Lugares geométricos y curvas.

Un **lugar geométrico** es un conjunto de puntos del plano (o del espacio) que satisfacen alguna condición geométrica.

Ejemplos:

- El lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto fijo es un círculo.
- El lugar geométrico de los puntos del espacio que están a la misma distancia de un punto fijo es una esfera.

La condición puede estar dada en términos de una relación algebraica entre las coordenada de los puntos. En este caso el lugar geométrico corresponde al conjunto de soluciones de una ecuación o de una desigualdad.

Ejemplo. Las lineas rectas son los conjuntos de soluciones de las ecuaciones mas simples, que son las ecuaciones lineales $Ax+By=C$.

Los conjuntos finitos de puntos son lugares geométricos de dimensión 0, las curvas son ejemplos de lugares geométricos de dimensión 1, y las regiones bordeadas por curvas son ejemplos de lugares geométricos de dimensión 2.

Los conjuntos de soluciones de ecuaciones en el plano son usualmente curvas, aunque también pueden ser puntos sueltos, o el vacío.

Ejemplos.

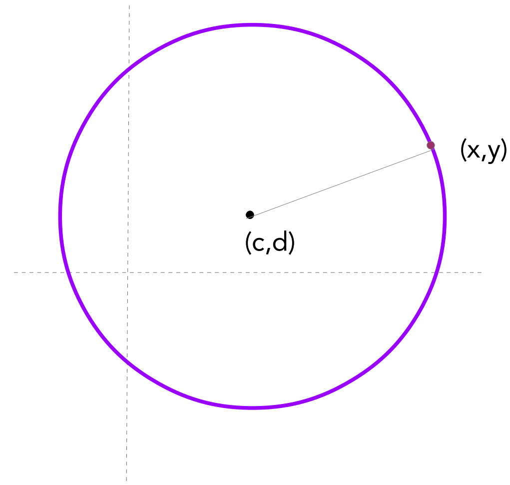
- El conjunto de soluciones de la ecuación $x^2+y^2=1$ es un círculo.
- El conjunto de soluciones de la ecuación $x^2+y^2=0$ es un punto.
- El conjunto de soluciones de la ecuación $x^2+y^2=1$ es el vacío.

También podemos pensar en las curvas como las trayectoria de puntos que se mueven continuamente. Una **parametrización** de una curva es una fórmula que da los puntos de la curva en función de un parámetro.

Ejemplo. Las lineas rectas pueden parametrizarse con las funciones mas simples, que son los polinomios de grado 1: $p(t)=(at+b,ct+d)$

Círculos

Los círculos son las curvas formadas por los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto fijo (el centro del círculo).



La distancia del punto (x,y) al punto (c,d) es $\sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}$

Así que el círculo de radio r y centro en (c,d)

tiene ecuación

$$\boxed{(x-c)^2+(y-d)^2 = r^2}$$

Ejemplo. El círculo de radio 5 con centro en el punto (2,-1) tiene ecuación $(x-2)^2+(y+1)^2 = 5^2$ que también puede escribirse $x^2-4x+4+y^2+2y+1= 25$ y se simplifica a $x^2+y^2-4x+2y = 20$

Ejercicio. ¿Que ecuación tiene el círculo con centro en el punto (1,3) y que pasa por (2,-1)?

El radio es $r=\sqrt{(1-2)^2+(3+1)^2} = \sqrt{17}$ así que la ecuación es

$(x-1)^2+(y-3)^2 = 17$

$x^2+y^2-2x-6y = 7$

Lema. Las ecuaciones de la forma $x^2+y^2+Ax+By = C$ corresponden a círculos, puntos o el vacío.

Demostración. Podemos reescribir la ecuación en la forma de la ecuación de un círculo reacomodando los términos y completando los cuadrados

$x^2+Ax+ \qquad +y^2+By+ \qquad = C$

$x^2+Ax+(A/2)^2+y^2+By+(b/2)^2 = C+A^2/4+b^2/4$

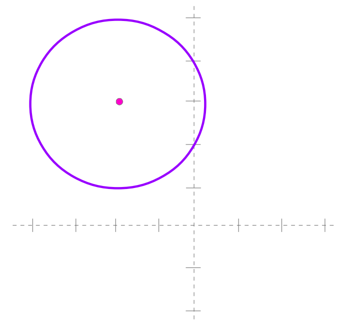
$(x+A/2)^2+(y+B/2)^2 = C+A^2/4+B^2/4$

que es un círculo con centro en (-A/2,-B/2) si $C+A^2/4+B^2/4>0$,

es un punto si $C+A^2/4+B^2/4=0$ y es el vacío si $C+A^2/4+B^2/4<0$. •

Ejercicio. ¿La ecuación $x^2+y^2+4x-6y = -8$ corresponde a un círculo, o a un punto o al vacío?

