Lógica deductiva

Una **proposición** es una oración que afirma o niega algo, y que solo puede ser verdadera o falsa (aunque no sepamos).

Ejemplos de proposiciones:

A : *Los murciélagos son aves*

B : *El sol brilla*

C : *No hay vida extraterrestre*

D : *3 > 5*

E : *Los triángulos tienen 3 lados*

Dos proposiciones son **equivalentes** si significan lo mismo.

Ejemplos:

10 es múltiplo de 5 es equivalente a *5 es divisor de 10*

A es el hijo de B es equivalente a *B es el padre o la madre de A*

Las proposiciones pueden combinarse de distintas maneras para obtener otras proposiciones:

La **negación** de una proposición P es la proposición que dice que P es falsa, se le denota por ¬P y se dice "no P".

B : *El sol brilla*	¬B : *El sol no brilla*
C : *No hay vida extraterrestre*	¬C : *Hay vida extraterrestre*
D : *3 > 5*	¬D : *3 ≤ 5*

Observar que ¬P es verdadera cuando P es falsa y ¬P es falsa cuando P es verdadera.

La negación de P consiste de todas las alternativas posibles a P, así que la negación de la negación de P es P:

E : *Los triángulos tienen 3 lados*

¬*E : Los triángulos no tienen 3 lados*

¬¬E : *Los triángulos sí tienen 3 lados* (que equivale a E)

La **conjunción** de dos proposiciones P y Q es la proposición que dice que *ambas* son verdaderas, se le denota por $P \wedge Q$ y se dice "P y Q".

Ejemplos:

$A \wedge B$: *Los murciélagos son aves y el sol brilla*

Si $F : x \leq y$, $G : x \geq y$ entonces $F \wedge G : x = y$

La **disyunción** de dos proposiciones P y Q es la proposición que dice que *al menos una* de ellas es verdadera, se le denota por $P \vee Q$ y se dice "P o Q".

Ejemplos:

$A \vee B$: *Los murciélagos son aves o el sol brilla*

Si $H : x < y$ $I : x > y$ *entonces* $H \vee I : x \neq y$

La "o" en $P \vee Q$ es *inclusiva*, es cierta si una o ambas proposiciones sean ciertas.

Ejemplo. Si J : *6 es múltiplo de 2* y K : *6 es múltiplo de 3*

$J \vee K$: *6 es múltiplo de 2 o de 3* es verdadera.

¿Como será la negación de una conjunción? $P \wedge Q$ dice dice que las dos son ciertas.

Negar $P \wedge Q$ equivale a decir que al menos una de las dos es falsa, es decir

$$\boxed{\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q}$$

Ejemplo:

$A \wedge B$: *Los murciélagos son aves **y** el sol brilla*

$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$: *Los murciélagos no son aves **o** el sol no brilla*

¿Como será la negación de una disyunción? $P \vee Q$ dice que al menos una de las dos es cierta.

Negar $P \vee Q$ equivale a decir que ninguna de las dos es cierta, es decir que ambas son falsas

$$\boxed{\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q}$$

Ejemplo:

$A \vee B$: *Los murciélagos son aves **o** el sol no brilla*

$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$: *Los murciélagos no son aves **y** el sol no brilla*

La **condicional** $P \rightarrow Q$ es la proposición que dice que si P es cierta entonces Q también es cierta, se lee "si P entonces Q".

Ejemplos:

L : *n es múltiplo de 4* M : *n es par*

$L \rightarrow M$: *Si n es múltiplo de 4 entonces n es par* es verdadera

$M \rightarrow L$: *Si n es par entonces n es múltiplo de 4* es falsa

Observar que $P \rightarrow Q$ no dice que P o Q sean verdaderas, únicamente dice que si P es verdadera entonces Q también lo es. Así que negar $P \rightarrow Q$ equivale a decir que P es verdadera y Q no lo es.

$$\boxed{\neg(P \rightarrow Q) = P \wedge \neg Q}$$

Ejemplo:

$M \rightarrow L$: *Si n es par entonces n es múltiplo de 4*

$\neg(M \rightarrow L) = M \wedge \neg L$: *n es par y n no es múltiplo de 4*

Sabiendo que $\neg(P \rightarrow Q)$ es equivalente a $P \wedge \neg Q$ podemos ver a que es equivalente $P \rightarrow Q$:

$P \rightarrow Q = \neg\neg(P \rightarrow Q) = \neg(P \wedge \neg Q) = \neg P \vee Q$ y por esta razón $\neg Q \rightarrow \neg P = \neg\neg Q \vee \neg P = Q \vee \neg P$ así que

$$\boxed{P \rightarrow Q \quad = \quad \neg P \vee Q \quad = \quad \neg Q \rightarrow \neg P}$$

Ejemplo. Las tres proposiciones siguientes son equivalentes:

$L \rightarrow M$: *Si n es múltiplo de 4 entonces n es par*

||

$\neg L \vee M$: *n no es múltiplo de 4 o n es par*

||

$\neg M \rightarrow \neg L$: *Si n no es par entonces n no es múltiplo de 4*

Los conectores lógicos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ pueden combinarse de muchas maneras para obtener proposiciones mas complejas. Por ejemplo, la **doble condicional** $P \leftrightarrow Q$ es la afirmación que dice que si P es cierta entonces Q es cierta y que si Q es cierta entonces P es cierta. Se le denota por $P \leftrightarrow Q$ y se lee "P si y solo si Q". Así que $P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

Ejemplos:

$V \leftrightarrow S$: *Hoy es viernes si y solo si mañana es sábado*

$L \leftrightarrow A$: *Los lados del triángulo T son iguales si y solo si los ángulos de T son iguales*

Ejercicios.

1. Escribe las siguientes proposiciones como combinaciones de proposiciones mas simples usando los conectores lógicos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$.

A : *Las motos son rápidas y peligrosas*

B : *Si hoy es martes mañana es miércoles*

C : *Los reptiles no tienen alas ni aletas*

D : *Cuando llueve hace frio*

E : *n es divisible entre 2 siempre que n es par.*

2. Escribe las negaciones de las siguientes proposiciones:

F : *Los insectos tienen 6 patas y los arácnidos tienen 8*

G : *Mañana es martes o miércoles*

H : *Cuando llueve hace frio*

I : *Si* $a<b$ *entonces* $a^2 < b^2$

3. Escribe proposiciones equivalentes sin usar condicionales:

J : *Si n es divisible entre 2 entonces n es par*

K : *Si un polígono no tiene 3 lados entonces no es un triángulo*

4. Usa los conectores $\neg, \wedge, \vee$ para construir un o *exclusivo*, es decir, una combinación de P y Q que sea cierta cuando P sea cierta o Q sea cierta, pero no cuando ambas sean ciertas.

5. Escribe proposiciones equivalentes a las siguientes usando únicamente la conjunción, la disyunción y la negación (sin usar condicionales)

a. $\neg P \rightarrow Q$ b. $\neg(P \rightarrow Q)$ c. $P \leftrightarrow Q$ d. $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$

Tablas de verdad (opcional)

La verdad o falsedad de las proposiciones que se obtienen a partir de otras por medio de los conectores $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ solo depende de la verdad o falsedad de las proposiciones originales y no de lo que estas digan. Podemos resumir esto por medio de las tablas de verdad, que expresan la veracidad o falsedad de la combinación en términos de la veracidad o falsedad de las partes:

P	$\neg$P
V	F
F	V

P	Q	P $\wedge$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	Q	P $\vee$ Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

P	Q	P $\rightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Hay muchas maneras de combinar proposiciones por medio de conectivos lógicos, pero distintas combinaciones pueden ser equivalentes: esto pasa cuando sus tablas de verdad son iguales.

Como las tablas de verdad de P $\rightarrow$ Q , $\neg$P $\vee$ Q y $\neg$Q $\rightarrow \neg$P , las tres proposiciones son equivalentes:

P	Q	P $\rightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$\neg$P $\vee$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$\neg$P $\rightarrow$ $\neg$Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejercicios.

