Cambios de coordenadas

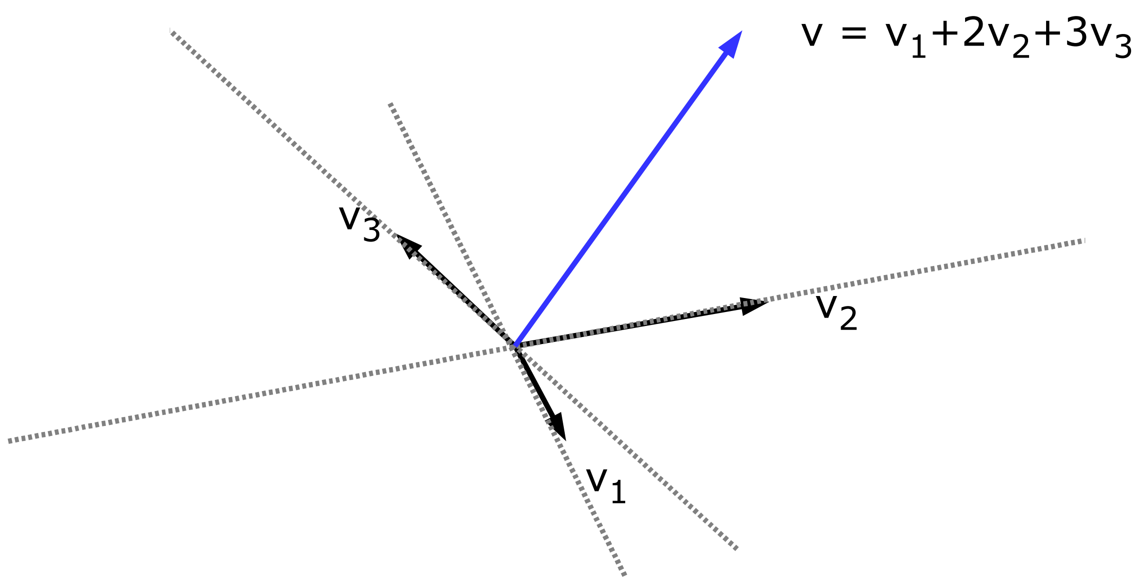
Hay muchas maneras de darle coordenadas a los puntos del espacio, las ecuaciones de las curvas o superficies dependen de las coordenadas que utilicemos y eligiendo las coordenadas adecuadas podemos hacer que las ecuaciones se vuelvan mas sencillas.

Los siguientes resultados, que enunciaremos para el espacio tridimensional, son validos en todas las dimensiones con las modificaciones obvias y las demostraciones son las mismas.

Si v_1,v_2,v_3 son tres vectores linealmente independientes en el espacio entonces cada vector v es puede escribir, de manera única, como combinación lineal de ellos:
$v = a_1v_1+a_2v_2+ a_3v_3$

Diremos que las **coordenadas** de v en la **base** v_1,v_2,v_3 son (a_1,a_2,a_3).

Ejemplo.



Las coordenadas del vector $v=v_1+2v_2+3v_3$ en la base v_1,v_2,v_3 son (1,2,3)

Si fijamos una base, la función que le asigna a cada vector sus coordenadas en esa base es una función lineal: las coordenadas de u+v son las coordenadas de u mas las coordenadas de v y las coordenadas del vector ru son r veces las coordenadas de u).

Para cada base de vectores, las transformaciones lineales del espacio están dadas por funciones lineales de las coordenadas, de modo a que cada transformación T podemos asignarle una matriz M que dice como cambian las coordenadas de los puntos al aplicarles T. Observar que la matriz *depende de la base*.

Para cada base de vectores, las transformaciones lineales del espacio están dadas por funciones lineales de las coordenadas, de modo a que cada transformación T podemos asignarle una matriz M que dice como cambian las coordenadas de los puntos al aplicarles T. Observar que la matriz *depende de la base*.

Ejemplo. Supongamos que v_1,v_2,v_3 forman una base del espacio y consideremos la transformación lineal T que lleva los vectores v_1,v_2,v_3 a los vectores $v_1+2v_2-v_3$, $4v_1+7v_2-3v_3$ y $-9v_1+5v_3$ respectivamente. Entonces la matriz

$$M = \begin{matrix} 1 & 4 & -9 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \end{matrix}$$

da la transformación T en esas coordenadas: si las coordenadas de un vector v en la base v_1,v_2,v_3 son (x,y,z) entonces las coordenadas de Tv en la base v_1,v_2,v_3 son

$$T \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 4 & -9 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

Nos interesa saber como cambian las coordenadas de un vector al cambiar de una base v_1,v_2,v_3 a otra base u_1,u_2,u_3.

Observar que el cambio de coordenadas es una transformación lineal.

Si escribimos a los vectores u_1,u_2,u_3 como combin. lineales de v_1,v_2,v_3:

$$u_1 = a_1v_1+a_2v_2+ a_3v_3$$

$$u_2 = b_1v_1+b_2v_2+ b_3v_3$$

$$u_3 = c_1v_1+c_2v_2+ c_3v_3$$

entonces en la base v_1,v_2,v_3 la matriz de la transformación que lleva los vectores v_1,v_2,v_3 a los vectores u_1,u_2,u_3 es

$$P = \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}$$

Lema. Si P es la matriz que lleva v_1,v_2,v_3 a u_1,u_2,u_3 entonces el cambio de coordenadas de la base v_1,v_2,v_3 a la base u_1,u_2,u_3 esta dada por la inversa P^{-1}.

Demostración. Si $X=(x_1,x_2,x_3)$ son las coordenadas de un vector en la base v_1,v_2,v_3 y $X'=(x'_1,x'_2,x'_3)$ son las coordenadas del vector en la base u_1,u_2,u_3, tenemos que mostrar que $X' = P^{-1}X$ y esto equivale a ver que $PX' = X$.

El cambio de coordenadas de la base u_1,u_2,u_3 a la base v_1,v_2,v_3 es la transformación lineal que manda a (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) (las coordenadas de los vectores u_1,u_2,u_3 en la base u_1,u_2,u_3) a las coordenadas de esos vectores en la base v_1,v_2,v_3. Esto es justamente lo que hace la matriz P, así que P es la matriz del cambio de coordenadas. •

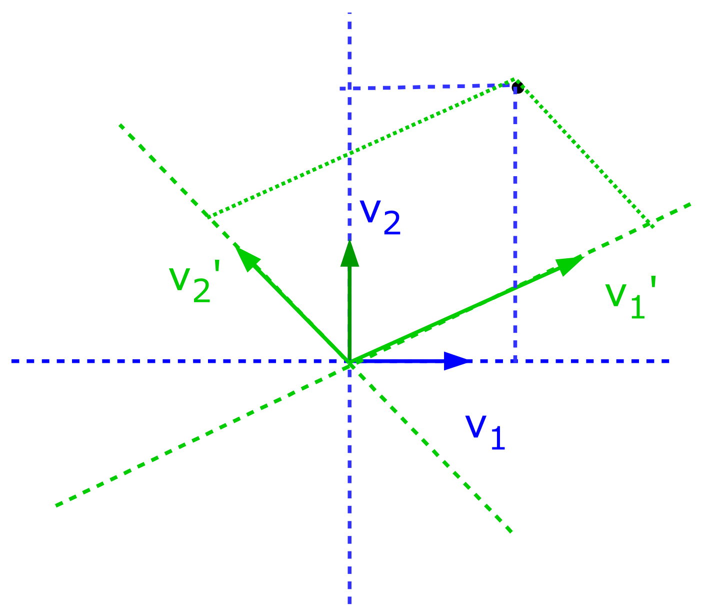
Ejemplo. En el plano, consideremos la base formada por dos vectores v_1,v_2 y la base formada por los vectores u_1,u_2 donde $u_1=2v_1+v_2$ y $u_2=-v_1+v_2$.