Hay que reescribir la ecuación para que se vea de la forma $(x-c)^2+(y-d)^2 = r^2$



$x^2+4x+\quad +y^2-6y+\quad = -8$

$x^2+4x+4 \;\; +y^2-6y+9 \;\; = -8+4+9$

$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$

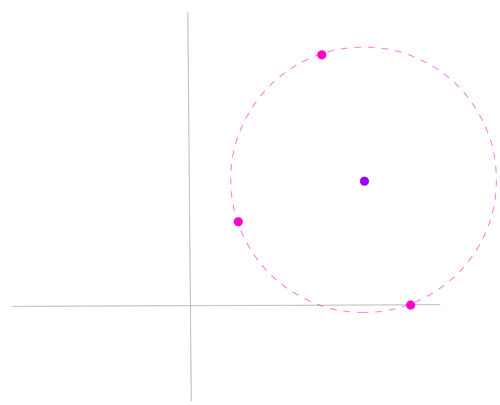
así que es un círculo con centro en (-2,3) y radio $\sqrt{5}$.

Ejercicio. ¿Cual es la ecuación del círculo que pasa por los puntos (1,2), (3,6) y (5,0)?

Hay varias maneras de hacerlo:

1. Podemos empezar hallando el centro (c,d)

que debe estar a la misma distancia de los 3 puntos



$(c-1)^2+(d-2)^2 = (c-3)^2+(d-6)^2 = (c-5)^2+(d-0)^2$

$c^2-2c+1+d^2-4d+4 = c^2-6c+9+d^2-12d+36 = c^2-10c+25+d^2$

$-2c+1-4d+4 = -6c+9-12d+36 =-10c+25$

$4c+8d = 40 \qquad 4c-12d = -20$

$20d = 60 \qquad d = 3$

$4c+24 = 40 \qquad c = 4$ así que el centro está en (4,3)

el radio es $\sqrt{(4-1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{10}$

la ecuación es $(x-4)^2+(y-3)^2 = 10$

2. También podemos hallar directamente los coeficientes de la ecuación $x^2+y^2+Ax+By = C$, sabiendo que los 3 puntos deben satisfacerla:

$1^2+2^2+A1+B2=C \rightarrow A+2B+5=C \rightarrow A+2B + 5=5A+25 \rightarrow -4A+2B=20 \rightarrow 10A=-80 \qquad A=-8$

$3^2+6^2+A3+B6=C \rightarrow 3A+6B+45=C \rightarrow 3A+6B+45=5A+25 \rightarrow -2A+6B=-20 \rightarrow -10B=60 \qquad B=-6$

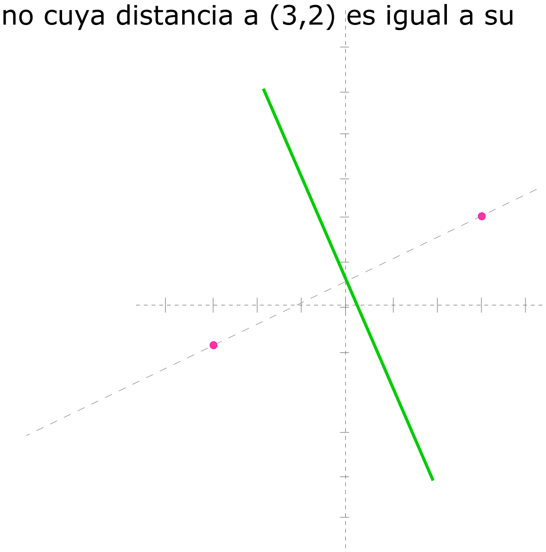
$5^2+0^2+A5+B0=C \qquad 5A \quad +25=C \qquad\qquad C=-15$

así que la ecuación es $x^2+y^2-8x-6y = -15$ (que es equivalente a $(x-4)^2+(y-3)^2 = 10$)

Un problema común en geometría consiste en averiguar como se ve el conjunto de puntos del plano que cumplen alguna condición dada, esto a veces pueden averiguarse usando ecuaciones.

