Geometría Euclidiana

En el siglo III AC, Euclides de Alejandría y sus discípulos escribieron *Los Elementos*, una colección de libros en los que se organizaban y expandían los conocimientos matemáticos de entonces alrededor de la geometría, dándoles una estructura lógica.

Su idea era partir de muy pocas suposiciones "obvias" y usar la lógica para deducir todo lo demás. No les bastaba que algo pareciera ser cierto, querían estar seguros y saber por que lo era. Esta es la base de todas las matemáticas modernas.

Los Elementos consisten de *definiciones* (lo que significan las cosas), *nociones comunes* (en lo que estamos de acuerdo) y *postulados* o *axiomas* (las cosas que se asumen como ciertas) seguidas por teoremas, construcciones y demostraciones.

Algunas definiciones:

Un *punto* es lo que no tiene partes.

Una *línea* es una longitud sin anchura.

Una *línea recta* es una línea que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.

Si dos rectas se cortan de modo que los ángulos adyacentes son iguales, los ángulos se llaman *rectos* y las líneas se llaman *perpendiculares*.

Rectas paralelas son aquellas que, estando en un mismo plano, nunca se cruzan.

Nociones comunes:

Dos cosas que son iguales a una tercera son iguales entre si.

Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, los resultados son iguales.

Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.

El total es mayor que una parte.

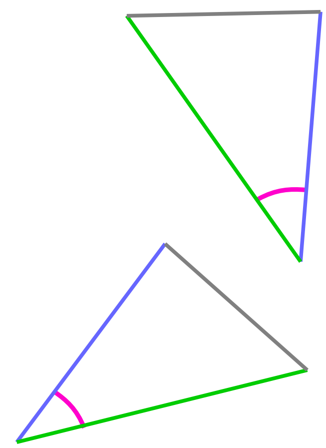
Postulados o Axiomas:

1. Por dos puntos distintos pasa una y solo una línea recta
2. Las líneas rectas pueden extenderse indefinidamente.
3. Se puede dibujar un círculo con cualquier centro y de cualquier radio.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si una línea recta cruza a dos líneas rectas de modo que los ángulos internos de un mismo lado suman menos que dos ángulos rectos, entonces las dos rectas se cruzarán de ese lado.

Algunos teoremas de los elementos

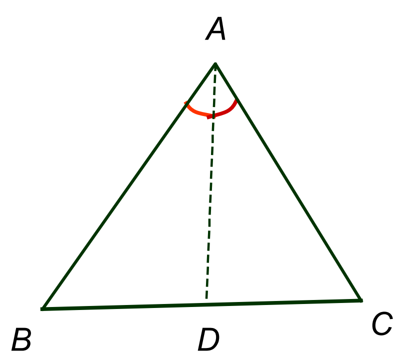
Proposición 1.4. (LAL) *Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo entre ellos iguales entonces los otro lados y los otros ángulos también son iguales.*

Demostración. Si ABC y DEF son dos triángulos con AB=DE, AC=DF' y los ángulos BAC y EDF iguales. Desplazar al triángulo DEF de modo que DE coincida con AB, y (reflejando de ser necesario) que el ángulo EDF coincida con el ángulo BAC.



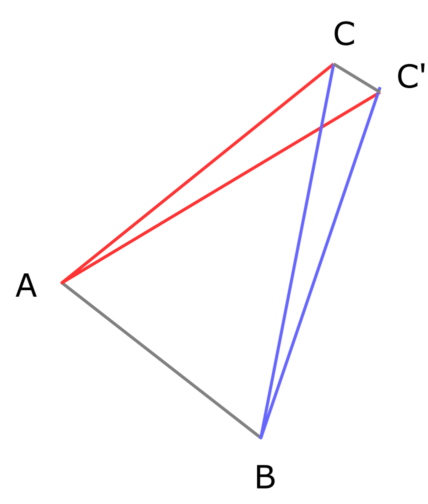
Entonces la linea DF coincide con la linea AC, así que (como DF=AC) F coincide con C. Entonces por el **postulado 1** la línea BC debe coincidir con la línea EF, así que los dos triángulos coinciden y por lo tanto sus lados y ángulos son iguales. •