En la base v_1,v_2 la transformación lineal que lleva v_1,v_2 a u_1,u_2 esta dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

si las coordenadas azules de un vector son (x,y)

y sus coordenadas verdes son (x',y') entonces

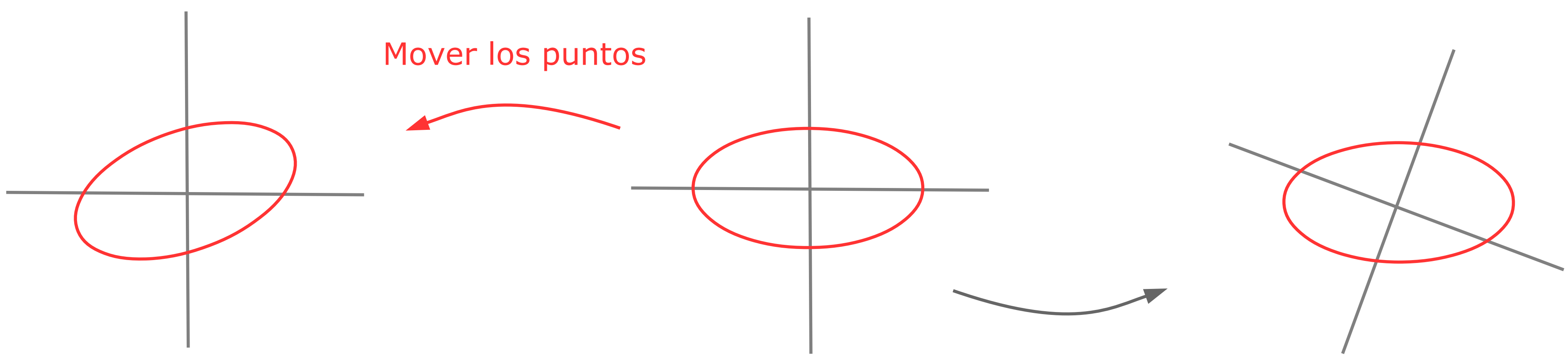


$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

de modo que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} {}^1/_3 & {}^1/_3 \\ -{}^1/_3 & {}^2/_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

El lema anterior dice que mover los ejes de coordenadas aplicándoles una transformación lineal P tiene el mismo efecto en las coordenadas de los puntos que mover los puntos aplicándoles la transformación inversa P^{-1}:



Las bases formadas por vectores unitarios y ortogonales son especialmente útiles para la geometría, ya que las normas de los vectores y los ángulos que forman pueden calcularse directamente de las coordenadas usando el teorema de Pitagoras y la ley de los cosenos.

Los cambios de coordenadas entre bases ortogonales también son mas sencillos, porque la inversa de una matriz ortogonal es su transpuesta.

Ejemplo. Consideremos la base canónica de R^3

$v_1=(1,0,0)$, $v_2=(0,1,0)$, $v_3=(0,0,1)$ y la base formada por los vectores

$u_1=(^1/_{\sqrt{3}},^1/_{\sqrt{3}},^1/_{\sqrt{3}})$ $u_2=(^1/_{\sqrt{6}},^{-2}/_{\sqrt{6}},^1/_{\sqrt{6}})$ $u_3=(^{-1}/_{\sqrt{2}},0,^1/_{\sqrt{2}})$.

En la base v_1,v_2,v_3 la matriz de la transformación que lleva v_1,v_2,v_3 a u_1,u_2,u_3 es

$$\begin{matrix} ^1/_{\sqrt{3}} & ^1/_{\sqrt{3}} & ^1/_{\sqrt{3}} \\ ^1/_{\sqrt{6}} & ^{-2}/_{\sqrt{6}} & ^1/_{\sqrt{6}} \\ ^{-1}/_{\sqrt{2}} & 0 & ^1/_{\sqrt{2}} \end{matrix}$$

como la matriz P es ortogonal, entonces $P^{-1}= P^T$, y el cambio de coordenadas de la base canónica a la otra base esta dada por $X'=P^{-1}X=P^TX$

$$\begin{matrix} ^1/_{\sqrt{3}} & ^1/_{\sqrt{6}} & ^{-1}/_{\sqrt{2}} \\ ^1/_{\sqrt{3}} & ^{-2}/_{\sqrt{6}} & 0 \\ ^1/_{\sqrt{3}} & ^1/_{\sqrt{6}} & ^1/_{\sqrt{2}} \end{matrix}$$

Ej. las coordenadas del vector v_1 en la base u_1,u_2,u_3 son $(^1/_{\sqrt{3}},^1/_{\sqrt{6}},^{-1}/_{\sqrt{2}})$

lo que puede comprobarse viendo que $^1/_{\sqrt{3}}\, u_1+^1/_{\sqrt{6}}\, u_2 -^1/_{\sqrt{2}}\, u_3 = v_1$.

Cada base de vectores define un sistema de coordenadas en el espacio, y cada transformación lineal puede expresarse en esas coordenadas por medio de una matriz. Al cambiar de base las coordenadas cambian y la matriz de la transformación también cambia.

Lema. Si P es la matriz que lleva v_1,v_2,v_3 a u_1,u_2,u_3 y si en la base v_1,v_2,v_3 la transformación T esta dada por la matriz M, entonces en la base u_1,u_2,u_3 T esta dada por la matriz $P^{-1}MP$.

Demostración. La matriz P cambia las coordenadas de la base $\{v_i\}$ a la base $\{u_i\}$, la matriz M da la transformación en las coordenadas $\{u_i\}$ y la matriz P^{-1} vuelve a cambiar de las coordenadas $\{u_i\}$ a las coordenadas $\{v_i\}$, así que la matriz $P^{-1}MP$ da la transformación en las coordenadas $\{v_i\}$. •

Ejemplo. En la base canónica la transformación lineal que manda (1,0) y (0,1) a (4,-1) y (-2,5) esta dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

En la base formada por los vectores (2,0) y (0,-3) la misma transformación esta dada por la matriz $P^{-1}MP$, donde P es la matriz que manda (1,0) y (2,0) a (0,1) y (0,-3) respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -2 & -15 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2/3 & 5 \end{pmatrix}$$

En la base formada por los vectores (2,1) y (-1,1) la misma transformación esta dada por la matriz $R^{-1}MR$, donde R es la matriz que manda (1,0) y (0,1) a (2,1) y (-1,1) respectivamente.

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

así que al cambiar de coordenadas la matriz de una transformación lineal puede hacerse mas sencilla o mas complicada.

Esta ultima matriz es diagonal porque los vectores de la base son vectores propios de la transformación.

Ecuaciones y cambio de coordenadas.

La ecuación de una curva o superficie es una relación entre las coordenadas de los puntos de la curva o superficie que los distingue de los demás puntos del espacio.

Las ecuaciones de las curvas y las superficies dependen de las coordenadas, al hacer una transformación, o al cambiar la base de coordenadas, sus ecuaciones cambian.

Llamemos a las coordenadas de un punto antes de la transformación (x,y,z) y a sus coordenadas después de la transformación (x',y',z').

Esto lo podemos expresar como $T(x,y,z)=(x',y',z')$.

Si conocemos la ecuación antes de la transformación (una ecuación en x,y,z) entonces para obtener la ecuación después de la transformación (una ecuación en x',y',z') basta escribir las coordenadas (x,y,z) en términos de las coordenadas (x',y',z'), lo que equivale a encontrar $(x,y,z) = T^{-1}(x',y',z')$ y sustituirlas en la ecuación original.