6. Usando los conectores $\neg, \wedge, \vee$ construye combinaciones de P y Q cuyas tablas de verdad sean

a.

P	Q	
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

b.

P	Q	
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

c.

P	Q	
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	V

7. ¿Cuantas proposiciones *no equivalentes* podrán construirse combinando 2 proposiciones? ¿Y combinando 3 proposiciones?

Significados y cuantificadores.

El lenguaje cotidiano puede ser ambiguo, pero al considerar una proposición su significado debe quedar totalmente claro.

> *Todos los perros no ladran* no es nada claro: podría interpretarse de distintas maneras como *No todas los perros ladran* o como *Ningún perro ladra*.
>
> *Ningún perro no ladra* es aun mas confusa.
>
> *Los perros tienen 4 patas* puede querer decir que como especie los perros tienen 4 patas (lo que es cierto) o que cada perro individualmente tiene 4 patas (lo que es falso), así que hay que aclarar a que nos referimos.
>
> *Algunos números no tienen raíz cuadrada* es ambiguo porque no dice a que clase de números se refiere y la verdad o falsedad de la afirmación depende de eso, hay que especificarlo.

En lógica y en matemáticas las palabras tienen significados muy precisos, que pueden diferir del que se les da en el lenguaje común. Al afirmar algo estamos diciendo que es cierto *siempre*, *sin excepciones*, a menos que lo aclaremos explícitamente.

Al decir *Las aves vuelan* queremos decir que *todas las aves vuelan* sin excepciones.

Al decir *Los mamíferos no vuelan* queremos decir que *ningún mamífero vuela* sin excepción.

Para escribir con precisión usamos los siguientes **cuantificadores**

cuantificador	*significado*	*notación formal*	
todos	*no existe ninguno que no*	$\forall$	para todo
algunos	*existe al menos uno*	$\exists$	existe
ningún	*no existe ninguno*	$\nexists$	no existe

Ejemplos:

Todos los gnomos son verdes = *Cada gnomo es verde* = *No existen gnomos que no sean verdes*

Al afirmar que *todos los gnomos son verdes* **no** se afirma que los gnomos existan, solo que de existir deben ser verdes.

Algunos gnomos son verdes = *Existen gnomos verdes* = *Hay al menos un gnomo verde*

Al afirmar que *algunos gnomos son verdes* **no** afirmamos que *algunos gnomos no sean verdes!*

Ningún gnomo es verde = *No existen gnomos verdes*

No afirma que existen o no existen los gnomos, sólo afirma que no hay ninguno verde.

No todos los gnomos son verdes = *Existen gnomos que no son verdes*

Sabiendo el significado de los cuantificadores *todos*, *algunos* y *ninguno*, las negaciones de proposiciones que los contienen se aclaran:

A : *Todas las aves vuelan* ¬A : *Algunas aves no vuelan*

B : *Ningún mamífero vuela* ¬B : *Algunos mamíferos vuelan*

C : *Algunas estrellas brillan* ¬C : *Ninguna estrella brilla*

D : *Algunas estrellas no brillan* ¬D : *Todas las estrellas brillan*

E: *Cada círculo tiene centro* ¬E : *Existe un círculo que no tiene centro*

Algunas veces los cuantificadores no se escriben sino que se sobreentienden

Las bisectrices de un triángulo son concurrentes significa que las bisectrices de *cada* triángulo son concurrentes (no significa que las bisecrices de un triángulo en particular sean concurrentes)

Dos rectas distintas se intersectan en 1 punto significa que *cada* par de rectas distintas se intersectan en 1 punto (no significa que existan 2 rectas distintas que se intersectan en 1 punto)

Lo anterior es fácil de adivinar si recordamos que las afirmaciones en matemáticas deben entenderse con la mayor generalidad posible.

Ejercicio.