Proposición 1.5. (Pons Asinorum) *Si un triángulo tiene dos lados iguales entonces los ángulos opuestos a esos lados son iguales.*



Demostración. Supongamos que el triángulo ABC tiene lados AB y AC iguales. Dibujar la bisectriz del ángulo BAC, y sea D el punto donde la bisectriz corta al lado BC. Entonces los triángulos ABD y ACD tienen 2 lados iguales y los ángulos entre ellos iguales.
Así que por la proposición 1.4 los ángulos ABD y ACD son iguales. •

Proposición 1:8. (LLL) *Si dos triángulos tienen lados iguales entonces tienen ángulos iguales.*



Demostración. Si ABC y A'B'C' son dos triángulos con lados respectivos iguales, podemos desplazarlos para que A' coincida con A, B' coincida con B y además C' y C queden del mismo lado del segmento AB.

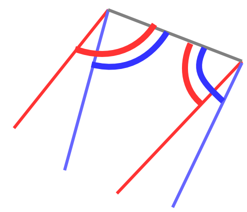
Si C' coincide con C entonces por el postulado 1 los lados coinciden, así que los ángulos son iguales. Supongamos ahora que C' no coincide con C.

Como AC=A'C' entonces por **1.5** ∠ACC' = ∠AC'C

Y como BC=BC' entoncespor **1.5** ∠BCC´´ = ∠BCC.

Pero ∠AC'C > ∠BC´C y ∠BCC' > ∠AC'C

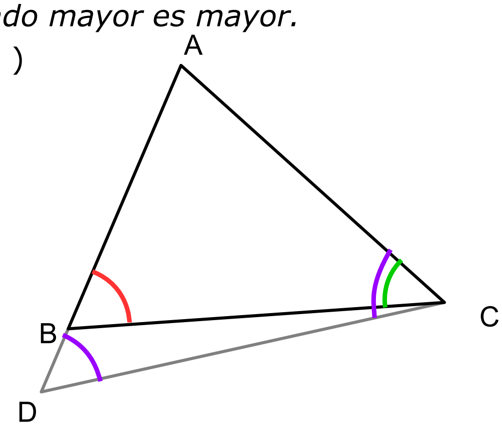
Las desigualdades se contradicen, así que C' debe coincidir con C. •



Proposición 1:17. *En un triángulo, la suma de dos ángulos es menor que 2 rectos.*

Demostración. Ejercicio

Proposición 1:18. *En un triángulo, el ángulo opuesto al lado mayor es mayor.*
(*Si* AC > AB *entonces* ∠ABC > ∠ACB)



Demostración. Supongamos que AC > AB.

En la recta AB dibujar un punto D tal que AD = AC.

Como el triángulo ACD es isósceles entonces ∠ACD = ∠ADC.

Pero ∠ADC < ∠ABC y ∠ACD > ∠ACB.

Así que ∠ABC > ∠ACB •

Proposición 1:19. *En un triángulo, el lado opuesto al ángulo mayor es mayor.*
(*Si* ∠ABC > ∠ACB *entonces* AC > AB)

Demostración. (por contrapositiva) Supongamos que la conclusión no se cumple, AC ≤ AB.

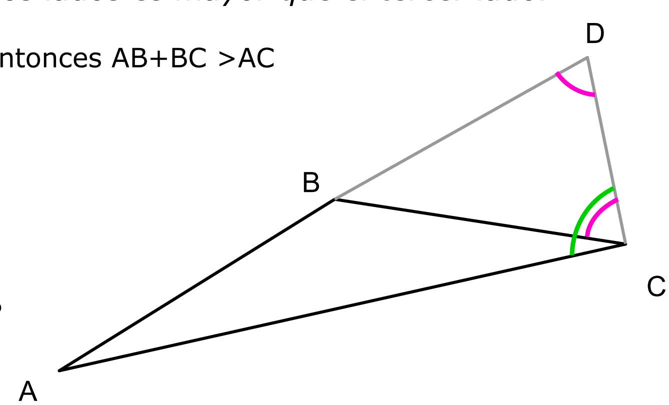
Si AC = AB entonces por **1.5** ∠ABC = ∠ACB.