Si la transformación es lineal, existe una matriz M tal que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{así que} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

lo que nos da las coordenadas (x,y,z) en términos de (x',y',z').

Las ecuaciones lineales y cuadráticas pueden escribirse usando matrices, lo que permite ver fácilmente como cambian al hacer una transformación lineal:

Ejemplos.

$x-2y=3$ puede escribirse $\begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3$

$x+2y+3z = 4$ puede escribirse $\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4$

Ejemplos.

$x-2y=3$ puede escribirse $\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3$

$x+2y+3z = 4$ puede escribirse $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4$

Ejemplos.

$x-2y=3$ puede escribirse $\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3$

$3x^2-2y^2 = 5$ puede escribirse $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5$

$x+2y+3z = 4$ puede escribirse $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4$

$x^2+2y^2+3z^2 = 7$ puede escribirse $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 7$

Ejemplos.

$x-2y=3$ puede escribirse $\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3$

$3x^2-4xy+7y^2 = 5$ puede escribirse $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5$

$x+2y+3z = 4$ puede escribirse $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4$

$x^2+2y^2-3z^2-4xy+5yz+6xz = 7$ puede escribirse $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 7$

Ejemplos.

$x-2y=3$ puede escribirse $\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3$

$3x^2-4xy+7y^2 = 5$ puede escribirse $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5$

$x+2y+3z = 4$ puede escribirse $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4$

$x^2+2y^2-3z^2-4xy+5yz+6xz = 7$ puede escribirse $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & {}^5/_2 & -2 \\ {}^5/_2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 7$

En el plano, la ecuación lineal $Ax+By=C$ puede escribirse como

$$(A \quad B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C$$

y la ecuación cuadrática $Ax^2+Bxy+Cz^2=D$ puede escribirse como

$$(x \ y)\begin{pmatrix} A & {}^{B}/_{2} \\ {}^{B}/_{2} & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D$$

En el espacio, la ecuación lineal $Ax+By+Cz=D$ puede escribirse como

$$(A\ B\ C)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = D$$

y la ecuación cuadrática $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz=G$ puede escribirse

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = G$$

Las ecuaciones de primer grado pueden escribirse como

$$VX = c$$

donde V es el vector de coeficientes y X es un vector (vertical) de coordenadas.

Las ecuaciones de primer grado pueden escribirse como

$$VX = c$$

donde V es el vector de coeficientes y X es un vector (vertical) de coordenadas.

Si hacemos una transformación lineal $X'=TX$ entonces $X=T^{-1}X'$ y sustituyendo queda

$$V(T^{-1}X') = VT^{-1}X' = c$$

así que al hacer la transformación el vector de coeficientes cambia a VT^{-1}.

Las ecuaciones de primer grado pueden escribirse como

$$VX = c$$

donde V es el vector de coeficientes y X es un vector (vertical) de coordenadas.

Si hacemos una transformación lineal $X'=TX$ entonces $X=T^{-1}X'$ y sustituyendo queda

$$V(T^{-1}X') = VT^{-1}X' = c$$

así que al hacer la transformación el vector de coeficientes cambia a VT^{-1}.

Y si T es una isometría $T^{-1} = T$ y entonces $VT^{-1} = VT^{T}$

Ejemplo. ¿Como cambia el plano $2x+y = 4$ al hacer la transformación

$(x',y') = ({}^4/_5x+{}^3/_5y, -{}^3/_5x+{}^4/_5y)$

Ejemplo. ¿Como cambia el plano $2x+y = 4$ al hacer la transformación

$$(x',y') = \left(\tfrac{4}{5}x+\tfrac{3}{5}y,-\tfrac{3}{5}x+\tfrac{4}{5}y\right)$$

La ecuación puede escribirse como $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4$

y la transformación es $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Ejemplo. ¿Como cambia el plano $2x+y = 4$ al hacer la transformación

$$(x',y') = (\tfrac{4}{5}x+\tfrac{3}{5}y,-\tfrac{3}{5}x+\tfrac{4}{5}y)$$

La ecuación puede escribirse como $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4$

y la transformación es $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

así que la ecuación transformada es $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 4$

multiplicando las matrices queda $\begin{pmatrix} 11/5 & -2/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 4$

o sea $\tfrac{11}{5}x' - \tfrac{2}{5}y' = 4$

Las ecuaciones homogéneas de segundo grado pueden escribirse como

$$X^T S X = c$$

donde S es una matriz simétrica y X es el vector (vertical) de coordenadas.

Las ecuaciones homogéneas de segundo grado pueden escribirse como

$$X^T S X = c$$

donde S es una matriz simétrica y X es el vector (vertical) de coordenadas.

Si hacemos una transformación lineal $X'=TX$ entonces $X=T^{-1}X'$

y sustituyendo en la ecuación original queda

$$(T^{-1}X')^T S (T^{-1}X') = X'^T T^{-1T} S P^{-1} X' = X'^T T^{-1T} S T^{-1} X' = c$$

así que al hacer la transformación la matriz S cambia por la matriz $T^{-1T}ST^{-1}$.

Las ecuaciones homogéneas de segundo grado pueden escribirse como

$$X^T S X = c$$

donde S es una matriz simétrica y X es el vector (vertical) de coordenadas.

Si hacemos una transformación lineal $X'=TX$ entonces $X=T^{-1}X'$

y sustituyendo en la ecuación original queda

$$(T^{-1}X')^T S(T^{-1}X') = X'^T T^{-1T} S P^{-1} X' = X'^T T^{-1T} S T^{-1} X' = c$$

así que al hacer la transformación la matriz S cambia por la matriz $T^{-1T}ST^{-1}$.

Si T es una isometría $T^{-1} = T^T$ y entonces $T^{-1T}ST^{-1} = TST^T$

Ejemplo. ¿Como cambia la ecuación $2x^2+6xy+2y^2 = 5$ al aplicarle la transformación $(x',y') = (\,^4/_5x+\,^3/_5y,-\,^3/_5x+\,^4/_5y)$?

Ejemplo. ¿Como cambia la ecuación $2x^2+6xy+2y^2 = 5$ al aplicarle la transformación $(x',y') = (^4/_5x+^3/_5y,-^3/_5x+^4/_5y)$?

La ecuación puede escribirse como $$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5$$

y la transformación es $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ^4/_5 & ^3/_5 \\ -^3/_5 & ^4/_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ^4/_5 & -^3/_5 \\ ^3/_5 & ^4/_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿Como cambia la ecuación $2x^2+6xy+2y^2 = 5$ al aplicarle la transformación $(x',y') = (\,^4/_5x+\,^3/_5y,-\,^3/_5x+\,^4/_5y)$?

La ecuación puede escribirse como $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5$

y la transformación es $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ^4/_5 & ^3/_5 \\ -^3/_5 & ^4/_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ^4/_5 & -^3/_5 \\ ^3/_5 & ^4/_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

así que la ecuación transformada puede escribirse

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ^4/_5 & ^3/_5 \\ -^3/_5 & ^4/_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ^4/_5 & -^3/_5 \\ ^3/_5 & ^4/_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 5$$

y haciendo el producto de matrices queda $\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ^{14}/_{25} & ^{21}/_{25} \\ ^{21}/_{25} & ^{27}/_{25} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 5$

o sea $^{14}/_{25}\, x'^2+\,^{42}/_{25}\, x'y'+\,^{27}/_{25}\, y^2 = 5$

La ecuación general de segundo grado

Queremos saber que forma tienen las soluciones de todas las ecuaciones de segundo grado en 2 o 3 variables. Empezaremos por las ecuaciones sin términos lineales como

$$3x^2+4y^2 = 5 \qquad 2x^2+6xy+2y^2 = 1$$

$$x^2+2y^2-3z^2 = 2 \qquad x^2+2y^2-3z^2-4xy+6xz = -7$$

Ya conocemos las formas cuando las ecuaciones no tienen términos cruzados,

¿Y si sí si los tienen? Una posibilidad es que existan otras formas, otra posibilidad es que sean las mismas formas pero en otras posiciones.

