV$$

Las transformaciones autoadjuntas pueden parecer raras, pero tienen propiedades especiales, y son muy importantes en el álgebra, el análisis y en la física.

Una transformación lineal T es **autoadjunta** si para cada par de vectores

$$TU \cdot V = U \cdot TV$$

Veremos que las matrices correspondientes a las transformaciones autoadjuntas son las **matrices simétricas**.

Una matriz M es simétrica si es igual a su transpuesta: $M = M^T$

- Las sumas de matrices simétricas son matrices simétricas.
- Las inversas de matrices simétricas son simétricas.
- Los productos de matrices simétricas **no** tienen que ser simétricas.

Lema. Una transformación lineal T es autoadjunta si y solo si su matriz es simétrica.

Demostración ?

Lema. Una transformación lineal T es autoadjunta si y solo si su matriz es simétrica.

Demostración. Sea M la matriz correspondiente a la transformación lineal T.

$\Leftarrow$

Si e_i =(0,...,0,1,0,..,0) y la matriz M tiene entradas a_{ij}

entonces $e_i \cdot Me_j = a_{ij}$ y $e_j \cdot Me_i = a_{ji}$

Así que si la transformación es autoadjunta $a_{ij} = a_{ji}$ y la matriz M debe ser simétrica.

Lema. Una transformación lineal T es autoadjunta si y solo si su matriz es simétrica.

Demostración. Sea M la matriz correspondiente a la transformación lineal T.

$\Leftarrow$

Si e_i =(0,...,0,1,0,..,0) y la matriz M tiene entradas a_{ij}

entonces $e_i \cdot Me_j = a_{ij}$ y $e_j \cdot Me_i = a_{ji}$

Así que si la transformación es autoadjunta $a_{ij} = a_{ji}$ y la matriz M debe ser simétrica.

$\Rightarrow$ Supongamos ahora que M es simétrica.

Si escribimos a los vectores como columnas, entonces

$U{\cdot}V = U^TV$ y por la asociatividad del producto de matrices

$$MU{\cdot}V = (MU)^TV = (U^TM^T)V = U^T(M^TV) = U^T(MV) = U{\cdot}MV. \qquad \bullet$$

Teorema. Si M es una matriz simétrica de cualquier tamaño, los vectores propios de M correspondientes a valores propios distintos deben ser ortogonales.

Demostración ?

Teorema. Si M es una matriz simétrica de cualquier tamaño, los vectores propios de M correspondientes a valores propios distintos deben ser ortogonales.

Demostración. Si U y V son dos vectores propios correspondientes a los valores propios distintos μ y λ entonces

$\mu(U \cdot V) = \mu U \cdot V = MU \cdot V = U \cdot MV = U \cdot \lambda V = \lambda(U \cdot V)$

así que si $\mu \neq \lambda$ entonces $U \cdot V = 0$. •

Lema. Las transformaciones autoadjuntas del plano tienen 2 vectores propios ortogonales.

Demostración ?

Lema. Las transformaciones autoadjuntas del plano tienen 2 vectores propios ortogonales.

Demostración.

Para una matriz simétrica M de 2x2

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad M-\lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix} \qquad \det(M-\lambda I) = \lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2$$

$$\Lambda = \frac{a+c \pm\sqrt{(a+c)^2-4(ac-b^2)}}{2} = \frac{a+c \pm\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$$

Así que hay dos raíces reales distintas (a menos que a=c y b=0) y por el lema anterior les corresponden 2 vectores propios ortogonales (si a=c y b=0 la matriz es un múltiplo de la identidad y todos los vectores del plano son vectores propios). •

Corolario. Las transformaciones autoadjuntas del plano son los estiramientos en 2 direcciones ortogonales.

Demostración ?

Corolario. Las transformaciones autoadjuntas del plano son los estiramientos en 2 direcciones ortogonales.

Demostración. Si la matriz M es simétrica entonces la transformación lineal correspondiente a M tiene 2 vectores propios ortogonales y la transformación estira al plano en esas dos direcciones.

La matriz correspondiente a un estiramiento del plano en dos direcciones ortogonales esta dado por una matriz IEI^{-1}, donde I es una isometría que lleva los ejes coordenados a esas dos direcciones y E es la matriz diagonal de un estiramiento en las direcciones de los ejes coordenados.

Como E es diagonal $E=E^T$ y como I es ortogonal $I^{-1}=I^T$.

Por lo tanto $(IEI^{-1})^T = I^{-1T}E^TI^T = IEI^{-1}$ así que IEI^{-1} es simétrica. •

Teorema. Las transformaciones autoadjuntas del espacio tienen 3 vectores propios ortogonales.

Demostración ?

Teorema. Las transformaciones autoadjuntas del espacio tienen 3 vectores propios ortogonales.

Demostración. Si M es una matriz de 3x3, entonces M tiene al menos un valor propio λ y un vector propio U. Si M es simétrica, da una transformación autoadjunta

Como $MU=\lambda U$ entonces M debe mandar los vectores perpendiculares a U a vectores perpendiculares a U, por lo tanto el plano P perpendicular a U debe ir a dar en si mismo.

En el plano P, M actúa como una transformación lineal autoadjunta.

Pero una transformación autoadjunta en el plano P tiene dos vectores propios ortogonales en P, por lo tanto la transformación en el espacio tiene 3 vectores propios ortogonales. ●

Corolario. Las transformaciones autoadjuntas del espacio son los estiramientos en 3 direcciones ortogonales.

Demostración ?

Corolario. Las transformaciones autoadjuntas del espacio son los estiramientos en 3 direcciones ortogonales.

Demostración. Si la matriz M es simétrica entonces tiene 3 vectores propios ortogonales, y la transformación lineal dada por M estira al espacio en esas 3 direcciones.

La matriz del estiramiento del espacio en 3 direcciones ortogonales esta dado por la matriz IEI^{-1}, donde E es la matriz de estiramiento en la dirección de los ejes coordenados -que es una matriz diagonal- y I es la matriz de la isometría que lleva los ejes coordenados a esas 3 direcciones.

Como E es una matriz diagonal $E^T=E$.

Como I es una matriz ortogonal $I^{-1}= I^T$.

así que $(IEI^{-1})^T= I^{-1T}E^TI^T = IEI^{-1}$ así que IEI^{-1} es una matriz simétrica. •

Ejercicio. Muestra directamente que la siguiente matriz corresponde a un estiramiento del espacio en 3 direcciones ortogonales, hallando las direcciones y los factores de estiramiento.