¿Cual será el lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto P y de otro punto Q? ¿Y cual será el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto P es el doble de su distancia a otro punto Q?

Ejemplo. ¿Cual es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a (3,2) es igual a su distancia a (-3,-1)?



$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2 = (x+3)^2+(y+1)^2$$

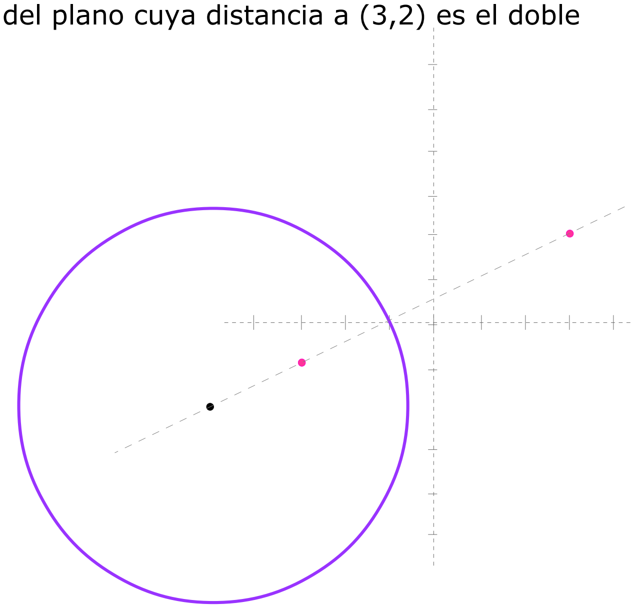
$$x^2-6x+9+y^2-4y+4 = x^2+6x+9+y^2+2y+1$$

$$-6x-4y+13 = 6x+2y+10$$

$-12x-6y = -3$ o sea $4x+2y = 1$

y las soluciones de esta ecuación forman una recta.

Ejemplo. ¿Cual es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a (3,2) es el doble de su distancia a (-3,-1)?



$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = 2\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2 = 4(x+3)^2+4(y+1)^2$$

$$x^2-6x+9+y^2-4y+4 = 4x^2+24x+36+4y^2-8y+4$$

$$-3x^2-3y^2-30x-12y = 27$$

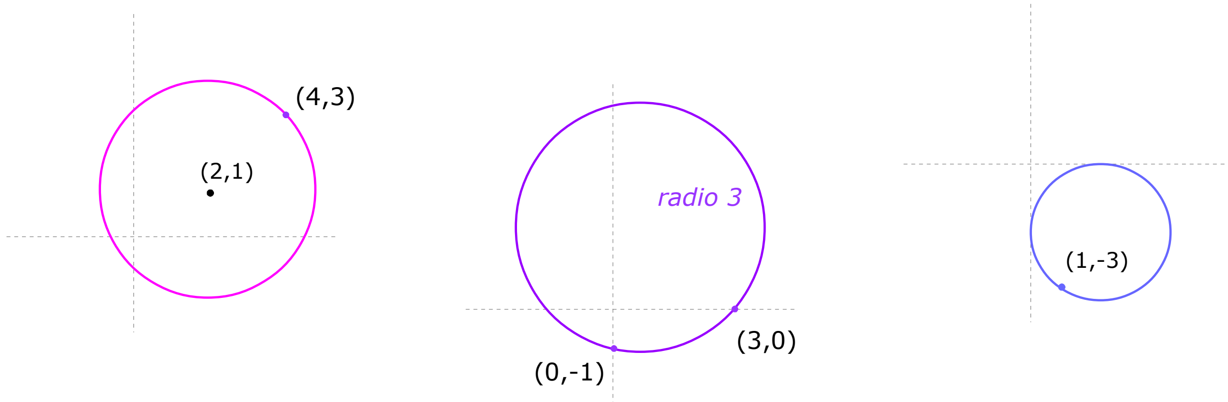
$x^2+y^2+10x+4y = -9$ que se puede reescribir

$$(x+5)^2+(y+2)^2 = 20$$

que es un círculo con centro en (-5,-2) y radio $\sqrt{20}$

Problemas.