La ecuación general de segundo grado

Queremos saber que forma tienen las soluciones de todas las ecuaciones de segundo grado en 2 o 3 variables.

$2x^2+3y^2 = 5$ $\qquad$ $2x^2+5xy+3y^2 = 1$

$x^2+2y^2-3z^2 = 2$ $\qquad$ $x^2+2y^2-3z^2-4xy+6xz = -7$

Para averiguarlo podemos hacer cambios de coordenadas: si existe una base de coordenadas donde la ecuación no tenga términos cruzados entonces la forma debe ser como una de las que ya conocemos, aunque quizás deformada por la transformación que lleva unos ejes de coordenadas a los otros ejes. Pero si esa transformación es ortogonal (una isometría) entonces la forma debe ser la misma.

Teorema. Para cada ecuación homogénea de segundo grado hay un cambio de coordenadas ortogonales que elimina los términos cruzados.

Teorema. Para cada ecuación homogénea de segundo grado hay un cambio de coordenadas ortogonales que elimina los términos cruzados.

Demostración. Cada ecuación cuadrática homogénea se puede escribir

$$X^T S X = c \qquad \text{donde } S \text{ es una matriz simétrica}$$

La ecuación no tiene términos cruzados si la matriz S es una matriz diagonal.

Teorema. Para cada ecuación homogénea de segundo grado hay un cambio de coordenadas ortogonales que elimina los términos cruzados.

Demostración. Cada ecuación cuadrática homogénea se puede escribir

$X^T S X = c$ donde S es una matriz simétrica

La ecuación no tiene términos cruzados si la matriz S es una matriz diagonal.

Al hacer un cambio de coordenadas $X'=TX$ la ecuación se convierte en

$$X'^T T^{-1T} S T^{-1} X' = c$$

Si T es ortogonal, entonces $T^{-1} = T^T$ y $T^{-1T} S T^{-1} = TST^T$.

Buscamos una T de modo que TST^{-1} sea diagonal.

Teorema. Para cada ecuación homogénea de segundo grado hay un cambio de coordenadas ortogonales que elimina los términos cruzados.

Demostración (continúa).

Buscamos una T de modo que TST^{-1} sea diagonal

.

La matriz S representa una transformación lineal y TST^{-1} representa esa misma transformación al cambiar de coordenadas.

Como S es simétrica, tiene suficientes vectores propios para formar una base, y si escribimos una transformación en una base de vectores propios entonces su matriz es diagonal.

Así que al cambiar las coordenadas para que los ejes tengan la dirección de los vectores propios de S, la matriz TST^{-1} será una matriz diagonal, y la ecuación en estas coordenadas no tendrá términos cruzados.

Teorema. Para cada ecuación homogénea de segundo grado hay un cambio de coordenadas ortogonales que elimina los términos cruzados.

Demostración (continúa).

Como S es simétrica tiene vectores propios ortogonales.

Podemos elegirlos de norma 1, de modo que el cambio de coordenadas sea una isometría, así que las soluciones de la ecuación original tienen la misma forma que las soluciones de la ecuación transformada, solo que en otra posición. •

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $2x^2 + 6xy + 2y^2 = 5$?

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $2x^2 + 6xy + 2y^2 = 5$?

La ecuación se escribe en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} =$$

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $2x^2 + 6xy + 2y^2 = 5$?

La ecuación se escribe en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5$$

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $2x^2 + 6xy + 2y^2 = 5$?

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5$$

Los valores propios son las raíces de

$$\det \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $2x^2 + 6xy + 2y^2 = 5$?

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5$$

Los valores propios son las raíces de

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $2x^2 + 6xy + 2y^2 = 5$?

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5$$

Los valores propios son las raíces de

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2-9 = \lambda^2-4\lambda-5$$

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $2x^2 + 6xy + 2y^2 = 5$?

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5$$

Los valores propios son las raíces de

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2-9 = \lambda^2-4\lambda-5$$

los valores propios son

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $2x^2 + 6xy + 2y^2 = 5$?

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5$$

Los valores propios son las raíces de

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2-9 = \lambda^2-4\lambda-5 = (\lambda-5)(\lambda+1)$$ los valores propios son 5 y -1

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $2x^2 + 6xy + 2y^2 = 5$?

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5$$

Los valores propios son las raíces de

$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2-9 = \lambda^2-4\lambda-5 = (\lambda-5)(\lambda+1)$ los valores propios son 5 y -1

así que en la base formada por los vectores propios la matriz debe quedar

$$\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} =$$

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $2x^2 + 6xy + 2y^2 = 5$?

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5$$

Los valores propios son las raíces de

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2-9 = \lambda^2-4\lambda-5 = (\lambda-5)(\lambda+1)$$ los valores propios son 5 y -1

así que en la base formada por los vectores propios la matriz debe quedar

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 5$$

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $2x^2 + 6xy + 2y^2 = 5$?

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5$$

Los valores propios son las raíces de

$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2-9 = \lambda^2-4\lambda-5 = (\lambda-5)(\lambda+1)$ los valores propios son 5 y -1

así que en la base formada por los vectores propios la matriz debe quedar

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 5$$

o sea $5x'^2 - y^2 = 5$ por lo que es ...

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $2x^2 + 6xy + 2y^2 = 5$?

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5$$

Los valores propios son las raíces de

$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda-5)(\lambda+1)$ los valores propios son 5 y -1

así que en la base formada por los vectores propios la matriz debe quedar

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 5$$

o sea $5x'^2 - y^2 = 5$ por lo que es una hipérbola.

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $2x^2 + 6xy + 2y^2 = 5$?

Los ejes de la hipérbola tienen las direcciones de los vectores propios de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 5$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = -1$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $2x^2 + 6xy + 2y^2 = 5$?

Los ejes de la hipérbola tienen las direcciones de los vectores propios de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 5$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$ y un vector propio es $\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

Para $\lambda = -1$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$ y un vector propio es $\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $2x^2 + 6xy + 2y^2 = 5$?

Los ejes de la hipérbola tienen las direcciones de los vectores propios de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 5$

$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ y un vector propio es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda = -1$

$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ y un vector propio es $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $2x^2 + 6xy + 2y^2 = 5$?

Los ejes de la hipérbola tienen las direcciones de los vectores propios de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 5$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$ y un vector propio es $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$

Para $\lambda = -1$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$ y un vector propio es $\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$

Podemos comprobar lo anterior haciendo el cambio de coordenadas a la base de vectores propios unitarios, que son $({}^1/_{\sqrt{2}},{}^1/_{\sqrt{2}})$ y $(-{}^1/_{\sqrt{2}},{}^1/_{\sqrt{2}})$. En esta base queda

$$\begin{pmatrix} {}^1/_{\sqrt{2}} & {}^1/_{\sqrt{2}} \\ -{}^1/_{\sqrt{2}} & {}^1/_{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^1/_{\sqrt{2}} & -{}^1/_{\sqrt{2}} \\ {}^1/_{\sqrt{2}} & {}^1/_{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1/_{\sqrt{2}} & {}^1/_{\sqrt{2}} \\ -{}^1/_{\sqrt{2}} & {}^1/_{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^5/_{\sqrt{2}} & {}^1/_{\sqrt{2}} \\ {}^5/_{\sqrt{2}} & -{}^1/_{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $2x^2 + 6xy + 2y^2 = 5$?