8. Escribe las negaciones de las siguientes proposiciones, sin empezar con *no.*

A : *Todos los hombres son mortales*

B : *Ninguna araña tiene 6 patas*

C : *Algunos números primos son pares*

D : *Algunas plantas no tienen raíces*

E : *Cada rombo tiene 4 lados iguales*

F : *Los insectos tienen antenas*

G : *Hay insectos que no tienen alas*

H: *Todo número real es el cuadrado de un número complejo*

I: *Para cada punto p fuera de una recta L, existe una recta por p que es paralela a L*

Argumentos lógicos

Al combinar proposiciones por medio de $\neg$ $\wedge$ $\vee$ $\rightarrow$ es posible obtener proposiciones que siempre son verdaderas, o que siempre son falsas, independientemente de si las proposiciones iniciales eran verdaderas o falsas. Por ejemplo:

$P \vee \neg P$ siempre es verdadera, independientemente de P

$P \wedge \neg P$ siempre es falsa, independientemente de P

Las combinaciones de proposiciones que siempre son verdaderas se llaman **tautologías** y son importantes porque son la base de los razonamientos lógicos.

Ejemplos de tautologías:

$P \wedge Q \rightarrow P$ $P \rightarrow P \vee Q$ $(P \vee Q) \wedge \neg P \rightarrow Q$ $P \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$

$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P$ $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$

Las combinaciones de proposiciones que siempre son falsas se llaman **contradicciones**.

Ejercicio.

9. ¿Cuales de las siguientes proposiciones son tautologías?

a. $(P \vee Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ b. $(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow \neg Q)$ c. $(P \rightarrow Q) \vee (\neg P \rightarrow Q)$

d. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ e. $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$

¿Cuales de las siguientes proposiciones son contradicciones?

f. $P \rightarrow \neg P$ g. $(P \rightarrow \neg P) \wedge P$ h. $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q)$

Un **argumento lógico** es un razonamiento que a partir de proposiciones verdaderas *siempre* obtiene conclusiones verdaderas sin importar que digan las proposiciones.

Los argumentos lógicos mas sencillos usan las condicionales que son tautologías (las que son siempre ciertas) llamadas **implicaciones** y denotadas por $\Rightarrow$.

Ejemplos de argumentos lógicos usando implicaciones:

$(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$

Hoy es sábado o domingo y *Hoy no es sábado* implican *Hoy es domingo*

$(P \rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$

Si cae nieve hace frio y *Cae nieve* implican *Hace frio*

Hay argumentos que *parecen* lógicos pero no lo son, estos son llamados **falacias**. (del latín *fallatia* = *engaño*). Algunas falacias comunes vienen de usar condicionales que no son tautologías.

Ejemplos de argumentos lógicos y argumentos inválidos (falacias):

$(P \to Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$ *es un argumento lógico*

Si cae nieve hace frio y *No hace frio* implican *No cae nieve*

$(P \to Q) \wedge \neg P \cancel{\Rightarrow} \neg Q$ *es una falacia*

Si cae nieve hace frio y *No cae nieve* **no** implican *No hace frio*

$(P \to Q) \wedge Q \cancel{\Rightarrow} P$ *es una falacia*

Si cae nieve hace frio y *Hace frio* **no** implican *Cae nieve*

$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow (P \to R)$ *es un argumento lógico*

Si cae nieve hace frio y *Si hace frio me resfrío* implican *Si cae nieve me resfrío*

Ejercicios.

10. ¿Que conclusiones lógicas puedes obtener basándote *únicamente* en lo que se dice?

   a. (*Si m divide a n entonces m^2 divide a n^2*) y (*m^2 no divide a n^2*)

   b. (*Si m divide a n entonces m^2 divide a n^2*) y (*m no divide a n*)

   c. (*Si m divide a n entonces m^2 divide a n^2*) y (*m^2 divide a n^2*)

11. ¿Que conclusiones lógicas puedes obtener?

   a. $(P \to Q) \wedge (Q \to \neg P) \Rightarrow$

   b. $(P \vee Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow$

   c. $(P \to R) \wedge (\neg S \to \neg R) \Rightarrow$

Hay otro tipo de argumentos lógicos que se obtienen combinando de maneras mas sutiles las proposiciones con cuantificadores.