1. Da las ecuaciones de estos círculos:



2. ¿A que corresponden la siguientes ecuaciones? Dibújalas.

a. $x^2 + y^2 - 2x = 0$ b. $x^2 + y^2 + 2x + 4y = -5$ c. $x^2 + y^2 = x + y$

3. Una escalera de longitud 10 se encuentra recargada en una pared, y enmedio de la escalera está un gato. Si la escalera se empieza a resbalar ¿que trayectoria seguirá el gato hasta llegar al suelo?

4. Encuentra las ecuaciones de 3 círculos que pasen por los puntos (1,2) y (4,3)

5. Encuentra el centro y el radio del círculo que pasa por los puntos (1,3) , (2,0) y (-1,-1)

6. Que tienen en común todas las ecuaciones de círculos $x^2 + y^2 + Ax + By = C$

a. con centro en (1,2) ?

b. que pasan por el punto (3,4) ?

c. que tienen radio 6 ?

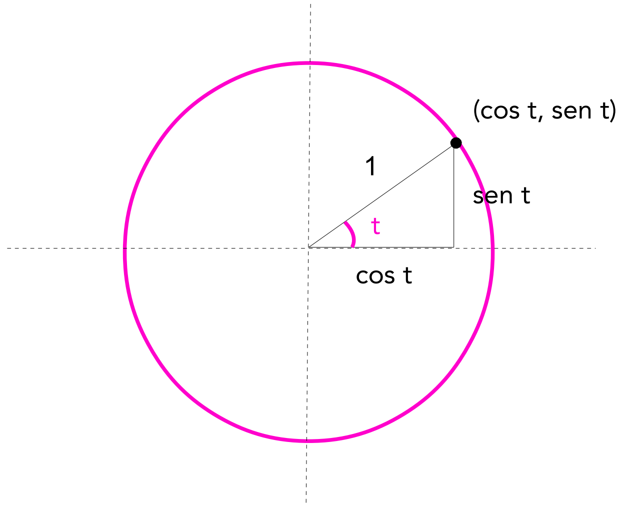
7. ¿Cual es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto (0,0) es un tercio de su distancia al punto (4,0)? Encuentra la ecuación y di exactamente a que curva corresponde.

Parametrizaciones de los círculos

Podemos parametrizar a los círculos usando las funciones trigonométricas, que en principio están definidas solo para ángulos entre 0 y $\pi/2$ radianes, pero pueden extenderse a todos los valores de t:

cos(t) y sen(t) son las coordenadas de un punto en el circulo unitario, donde t es la longitud del arco de circulo desde el eje x hasta el punto.

Así que para todo valor de t, $\cos^2(t)+\text{sen}^2(t) = 1$

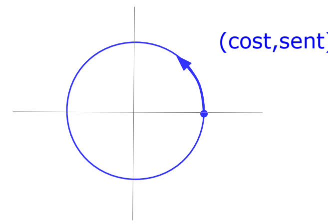


Ejemplos.

a(t)= (cos t, sen t)

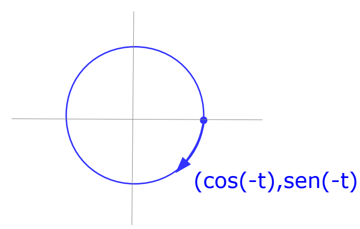
x=cos t   y=sen t   satisfacen la ecuación: $x^2+y^2 = 1$

a(t) recorre un circulo de radio 1 en dirección contraria a las manecillas del reloj, con rapidez constante 1 y empezando en (1,0).