Los ejes de la hipérbola tienen las direcciones de los vectores propios de la matriz

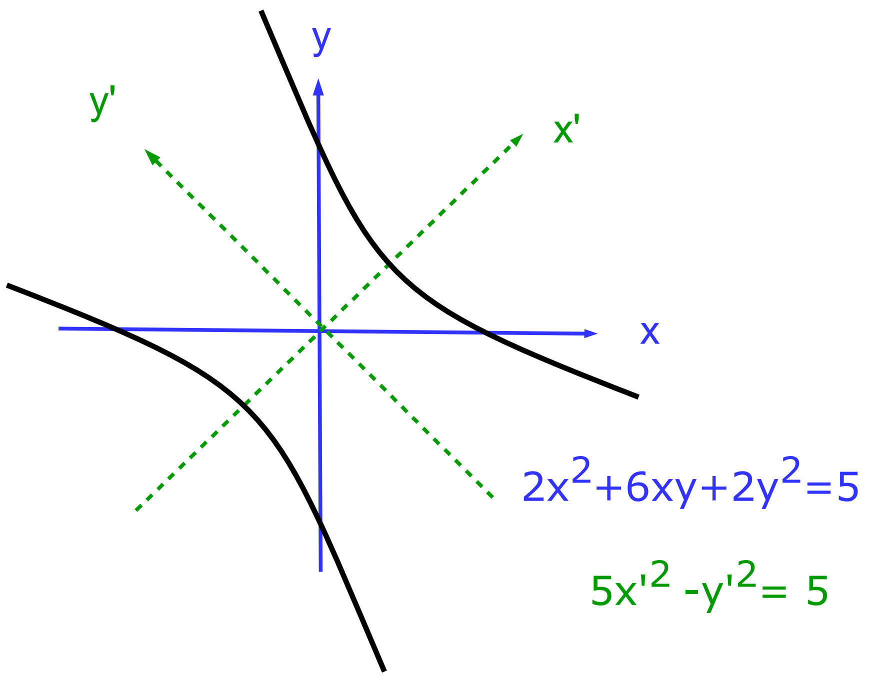
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 5$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$ y un vector propio es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda = -1$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$ y un vector propio es $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$



Ejemplo. ¿Que superficie representa la ecuación $3x^2+6y^2+3z^2-4xy+8xz+4yz = -7$?

Ejemplo. ¿Que superficie representa la ecuación $3x^2+6y^2+3z^2-4xy+8xz+4yz = -7$?

La ecuación se escribe en forma matricial como

=

Ejemplo. ¿Que superficie representa la ecuación $3x^2+6y^2+3z^2-4xy+8xz+4yz = -7$?

La ecuación se escribe en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -7$$

Ejemplo. ¿Que superficie representa la ecuación $3x^2+6y^2+3z^2-4xy+8xz+4yz = -7$?

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -7$$

Los valores propios de la matriz son las raíces de

$$\det \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿Que superficie representa la ecuación $3x^2+6y^2+3z^2-4xy+8xz+4yz = -7$?

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -7$$

Los valores propios de la matriz son las raíces de

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$$

Ejemplo. ¿Que superficie representa la ecuación $3x^2+6y^2+3z^2-4xy+8xz+4yz = -7$?

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -7$$

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda^2 -21\lambda - 98 = -(\lambda-7)^2(\lambda+2)$$

Ejemplo. ¿Que superficie representa la ecuación $3x^2+6y^2+3z^2-4xy+8xz+4yz = -7$?

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -7$$

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda^2 -21\lambda - 98 = -(\lambda-7)^2(\lambda+2)$$

Los valores propios son

Ejemplo. ¿Que superficie representa la ecuación $3x^2+6y^2+3z^2-4xy+8xz+4yz = -7$?

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -7$$

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda^2 -21\lambda - 98 = -(\lambda-7)^2(\lambda+2)$$

Los valores propios son $-2, 7, 7$

Ejemplo. ¿Que superficie representa la ecuación $3x^2+6y^2+3z^2-4xy+8xz+4yz = -7$?

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -7$$

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98 = -(\lambda-7)^2(\lambda+2)$$

Los valores propios son -2, 7, 7 y en una base de vectores propios la matriz queda

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$$

Ejemplo. ¿Que superficie representa la ecuación $3x^2+6y^2+3z^2-4xy+8xz+4yz = -7$?

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -7$$

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda^2 -21\lambda - 98 = -(\lambda-7)^2(\lambda+2)$$

Los valores propios son -2, 7, 7 y en una base de vectores propios la matriz queda

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -7$$

la ecuación en estas coordenadas es ...

Ejemplo. ¿Que superficie representa la ecuación $3x^2+6y^2+3z^2-4xy+8xz+4yz = -7$?

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -7$$

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda^2 -21\lambda - 98 = -(\lambda-7)^2(\lambda+2)$$

Los valores propios son -2, 7, 7 y en una base de vectores propios la matriz queda

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -7$$

la ecuación en estas coordenadas es $-2x'^2 + 7y'^2 + 7z'^2 = -7$

Y la superficie es ...

Ejemplo. ¿Que superficie representa la ecuación $3x^2+6y^2+3z^2-4xy+8xz+4yz = -7$?

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -7$$

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda^2 -21\lambda - 98 = -(\lambda-7)^2(\lambda+2)$$

Los valores propios son -2, 7, 7 y en una base de vectores propios la matriz queda

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -7$$

la ecuación en estas coordenadas es $-2x'^2 + 7y'^2 + 7z'^2 = -7$

Y la superficie es un hiperboloide de revolución de dos hojas.

Ejemplo. ¿Que superficie representa la ecuación $3x^2+6y^2+3z^2-4xy+8xz+4yz = -7$?

Si queremos saber la posición del hiperboloide necesitamos los vectores propios de

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿Que superficie representa la ecuación $3x^2+6y^2+3z^2-4xy+8xz+4yz = -7$?

Si queremos saber la posición del hiperboloide necesitamos los vectores propios de

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = -2$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 7$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿Que superficie representa la ecuación $3x^2+6y^2+3z^2-4xy+8xz+4yz = -7$?

Si queremos saber la posición del hiperboloide necesitamos los vectores propios de

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = -2$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 7$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿Que superficie representa la ecuación $3x^2+6y^2+3z^2-4xy+8xz+4yz = -7$?

Si queremos saber la posición del hiperboloide necesitamos los vectores propios de

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = -2$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y un vector propio es} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 7$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{y un vector propio es} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \quad \text{y otro vector propio es} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿Que superficie representa la ecuación $3x^2+6y^2+3z^2-4xy+8xz+4yz = -7$?

Si queremos saber la posición del hiperboloide necesitamos los vectores propios de

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = -2$

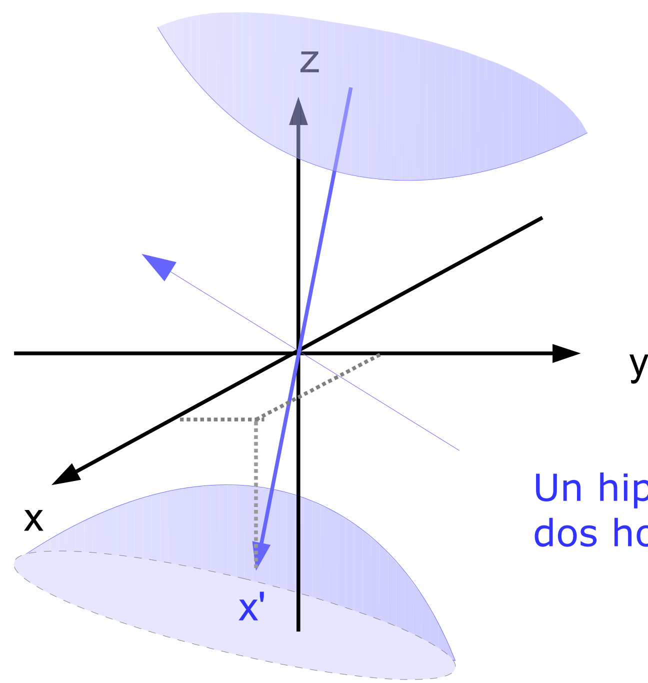
$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$ y un vector propio es $$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$ *este vector da la direccion del eje x'*

Para $\lambda = 7$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$ y un vector propio es $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ y otro vector propio es $$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿Que superficie representa la ecuación $3x^2+6y^2+3z^2-4xy+8xz+4yz = -7$?