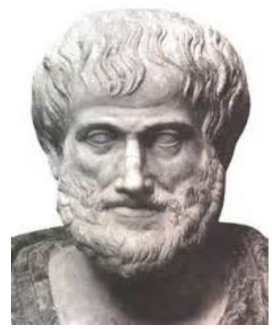
Ejemplos:

a. *Todos los pericos son aves* y *Todas las aves vuelan* $\Rightarrow$ *Todos los pericos vuelan*

b. *Ninguna iguana vuela* y *Todas las aves vuelan* $\Rightarrow$ *Ninguna iguana es ave*

c. *Algunos pájaros son aves* y *Todas las aves vuelan* $\Rightarrow$ *Algunos pájaros vuelan*

Los argumentos de este tipo son muy generales y muy útiles, fueron estudiados por primera vez por Aristoteles en el siglo 4AC. Hay que tener cuidado con esta clase de argumentos porque hay muchas combinaciones posibles, algunas son validas y son llamadas **silogismos** y otras son invalidas (son falacias).



Recordar que para que un argumento sea válido no basta con que la conclusión sea verdadera.

Ejemplos:

d. *Todos los pericos son aves* y *Algunas aves vuelan* $\not\Rightarrow$ *Algunos pericos vuelan*

Es verdad que algunos pericos vuelan, pero eso no es una consecuencia lógica de lo anterior. Para ver que el argumento anterior es inválido basta cambiar *pericos* por *pingüinos*.

e. *Ninguna iguana es ave* y *Todas las aves vuelan* $\not\Rightarrow$ *Ninguna iguana vuela*

Se puede ver que el argumento anterior es inválido cambiando *iguana* por *murciélago*.

f. *Ningún insecto es un ave* y *Ningún ave es un reptil* $\not\Rightarrow$ *Ningún insecto es un reptil*

se ve que el argumento es inválido cambiando *insecto* por *cocodrilo*.

g. *Hay políticos bandidos* y *Hay bandidos ricos* $\not\Rightarrow$ *Hay políticos ricos*

el argumento es inválido, basta cambiar *ricos* por *pobres* para verlo.

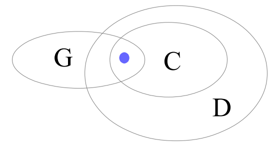
Lo importante de estos argumentos no es lo que dicen en particular, sino su estructura, la manera en que están conectadas las distintas partes. Su validez o invalidez se puede aclarar si los vemos de manera mas abstracta, sin referencia a cosas que ya conocemos, o si pensamos en conjuntos.

El lenguaje formal ayuda a aclarar la estructura de las afirmaciones y los argumentos lógicos. Por ejemplo, considerar la afirmación:

Todos los cazadores tienen dientes y algunos gatos son cazadores

si las escribimos como

Todos los C son D y algunos G son C



entonces podemos concluir que *algunos G son D*

que es *Algunos gatos tienen dientes*

Otro ejemplo.

Platón era un gran filósofo

Todos los griegos eran grandes filósofos

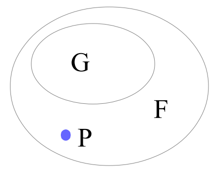
Por lo tanto Platón era griego

Si lo reescribimos como

P es F

Todos los G son F

Por lo tanto P es G

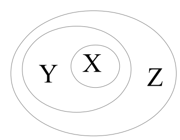


vemos que el argumento es invalido: que P sea F y todos los G sean F no dice que P sea G!

Platon sí era griego, pero eso no hace que el argumento sea valido!