Y si AC < AB entonces por **1.18** ∠ABC < ∠ACB

En ambos casos ∠ABC ≤ ∠ACB, por lo que la hipótesis no se cumple. •

Proposición 1:20. *En un triángulo, la suma de dos lados es mayor que el tercer lado.*

Demostración. Veremos que si ABC es un triángulo entonces AB+BC >AC

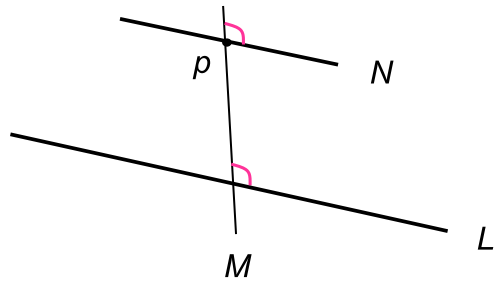


En la linea AB dibujar un punto D tal que BD=BC.
Como BD=BC entonces ∠BDC = ∠DCB

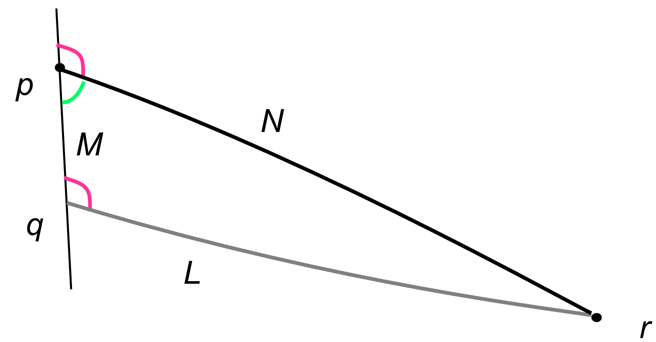
$$\begin{array}{ccc} \angle BDC & = & \angle DCB \\ \| & & \wedge \\ \angle ADC & & \angle DCA \end{array}$$

Así que por **1.18** se tiene que AC < AD = AB+BC •

Proposición 1:31. *Si p es un punto fuera de una recta L, entonces existe una recta paralela a L que pasa por p.*



Demostración. Trazar una recta M que pase por p y cruce a L, y trazar una recta N que pase por p y cruce a M formando el mismo ángulo que L forma con M. Vamos a demostrar por contradicción que N es paralela a L.



Supongamos que L y N no fueran paralelas y se cruzaran en un punto r, formarían un triángulo pqr.

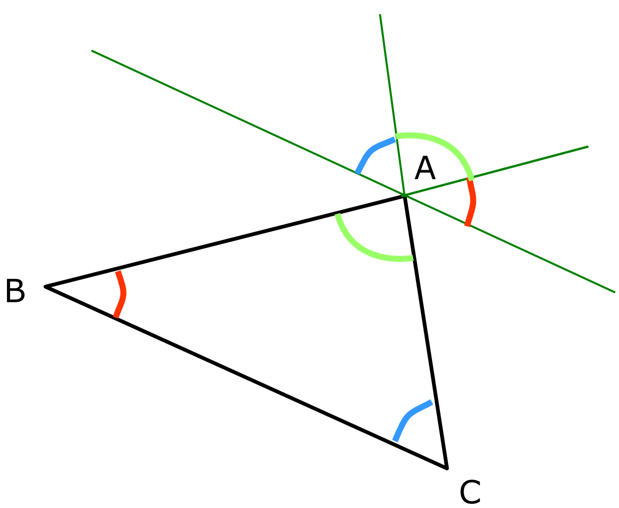
Por **1.17** se tiene que ∠pqr + ∠qpr < 2 rectos

Pero por construcción

∠pqr + ∠qpr = ∠pqr + (2 rectos -∠pqr) = 2 rectos.

Y esto es una contradicción. •

Proposición 1:32. *En cualquier triángulo, la suma de los tres ángulos interiores es igual a dos ángulos rectos.*

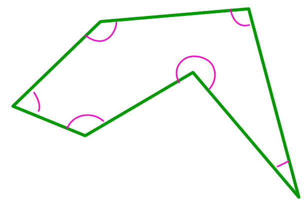


Demostración. Dado el triángulo ABC, por **1.31** podemos construir una paralela al lado BC que pase por el punto A.