Como todas las combinaciones lineales de dos vectores propios con el mismo valor propio son vectores propios, el plano generado por (1,0,1) y (1,-2,0) esta formado por vectores propios (esto dice que es una superficie de revolución) *y cualquier par de direcciones ortogonales en este plano pueden usarse como los ejes y' y z'.*



Un hiperboloide de revolución de dos hojas alrededor del eje x'

Consideremos finalmente las ecuaciones cuadráticas con términos lineales.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz = J$$

Consideremos finalmente las ecuaciones cuadráticas con términos lineales.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz = J$$

Estas ecuaciones pueden escribirse como

$$X^T S X + V X = c$$

donde S es una matriz simétrica y V es el vector de los coeficientes lineales.

Si hacemos un cambio de coordenadas X'=TX donde T es una isometría,

la ecuación se convierte en

$$X^T T S T^{-1} X + V T^{-1} X = c$$

Consideremos finalmente las ecuaciones cuadráticas con términos lineales.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz = J$$

Estas ecuaciones pueden escribirse como

$$X^T S X + V X = c$$

donde S es una matriz simétrica y V es el vector de los coeficientes lineales.

Si hacemos un cambio de coordenadas $X'=TX$ donde T es una isometría,

la ecuación se convierte en

$$X^T T S T^{-1} X + V T^{-1} X = c$$

Como S es simétrica, existe una isometría T de modo que TST^{-1} es una matriz diagonal, así que al aplicar T se eliminan los términos cruzados y solo quedan términos cuadráticos y lineales.

Consideremos finalmente las ecuaciones cuadráticas con términos lineales.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz = J$$

Estas ecuaciones pueden escribirse como

$$X^T S X + V X = c$$

donde S es una matriz simétrica y V es el vector de los coeficientes lineales.

Si hacemos un cambio de coordenadas $X'=TX$ donde T es una isometría,

la ecuación se convierte en

$$X^T TST^{-1} X + VT^{-1} X = c$$

Como S es simétrica, existe una isometría T de modo que TST^{-1} es una matriz diagonal, así que al aplicar T se eliminan los términos cruzados y solo quedan términos cuadráticos y lineales.

Ahora podemos completar cuadrados y haciendo una traslación obtenemos una nueva ecuación cuadrática en la que cada coordenada aparece a lo mas una vez, y ya sabemos cómo son las soluciones de estas ecuaciones.

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x + 6y = 1$?

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x + 6y = 1$?

La ecuación puede escribirse

$$\begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} =$$

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x + 6y = 1$?

La ecuación puede escribirse

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x + 6y = 1$?

La ecuación puede escribirse

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

Los valores propios de la matriz son las raíces de

$$\text{Det} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x + 6y = 1$?

La ecuación puede escribirse

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

Los valores propios de la matriz son las raíces de

$$\mathrm{Det} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} =$$

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x + 6y = 1$?

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

Los valores propios de la matriz son las raíces de

$$\mathrm{Det} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)-4 = \lambda^2-5\lambda \qquad \text{así que } \lambda = 0{,}5$$

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x + 6y = 1$?

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

Los valores propios de la matriz son las raíces de

$$\mathrm{Det} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)-4 = \lambda^2-5\lambda \qquad \text{así que } \lambda = 0,5$$

Para $\lambda = 5$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 0$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x + 6y = 1$?

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

Los valores propios de la matriz son las raíces de

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)-4 = \lambda^2-5\lambda$$ así que $\lambda = 0,5$

Para $\lambda = 5$

$M-\lambda I=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y un vector propio es $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

Para $\lambda = 0$

$M-\lambda I=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y un vector propio es $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x + 6y = 1$?

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

$\text{Det} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)-4 = \lambda^2-5\lambda$ así que $\lambda = 0,5$

Para $\lambda = 5$

$M-\lambda I = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y un vector propio es $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Para $\lambda = 0$

$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y un vector propio es $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x + 6y = 1$?

Si hacemos la isometría que envía (1,0) y (0,1) a los vectores propios unitarios $(^1/_{\sqrt{5}}, {}^2/_{\sqrt{5}})$ $(^2/_{\sqrt{5}}, {}^{-1}/_{\sqrt{5}})$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ^1/_{\sqrt{5}} & -^2/_{\sqrt{5}} \\ ^2/_{\sqrt{5}} & ^1/_{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x + 6y = 1$?

Si hacemos la isometría que envía (1,0) y (0,1) a los vectores propios unitarios $(^1/_{\sqrt{5}}, ^2/_{\sqrt{5}})$ $(^2/_{\sqrt{5}}, ^{-1}/_{\sqrt{5}})$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ^1/_{\sqrt{5}} & ^{-2}/_{\sqrt{5}} \\ ^2/_{\sqrt{5}} & ^1/_{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ^1/_{\sqrt{5}} & ^2/_{\sqrt{5}} \\ ^{-2}/_{\sqrt{5}} & ^1/_{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x + 6y = 1$?

Si hacemos la isometría que envía (1,0) y (0,1) a los vectores propios unitarios $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ $(2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

entonces la ecuación queda

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x + 6y = 1$?

Si hacemos la isometría que envía (1,0) y (0,1) a los vectores propios unitarios
$({}^{1}/_{\sqrt{5}},{}^{2}/_{\sqrt{5}})$ $({}^{2}/_{\sqrt{5}},{}^{-1}/_{\sqrt{5}})$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{1}/_{\sqrt{5}} & {}^{-2}/_{\sqrt{5}} \\ {}^{2}/_{\sqrt{5}} & {}^{1}/_{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{1}/_{\sqrt{5}} & {}^{2}/_{\sqrt{5}} \\ {}^{-2}/_{\sqrt{5}} & {}^{1}/_{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

entonces la ecuación queda

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{1}/_{\sqrt{5}} & {}^{-2}/_{\sqrt{5}} \\ {}^{2}/_{\sqrt{5}} & {}^{1}/_{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{1}/_{\sqrt{5}} & {}^{2}/_{\sqrt{5}} \\ {}^{-2}/_{\sqrt{5}} & {}^{1}/_{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{1}/_{\sqrt{5}} & {}^{2}/_{\sqrt{5}} \\ {}^{-2}/_{\sqrt{5}} & {}^{1}/_{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

o sea

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}^{-9}/_{\sqrt{5}} & {}^{12}/_{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x + 6y = 1$?