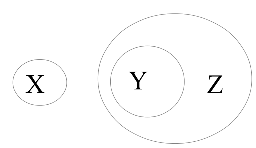
Algunos Silogismos, y como se ven usando conjuntos:

Todo X es Y y *Todo Y es Z* $\Rightarrow$ *Todo X es Z*



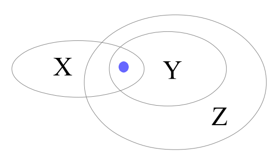
(el ejemplo a. es de este tipo)

Ningún X es Z y *Todo Y es Z* $\Rightarrow$ *Ningún X es Y*



(el ejemplo b. es de este tipo)

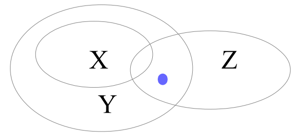
Algún X es Y y *Todo Y es Z* $\Rightarrow$ *Algún X es Z*



(el ejemplo c. es de este tipo)

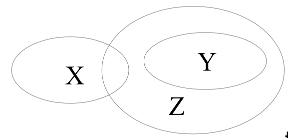
Algunas falacias, y como se ven usando conjuntos:

Todo X es Y y *Algún Y es Z* $\not\Rightarrow$ *Algún X es Z*



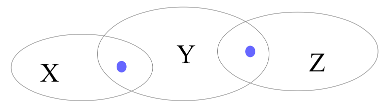
(Los Y que son Z no tienen que ser X) el ejemplo d. es de este tipo

Ningún X es Y y *Todo Y es Z* $\not\Rightarrow$ *Ningún X es Z*



(Pueden haber X que sean Z sin ser Y) el ejemplo e. es de este tipo

Algún X es Y y *Algún Y es Z* $\not\Rightarrow$ *Algún X es Z*



(Los Y que son X no tienen que ser los Y que son Z) el ejemplo g. es de este tipo

No hay que tratar de memorizar los distintos silogismos y falacias, son muchos y es fácil confundirse, el chiste está en entender por que unos argumentos son válidos y otros no.

¿Los siguientes argumentos serán válidos o no?

a. *Todos los matemáticos son científicos*
Algunos científicos están locos
así que algunos matemáticos están locos

b. *Todos los marcianos son verdes*
Ningún ser sin antenas es verde
Por lo tanto todos marcianos tienen antenas

c. *Ningún mentiroso es confiable*
Ninguno de mis amigos es mentiroso
Así que todos mis amigos son confiables.

d. *Algunos animales son cazadores*
Algunos cazadores son gatos
Entonces algunos animales son gatos.

(a no, b si, c no, d no)

Los silogismos se pueden combinar para obtener argumentos lógicos mas elaborados, Lewis Carrol (autor de Alicia en el país de las maravillas y aficionado a las matemáticas y la lógica) tiene ejemplos divertidos, donde a partir de premisas aparentemente no relacionadas hay que sacar una conclusión lógica. Aquí hay unos ejemplos sencillos:

Ningún pato sabe bailar
Ningún oficial se niega a bailar
Todas mis aves de corral son patos
Entonces...

Los colibríes son coloridos
Ningún pájaro grande come miel
Los pájaros que no comen miel son pardos
Entonces...

Los bebes son ilógicos
Nadie que maneje cocodrilos es despreciable
Las personas ilógicas no son apreciadas
Entonces...

Ejercicios.

Para que estos ejercicios les sean mas útiles háganlos en su cabeza. Ya que tengan una respuesta pueden comprobarla haciendo diagramas.

12. ¿Es lo mismo o no es lo mismo?
    a. *Todos los x son y* que *Todos los y son x*
    b. *Algunos x son y* que *Algunos y son x*
    c. *No todo x es y* que *No todo y es x*
    d. *Ningún x es y* que *Ningún y es x*
13. ¿Que conclusiones lógicas puedes obtener?
    a. Si *Algún X es Y* y *Ningún Y es Z*
    b. Si *Ningún X es Y* y *Algún Y es Z*
    c. Si *Algún X es Y* y *Algún Y no es Z*
14. ¿Que conclusiones lógicas puedes obtener? (a veces no se puede obtener nada)
    a. *Ningún reptil tiene pelo* y *Las serpientes son reptiles*
    b. *Los caballos tienen herraduras* y *Ningún humano tiene herraduras*
    c. *Ningún esquimal es europeo* y *Ningún europeo es marciano*
    d. *Algunos cuadriláteros son rectángulos* y *Los rectángulos son paralelogramos*
    e. *Algunas figuras son polígonos* y *Ningún circulo es un polígono*
    f. *Algunos cuadrúpedos son mamíferos* y *Algunos mamíferos nadan*
    g. *La suma de dos números impares es un número par* y *3 es un número impar*
    h. *La suma de dos números impares es un número par* y *6 es un número par*