Como los ángulos que forma una recta con dos rectas paralelas son iguales y como los ángulos opuestos por el vértice son iguales, los ángulos Internos del triángulo suman lo mismo que los ángulos de un lado de una recta. •

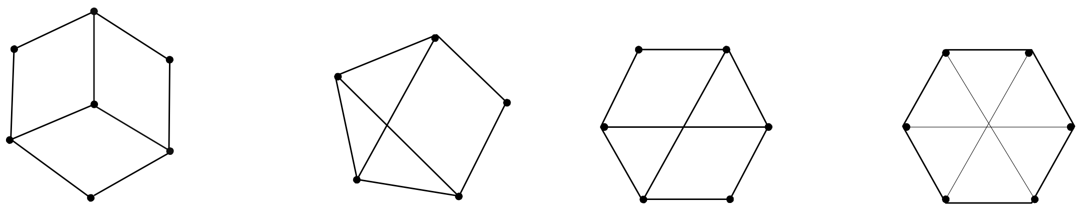
Problemas

Justifica todas tus respuestas



1. ¿Cuánto suman los ángulos internos de un polígono de n lados?

2. Por la proposición 1.8 (LLL) los triángulos son estructuras rígidas. ¿Cuales de estas estructuras (hechas de varillas con articulaciones que giran) son rígidas?



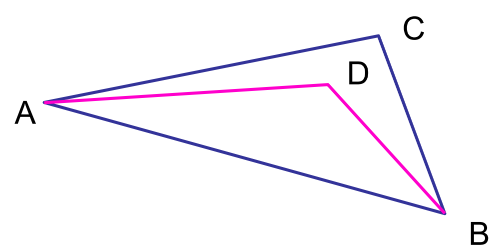
3. Sea ABC un triángulo y D es un punto en su interior.

a. ¿Es cierto que AD < AC y que BD < BC?

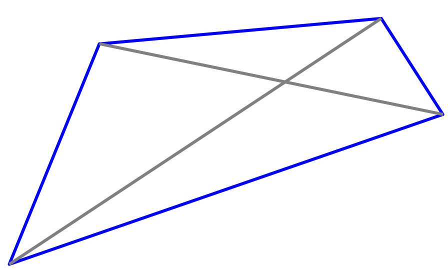
b. ¿Es cierto que AD+DB < AC+CB?

c. ¿Es cierto que ∠ADB < ∠ACB?

d. ¿Que pasa si D esta afuera del triángulo?

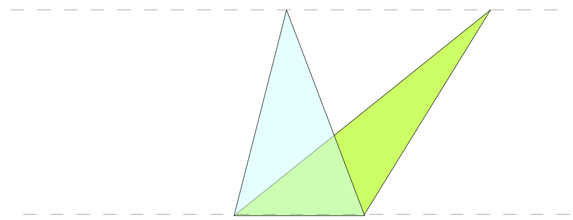


4. Demuestra que la suma de las diagonales de un cuadrilátero es menor que la suma de sus cuatro lados.



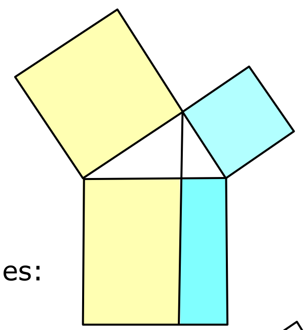
5. Demuestra la proposición 1:17 *En un triángulo la suma de dos ángulos internos es menor que 2 ángulos rectos.*

Proposición 1:38 *Dos triángulos con la misma base y la misma altura tienen la misma área.*