Si hacemos la isometría que envía (1,0) y (0,1) a los vectores propios unitarios $(^1/_{\sqrt{5}}, ^2/_{\sqrt{5}})$ $(^2/_{\sqrt{5}}, ^{-1}/_{\sqrt{5}})$

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ^1/_{\sqrt{5}} & ^{-2}/_{\sqrt{5}} \\ ^2/_{\sqrt{5}} & ^1/_{\sqrt{5}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ^1/_{\sqrt{5}} & ^2/_{\sqrt{5}} \\ ^{-2}/_{\sqrt{5}} & ^1/_{\sqrt{5}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}$$

entonces la ecuación queda

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{vmatrix} ^1/_{\sqrt{5}} & ^{-2}/_{\sqrt{5}} \\ ^2/_{\sqrt{5}} & ^1/_{\sqrt{5}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ^1/_{\sqrt{5}} & ^2/_{\sqrt{5}} \\ ^{-2}/_{\sqrt{5}} & ^1/_{\sqrt{5}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} ^1/_{\sqrt{5}} & ^2/_{\sqrt{5}} \\ ^{-2}/_{\sqrt{5}} & ^1/_{\sqrt{5}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = 1$$

o sea

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} + \begin{pmatrix} ^{-9}/_{\sqrt{5}} & ^{12}/_{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = 1$$

así que la ecuación transformada es $5x'^2 - ^9/_{\sqrt{5}}\, x' + ^{12}/_{\sqrt{5}}\, y' = 1$

Ejemplo. ¿Que curva representa la ecuación $x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x + 6y = 1$?

Si hacemos la isometría que envía (1,0) y (0,1) a los vectores propios unitarios
$(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ $(2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

entonces la ecuación queda

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

o sea

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9/\sqrt{5} & 12/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

así que la ecuación transformada es $5x'^2 - 9/\sqrt{5}\, x' + 12/\sqrt{5}\, y' = 1$ y podemos completar cuadrados y hacer una traslación para eliminar el termino lineal en x quedando $5x''^2 + 12/\sqrt{5}\, y'' = 0$ que es una parábola.

Corolario. Las soluciones de cada ecuación cuadrática en 3 variables

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz=J$$

forman un elipsoide, hiperboloide, paraboloide, un cono, un cilindro, dos planos, un plano, una recta, un punto o el vacío.

Demostración ?

Corolario. Las soluciones de cada ecuación cuadrática en 3 variables

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz=J$$

forman un elipsoide, hiperboloide, paraboloide, un cono, un cilindro, dos planos, un plano, una recta, un punto o el vacío.

Demostración. Todas las ecuaciones de segundo grado se pueden convertir en ecuaciones cuadráticas sin términos cruzados usando isometrías, y estas pueden convertirse en ecuaciones donde cada variable aparezca a lo mas una vez usando traslaciones. Ya sabemos la forma de las soluciones de estas ecuaciones, y las transformaciones que les hicimos no cambian su forma. ●

Ejemplo. ¿Que superficie representa $x^2+y^2+z^2+2xy+4xz+6yz+x+2y+3z = 1$?

Ejemplo. ¿Que superficie representa $x^2+y^2+z^2+2xy+4xz+6yz+x+2y+3z = 1$?

La ecuación puede escribirse

$$(\qquad\qquad)\begin{pmatrix} \qquad & \qquad & \qquad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \qquad \\ \\ \\ \end{pmatrix} + (\qquad\qquad)\begin{pmatrix} \qquad \\ \\ \\ \end{pmatrix} =$$

Ejemplo. ¿Que superficie representa $x^2+y^2+z^2+2xy+4xz+6yz+x+2y+3z = 1$?

La ecuación puede escribirse

$$(x\ \ y\ \ z)\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} + (1\ \ 2\ \ 3)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = 1$$

Ejemplo. ¿Que superficie representa $x^2+y^2+z^2+2xy+4xz+6yz+x+2y+3z = 1$?

La ecuación puede escribirse

$$(x \;\; y \;\; z)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (1 \;\; 2 \;\; 3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

Los valores propios de la matriz son las raíces de

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿Que superficie representa $x^2+y^2+z^2+2xy+4xz+6yz+x+2y+3z = 1$?

La ecuación puede escribirse

$$(x\ \ y\ \ z)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (1\ \ 2\ \ 3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

Los valores propios de la matriz son las raíces de

$$\text{Det}\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 3 \\ 2 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

Ejemplo. ¿Que superficie representa $x^2+y^2+z^2+2xy+4xz+6yz+x+2y+3z = 1$?

La ecuación puede escribirse

$$(x \;\; y \;\; z)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (1 \;\; 2 \;\; 3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

Los valores propios de la matriz son las raíces de

$$\text{Det}\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 3 \\ 2 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3-14(1-\lambda)+12 = -\lambda^3 + 3\lambda^2+11\lambda-1$$

Ejemplo. ¿Que superficie representa $x^2+y^2+z^2+2xy+4xz+6yz+x+2y+3z = 1$?

La ecuación puede escribirse

$$(x \;\; y \;\; z)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (1 \;\; 2 \;\; 3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

Los valores propios de la matriz son las raíces de

$$\text{Det}\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 3 \\ 2 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3-14(1-\lambda)+12 = -\lambda^3 + 3\lambda^2+11\lambda-1$$

¿Cuales son los valores propios?

Ejemplo. ¿Que superficie representa $x^2+y^2+z^2+2xy+4xz+6yz+x+2y+3z = 1$?

La ecuación puede escribirse

$$(x\ \ y\ \ z)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (1\ \ 2\ \ 3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

Los valores propios de la matriz son las raíces de

$$\text{Det}\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 3 \\ 2 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3-14(1-\lambda)+12 = -\lambda^3 + 3\lambda^2+11\lambda-1$$

No es fácil hallar las raíces, pero es fácil ver que hay dos raíces positivas y una negativa.

Ejemplo. ¿Que superficie representa $x^2+y^2+z^2+2xy+4xz+6yz+x+2y+3z = 1$?

La ecuación puede escribirse

$$(x\ \ y\ \ z)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (1\ \ 2\ \ 3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

Los valores propios de la matriz son las raíces de

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 3 \\ 2 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3-14(1-\lambda)+12 = -\lambda^3 + 3\lambda^2+11\lambda-1$$

No es fácil hallar las raíces, pero es fácil ver que hay dos raíces positivas y una negativa.

Al cambiar de coordenadas con una isometría y hacer una traslación para quitar los términos lineales la ecuación debe quedar algo como

$x'^2+y'^2-z'^2 = c$ (con otros coeficientes pero del mismo signo)

Ejemplo. ¿Que superficie representa $x^2+y^2+z^2+2xy+4xz+6yz+x+2y+3z = 1$?

La ecuación puede escribirse

$$(x \;\; y \;\; z)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (1 \;\; 2 \;\; 3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

Los valores propios de la matriz son las raíces de

$$\text{Det}\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 3 \\ 2 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3-14(1-\lambda)+12 = -\lambda^3 + 3\lambda^2+11\lambda-1$$

No es fácil hallar las raíces, pero si podemos ver que hay dos raíces positivas y una negativa.

Al cambiar de coordenadas con una isometría y hacer una traslación para quitar los términos lineales la ecuación debe quedar algo como

$x'^2+y'^2-z'^2 = c$ (con otros coeficientes pero del mismo signo)

Así que la superficie es un hiperboloide de una o dos hojas, o un cono (depende de c)

Simetrias

Las cónicas tienen uno o dos ejes de simetría, que son perpendiculares.

Las cuádricas tienen 2 o 3 planos de simetría que son perpendiculares.

¿Qie pasará si a una cónica o una cuádrica le aplicamos una transformación lineal que mande sus ejes direcciones que no son perpendiculares?

Uno podría esperar que la simetría se pierda. Pero esto diría que la transformada ya no es una cónica o una cuádrica.

Corolario. Al aplicarle una transformación lineal a una cónica (o una cuádrica) se obtiene siempre una cónica (u una cuádrica).

Demostración ?

Corolario. Al aplicarle una transformación lineal a una cónica (o una cuádrica) se obtiene siempre una cónica (u una cuádrica).