Demostraciones.

Una **demostración** es un argumento lógico en el que cada paso esta plenamente justificado y es una consecuencia lógica inmediata de los anteriores.

En matemáticas todo se demuestra, aprender a hacer demostraciones toma tiempo y dedicación. Vamos a empezar haciendo algunas demostraciones sencillas.

Hay métodos de demostración directos y métodos indirectos, que a veces se combinan.

Demostraciones directas:

Como $(p \to r) \wedge (r \to q) \Rightarrow (p \to q)$ entonces podemos demostrar $p \to q$ mostrando que $p \to r$ y que $r \to q$ donde r es cualquier otra proposición.

Mas generalmente, para demostrar que si pasa A entonces pasa Z, podemos hacerlo *por pasos* buscando una serie de proposiciones, C, D, E, ... tales que podamos demostrar que si pasa A entonces pasa B, si pasa B entonces pasa C, si pasa C entonces pasa D.... hasta terminar en Z.

Ejemplos de demostraciones directas

- *Demostrar que Si algunos A son B y ningún B es C entonces algunos A no son C*

  Hipótesis 1: Existe x tal que x es A y x es B.
  Hipótesis 2: Si y es B entonces y no es C
  Por demostrar: Existe z tal que z es A y z no es C

  Demostración (*directa*):
  Por la hipótesis 1 existe x tal que x es A y x es B
  Como x es B entonces por la hipótesis 2 x no es C
  Así que x es A y x no es C, que es *lo que se quería demostrar*. □

- *Demostrar que El cuadrado de un entero par es par*

  Hipótesis: n es un entero par
  Por demostrar: n^2 es par

  Demostración (*directa*):
  Por la hipótesis n es par
  Entonces $n=2m$ para algún entero m
  Entonces $n^2 = (2m)^2 = 4m^2$
  Por lo tanto $n^2 = 2(2m^2)$ lo que dice que n^2 es par □

Ejercicio.

15. Demuestra que si todos los A son B y algunos C no son B entonces algunos A no son C

Demostraciones contrapositivas:

Como $p \to q$ es equivalente a $\neg q \to \neg p$ entonces podemos demostrar $p \to q$ demostrando la *contrapositiva* $\neg q \to \neg p$

Para demostrar que si pasa A entonces tiene que pasar B podemos **suponer** que B no pasa y mostrar que entonces tampoco pasa A.

Ejemplos de demostraciones contrapositivas:

- *Demostrar que Si algunos A no son B y todos los C son B entonces algunos A no son C*

  Hipótesis 1: Existe x tal que x es A y x no es B

  Hipótesis 2: Si y es C entonces y es B

  Por demostrar: Existe z tal que x es A y z no es C

  Demostración (*contrapositiva*):

  Supongamos que *no* existe z tal que z es A y z no es C

  Esto significa que si z es A entonces z es C

  Así que si z es A entonces (por hip 2) z es B

  Por lo tanto no existe z tal que z es A y z no es B *lo que niega la hipótesis 1.* □

- *Demostrar que Si el cuadrado de un número entero es impar, entonces el número es impar.*

  Hipótesis: n es un numero entero y n^2 es impar

  Por demostrar: n es impar

  Demostración (*contrapositiva*):

  Supongamos que la conclusión es falsa, es decir que n es par

  Entonces n=2m para algún entero m

  Por lo tanto $n^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$

  esto dice que n^2 es par lo que niega la hipótesis. □

Ejercicio.