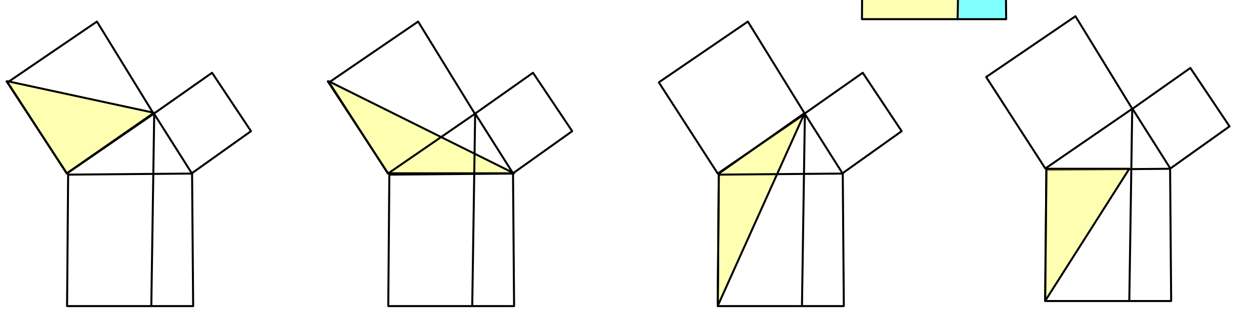
Demostración. *Ejercicio (mostrar primero que dos paralelogramos con la misma base y la misma altura tienen la misma área, viendo que es posible recortar uno y usar los pedazos para armar el otro)* •

Proposición 1:47 (Teorema de Pitágoras). *En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.*



Demostración. Basta ver que las áreas de los cuadrados son iguales a las áreas de los rectángulos:

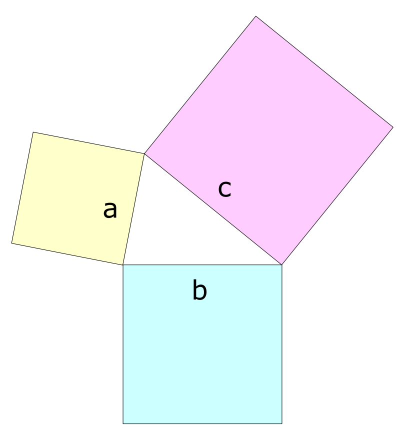
Para esto basta mostrar que los cuatro triángulos tienen áreas iguales:



(Misma base y altura) (Congruentes por LAL) (misma base y altura) •

Problemas

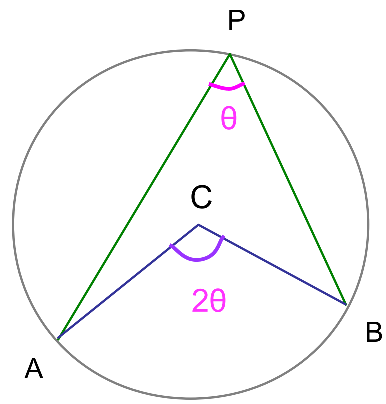
6. Demuestra el reciproco del Teorema de Pitágoras: Si los lados de un triángulo satisfacen $a^2 + b^2 = c^2$ entonces el triángulo es rectángulo. (usando LLL, puede hacerse en 2 renglones)



¿Que pasa con la igualdad si el ángulo opuesto al lado C es menor que 90°? ¿Y si es mayor a 90°?

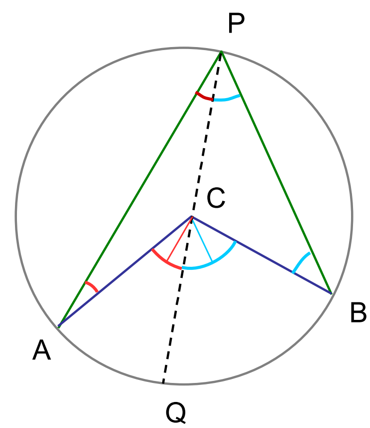
7. * ¿Puedes demostrar que si dos triángulos tienen la misma área, entonces es posible recortar uno y usar los pedazos para armar el otro?

Proposición 3:20 *Los ángulos inscritos en un círculo son iguales a la mitad de los ángulos centrales.*

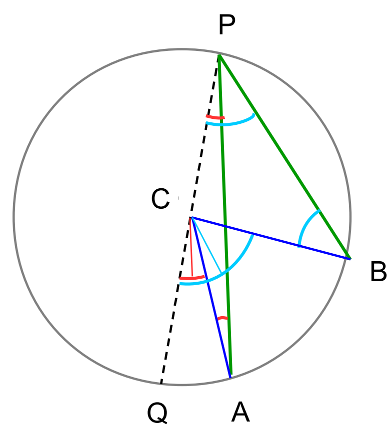


Demostración. Sea C el centro del círculo.
Entonces los triángulos ACP y BCP son isósceles.