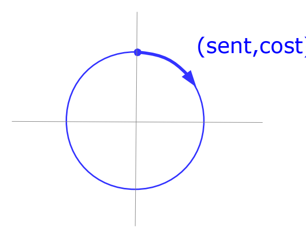
b(t)=(cos(-t), sen(-t))   satisfacen la ecuación: $x^2+y^2 = 1$

b(t) se obtiene de a(t) cambiando el signo de t (que equivale a hacer el mismo recorrido que a(t) pero en sentido opuesto).



c(t)=(sen t, cos t)   satisfacen la ecuación: $x^2+y^2 = 1$

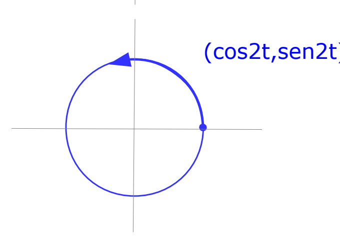
c(t) se obtiene de a(t)=(cost,sent) intercambiando los papeles de x y y, (lo que equivale a reflejar en la linea x=y). Así que b(t) recorre el circulo unitario en el sentido de las manecillas del reloj, con rapidez constante 1 y empezando desde (0,1).



e(t)=(cos 2t, sen 2t)

x=cos 2t   y=sen 2t $x^2+y^2 = \text{cost}^2(2t)+\text{sent}^2(2t)= 1$

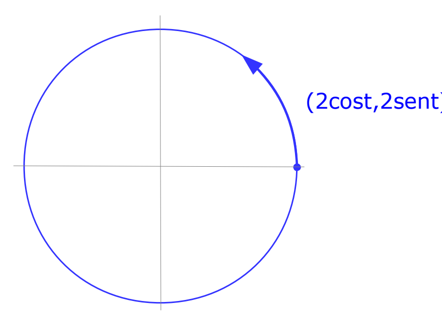
e(t) se obtiene de a(t) duplicando t, así que e(t) recorre el circulo unitario con rapidez 2.



f(t)=(2cos t, 2sen t)

x=2cos t   y=2sen t $x^2+y^2 = 4\text{cost}^2t+4\text{sent}^2t = 4$

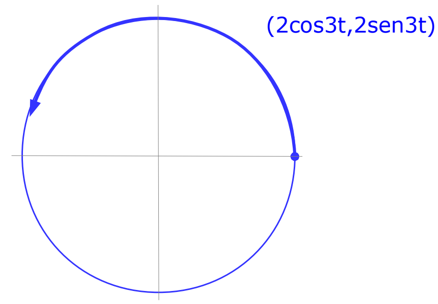
f(t) se obtiene duplicando el tamaño de a(t), así que f(t) recorre el circulo de radio 2 con rapidez constante 2.



g(t)=(2cos(3t)), 2sen(3t))

x=2cos(3t)   y=2sen(3t) $x^2+y^2 = 4\cos t^{2}(3t)+4\operatorname{sen} t^{2}(3t) = 4$

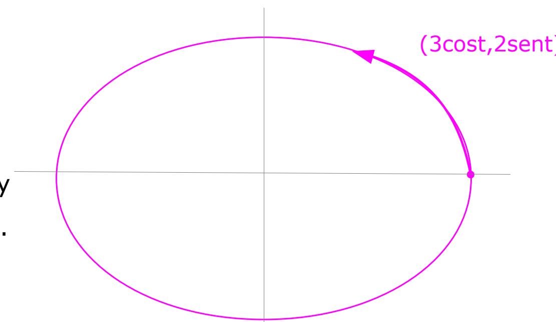
g(t) se obtiene de a(t) triplicando t y luego duplicando el tamaño, así que f(t) recorre el circulo de radio 2 con rapidez 6.



h(t)=(3 cos t, 2 sen t)

satisface la ecuación $(x/3)^2+(y/2)^2 = 1$,

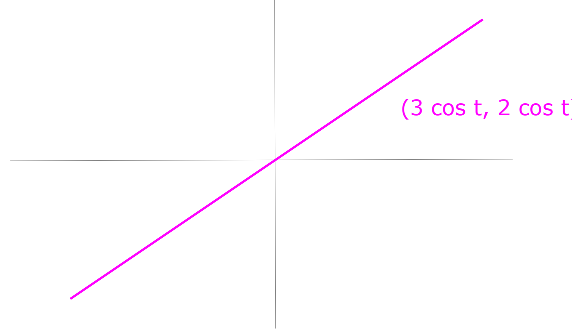
se obtiene estirando a(t)=(cost,sent) horizontalmente al triple y verticalmente al doble, así que h(t) describe un circulo estirado.



h(t)=(3cos t, 2cos t)

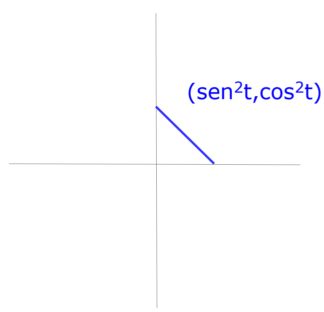
satisface la ecuación 2x =3y

así que se encuentra en una linea recta, pero como sent solo toma valores entre -1 y 1, la trayectoria solo cubre un intervalo de la recta.