16. Demuestra por contrapositiva que el cuadrado de un entero impar es impar.

Demostraciones por contradicción:

Si r es cualquier proposición *falsa*, entonces $p \to q$ es equivalente a $p \wedge \neg q \to r$
así que podemos demostrar $p \to q$ demostrando $p \wedge \neg q \to r$

Ejemplos de demostraciones por contradicción:

- *Demostrar que Si todos los A son B y ningún B es C entonces ningún A es C.*

Hipotesis 1: Si x es A entonces x es B

Hipotesis 2: Si y es B entonces y no es C

Por demostrar: Si z es A entonces z no es C

Demostración (*por contradicción*):

Supongamos que hay un z tal que z es A y z es C

Como z es a entonces (por hip 1) z es B

Como z es B entonces (por hip 2) z no es C

Por lo tanto, z es C y z no es C lo que es una contradicción. □

- *Demostrar que No existen 2 números naturales m y n tales que m / n = √2.*

Demostración (por contradicción)

Supongamos que existen m y n tales que $m/n = \sqrt{2}$

Podemos suponer que m y n no son ambos divisibles entre 2, o podríamos simplificar m/n.

$m/n = \sqrt{2}$ *entonces* $m^2/n^2 = 2$ así que $m^2 = 2n^2$

Como $m^2 = 2n^2$ entonces m^2 es par, así que m es par

m=2m' para algún número natural m´

Así que $(2m')^2 = 2n^2$ por lo tanto $4m'^2 = 2n^2$ o sea $2m'^2 = n^2$

por lo tanto n^2 es par, así que n es par

Por lo tanto m y n son ambos pares lo que contradice nuestra suposición. □

Ejercicio.

17. Demuestra por contradicción que no existen 2 números naturales m y n tales que $m / n = \sqrt{3}$.

Ejercicios de repaso.

18. Identifica cada proposición de la izquierda con una afirmación equivalente en la derecha:

a. $P \to Q$	a'. $P \vee Q$
b. $P \to \neg Q$	b' $\neg P \vee \neg Q$
c. $Q \to P$	c'. $\neg P \vee Q$
d. $\neg Q \to \neg P$	d'. $P \wedge \neg Q$
d. $\neg(P \to Q)$	e'. $\neg(\neg P \wedge Q)$

19. Muestra que los conectores lógicos pueden combinarse para obtener *cualquier* tabla de verdad.

20. Escribe las negaciones de las siguientes proposiciones:

a. *Algunas veces llueve*
b. *Todo es verdad y nada es mentira*
c. *Algunos perros no nadan y ningún gato vuela*
d. *Ningún bicho de 4 o 8 patas es un insecto*
e. *Si un bicho tiene 4 o 8 patas entonces no es un insecto*
f. *Si un bicho es un insecto entonces no tiene 4 o 8 patas*
g. *Los polinomios de grado impar tienen al menos una raiz*
h. *Algunos números reales no tienen raíz cuadrada*
i. *Si una función es suave entonces es continua*
j. *Algunas afirmaciones son falsas y algunas afirmaciones son verdaderas*
k. *Para todo* $n \in N$ *, existe* $m \in N$ *tal que* $m > n$

21. Que conclusiones lógicas puedes obtener?

a. *Algunos orgs son midrs y todos los midrs son uchs*
b. *Todos los orgs son midrs y algunos mirds no son exts*
c. *Algunos perros no ladran y nada que ladra muerde*
d. *Algunas raíces son irracionales y algunos irracionales son trascendentes*
e. *Los números racionales son algebraicos y los números trascendentes no son algebraicos*
f. *Si una función es suave entonces es continua y existen funciones que no son continuas*
g. *Si una función es suave entonces es continua y existen funciones que no son suaves*
h. $\forall x>0, \exists z>0$ tal que $z^2=x$ y $\forall y, \exists w$ tal que $w=y+1$