Hay dos casos: Que A y B estén en distintos lados el diámetro por P, o que estén del mismo lado.



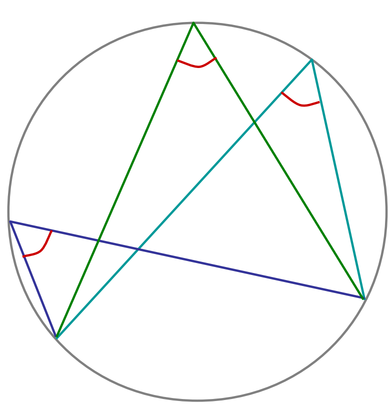
Caso 1. Como ACP es isósceles entonces ∠CAP = ∠APC.
Como la suma de los ángulos internos es 180° entonces
∠ACP = 180° - 2∠APC y como ∠ACP + ∠ACQ = 180°
entonces ∠ACQ = 2∠APC.
De manera análoga ∠BCQ = 2∠BPC.
Como A y B están en distintos lados de PQ entonces
∠APB = ∠° √≠ + ∠•√≠ Φ
∠ACB =∠ACQ +∠BCQ = 2∠° √≠ + 2∠•√≠ = 2∠APB.



Caso 2. Igual que antes ∠ACQ = 2∠APC y ∠BCQ = 2∠BPC.

Como A y B están en el mismo lado de PQ entonces
∠APB = ∠BPC - ∠APC y
∠ACB =∠BCQ - ∠ACQ = 2∠BPC - 2∠APC= 2∠APB. •

Proposición 3:21 *En un círculo, los ángulos inscritos que ven el mismo arco son iguales.*



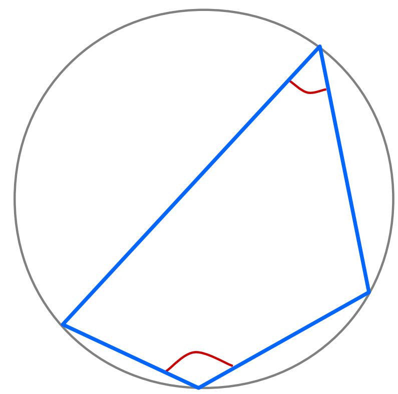
Demostración.

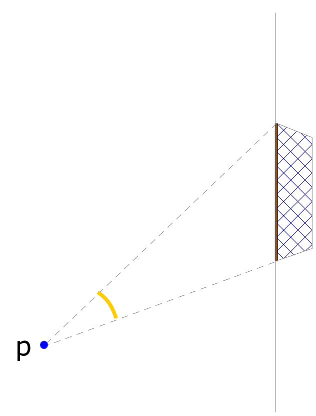
Los ángulos inscritos que ven el mismo arco son iguales a la mitad del mismo ángulo central. •

Problemas

8. a. Demuestra que si un cuadrilátero se puede inscribir en un círculo entonces sus ángulos opuestos suman 2 ángulos rectos.

b. ¿Que pasa si el cuadrilátero no se puede inscribir en un círculo?





9. ¿Donde están todos los puntos de una cancha de futbol desde donde ángulo de disparo a la portería es el mismo?

Para los interesados en leer mas de Los Elementos de Euclides, aquí están en linea (en ingles):
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/elements/bookI/bookI.html

Una demostración muy chistosa de que todos los triángulos son equiláteros (en ingles):
https://www.youtube.com/watch?v=Yajonhixy4g

Problemas de repaso.

10. ¿Cuantos triángulos distintos habrán que tengan el mismo perímetro y la misma área?

11. Demuestra que si se dibujan 3 triángulos equiláteros en los lados de un triángulo rectángulo, la suma de las áreas de 2 triángulos es el área del tercer triángulo.

12.* Demuestra que si 2 rectángulos tienen la misma área, entonces es posible cortar uno en triángulos y usar los triángulos para armar el otro.