Demostración. La cónica (o cuádrica) tiene una ecuación de segundo grado, al aplicarle una transformación lineal esta ecuación se convierte en que es otra ecuación de segundo grado, que debe corresponder a otra cónica (o cuádrica). •

Corolario. Al aplicarle una transformación lineal a una cónica (o una cuádrica) se obtiene siempre una cónica (u una cuádrica).

Demostración. La cónica (o cuádrica) tiene una ecuación de segundo grado, al aplicarle una transformación lineal esta ecuación se convierte en que es otra ecuación de segundo grado, que debe corresponder a otra cónica (o cuádrica). •

Ojo: No es cierto que los ejes de simetría vayan a dar a los ejes de simetría!

Ejemplo. ¿Como cambia la forma de la elipse $4x^2+y^2 = 36$ al aplicarle la transformación lineal $T(x,y)=(x+y,y)$?

Ejemplo. ¿Como cambia la forma de la elipse $4x^2+y^2 = 36$ al aplicarle la transformación lineal T(x,y)=(x+y,y)?

La ecuación se escribe

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

y la transformación es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿Como cambia la forma de la elipse $4x^2+y^2 = 36$ al aplicarle la transformación lineal $T(x,y)=(x+y,y)$?

La ecuación se escribe

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 36$$

y la transformación es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ejemplo. ¿Como cambia la forma de la elipse $4x^2+y^2 = 36$ al aplicarle la transformación lineal T(x,y)=(x+y,y)?

La ecuación se escribe

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 36$$

y la transformación es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

al hacer la transformación la ecuación se convierte en

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$$

Ejemplo. ¿Como cambia la forma de la elipse $4x^2+y^2 = 36$ al aplicarle la transformación lineal T(x,y)=(x+y,y)?

La ecuación se escribe

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 36$$

y la transformación es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

al hacer la transformación la ecuación se convierte en

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 36$$

o sea

Ejemplo. ¿Como cambia la forma de la elipse $4x^2+y^2 = 36$ al aplicarle la transformación lineal $T(x,y)=(x+y,y)$?

La ecuación se escribe

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 36$$

y la transformación es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

al hacer la transformación la ecuación se convierte en

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 36$$

o sea

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$$

Ejemplo. ¿Como cambia la forma de la elipse $4x^2+y^2 = 36$ al aplicarle la transformación lineal $T(x,y)=(x+y,y)$?

La ecuación se escribe

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 36$$

y la transformación es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

al hacer la transformación la ecuación se convierte en

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 36$$

o sea

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 36$$

Ejemplo. ¿Como cambia la forma de la elipse $4x^2+y^2 = 36$ al aplicarle la transformación lineal $T(x,y)=(x+y,y)$?

La ecuación se escribe

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 36$$

y la transformación es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

al hacer la transformación la ecuación se convierte en

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 36$$

o sea

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 36$$

La ecuación es cuadrática y debe corresponder a una cónica, si queremos saber su forma necesitamos hallar los valores propios de esta matriz, y si queremos saber su posición necesitamos los vectores propios.

Ejemplo. ¿Como cambia la forma de la elipse $4x^2+y^2 = 36$ al aplicarle la transformación lineal $T(x,y)=(x+y,y)$?

Valores propios

La ecuación transformada es

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 36$$

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -4 \\ -4 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(5-\lambda)-16 = \lambda^2-9\lambda+4$$

así que $\lambda = \dfrac{9\pm\sqrt{65}}{2} \approx 8.53,\ 0.47$

Así que en la base de vectores propios la ecuación transformada queda aprox.

$$\begin{pmatrix} x'' & y'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8.53 & 0 \\ 0 & 0.47 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = 36$$

La cónica transformada tiene la forma de la elipse $8.531\, x^2 + 0.469\, y^2 = 36$

Ejemplo. ¿Como cambia la forma de la elipse $4x^2+y^2 = 36$ al aplicarle la transformación lineal T(x,y)=(x+y,y)?

Vectores propios

La ecuación transformada es

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 36$$

Para saber la posición de esta cónica necesitamos hallar los vectores propios

Para $\lambda \approx 8.53$

$$M'-\lambda I = \begin{pmatrix} -4.53 & -4 \\ -4 & -3.53 \end{pmatrix}$$ y un vector propio es $$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.53 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Y para $\lambda \approx 0.47$

$$M'-\lambda I = \begin{pmatrix} -3.53 & -4 \\ -4 & 4.53 \end{pmatrix}$$ y un vector propio es $$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.53 \\ 4 \end{pmatrix}$$

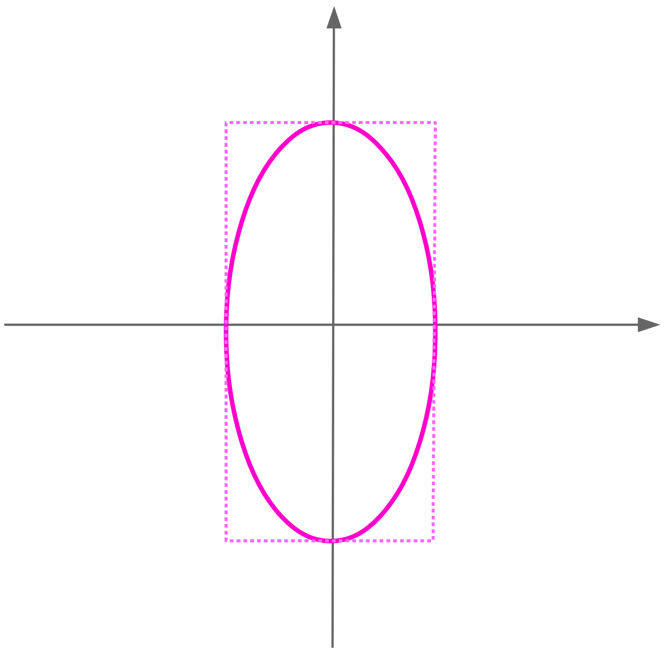
Ejemplo. ¿Como cambia la forma de la elipse $4x^2+y^2 = 36$ al aplicarle la transformación lineal $T(x,y)=(x+y,y)$?

La ecuación original es

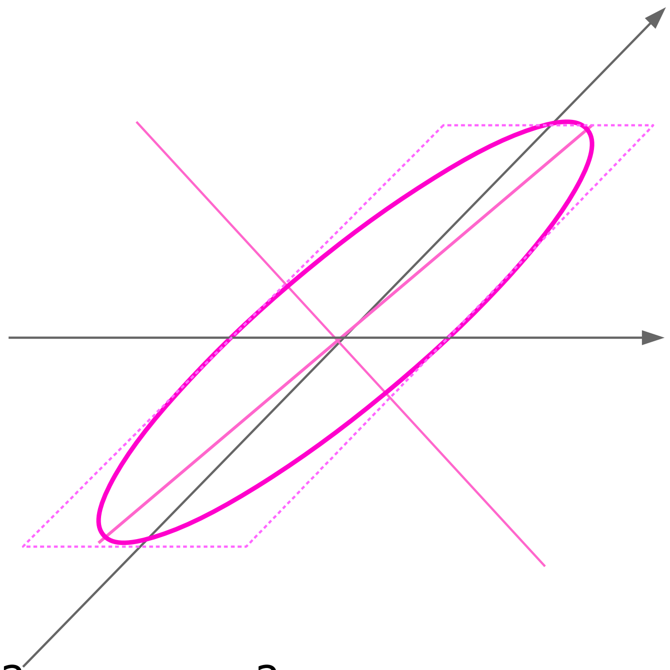
$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 36$$

La ecuación transformada es

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 36$$



$4x^2+y^2 = 36$



$4x^2 - 8xy + 5y^2 = 36$