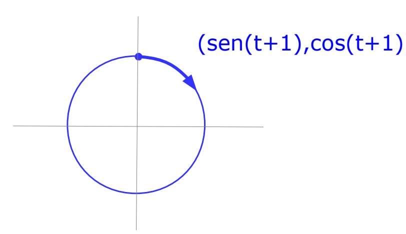
z(t)=(sen^2t,$\cos^2$t)   satisface la ecuación x+y=1

así que la trayectoria está en una recta.



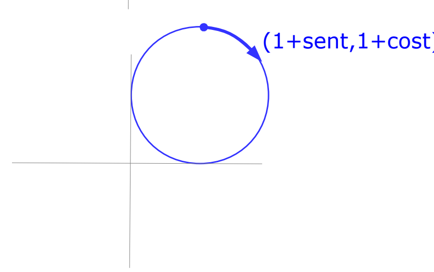
d(t)=(sen(1+t),1+cos(1+t))   satisface la ecuación: $x^2+y^2 = 1$

se obtiene de a(t)=(sen(t),1+cos(t)) incrementando t por 1, lo que equivale a adelantarse el recorrido

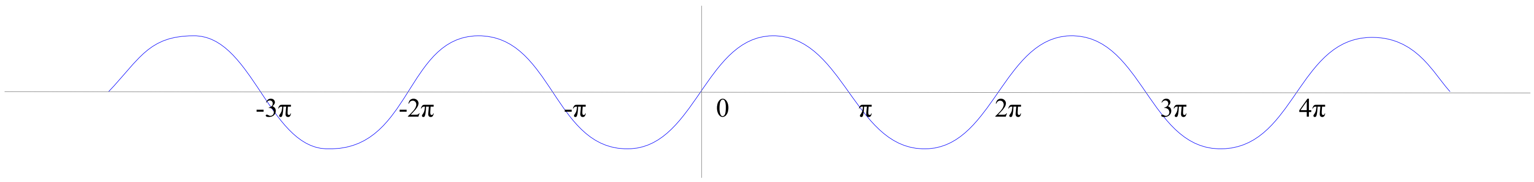


e(t)=(1+sent,1+cost) satisface la ecuación $(x-1)^2+(y-1)^2 = 1$

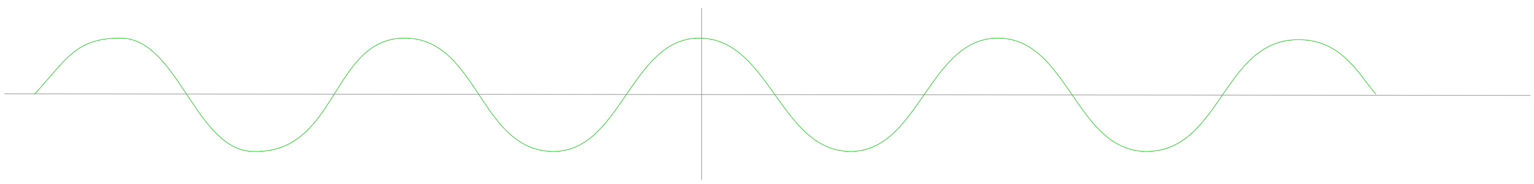
se obtiene de c(t) sumándole el vector(1,1), así que e(t) recorre el circulo de radio 1 centrado en (1,1) con rapidez constante 1



La curva s(t) = (t,sent) describe un movimiento ondulatorio: la altura de un punto que gira alrededor del circulo unitario con rapidez constante 1:

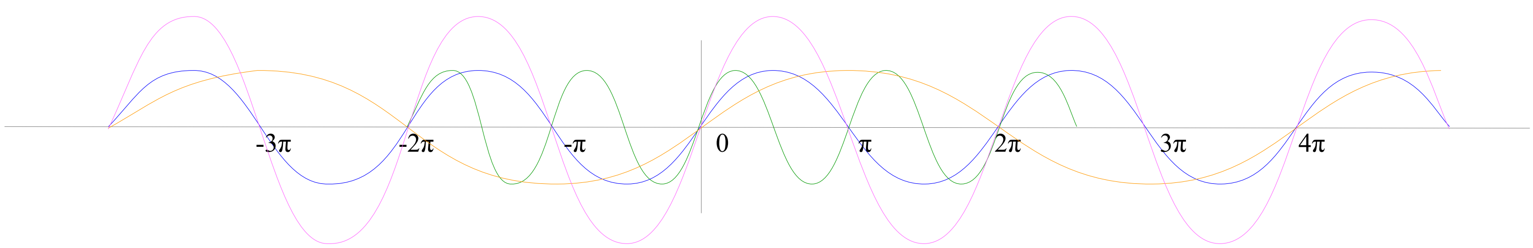


La curva c(t) = (t,cost) se ve igual, pero desplazada, ya que cos(t)=sen(t+π/2):



Ejemplo. La gráfica muestra la diferencias entre las siguientes trayectorias

p(t) = (t, 2sen t)   q(t) = (t, sen 2t)   r(t) = (2t, sen t)   s(t) = (2t, sen 2t)

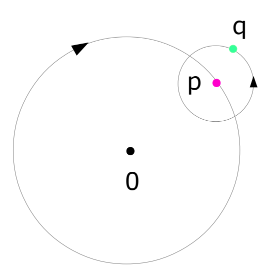


Combinando vectorialmente movimientos simples pueden obtenerse movimientos complicados:

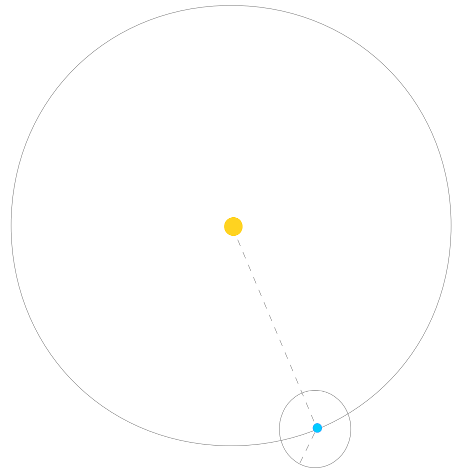
Ejemplos.

- Un punto p gira alrededor del circulo de radio 3 con centro en el origen en la dirección de las manecillas del reloj con rapidez constante 3 mientras que el punto q gira alrededor de p en un circulo de radio 1 en dirección contraria a las manecillas del reloj con rapidez constante 2.
¿Cual es la posición del punto q respecto al origen en el instante t?

La posición de p respecto al origen esta dada por p(t)=(3sent, 3cost) y la posición de q respecto a p esta dada por r(t)=(cos2t,sen2t), así que la posición de q respecto al origen esta dada por q(t)=p(t)+r(t)=(3sent+cos2t, 3cost+sen2t).



- El movimiento de la Luna alrededor del Sol es la suma del movimiento de la Luna alrededor de la Tierra con el movimiento de la Tierra alrededor del Sol. La trayectoria de Marte vista desde la tierra es la resta de la trayectoria de Marte desde el Sol y la trayectoria de la Tierra desde el Sol.



Problemas.

8. ¿Como se verán las siguientes trayectorias en el plano? ¿Que ecuaciones satisfacen?

a. $p(t) = (1-3t, 2t+4)$

b. $q(t) = (t+1, t^2)$

c. $q(t) = (2+\text{sen } t, 3-\cos t)$

d. $r(t) = (2+\text{sen } t, 3-\text{sen } t)$

e. $r(t) = (3\cos t, 2\text{sen } t)$

f. $s(t) = (3\cos t, 2\cos t)$

9. Muestra que estas 3 trayectorias cumplen la misma ecuación cartesiana:

   $p(t) = (1-t, -2t)$ $\quad$ $q(t) = (t^2, 2t^2-2)$ $\quad$ $r(t) = (1+\text{sen}t, 2\text{sen}t)$

   ¿Que dice esto sobre las trayectorias?

10. Parametriza la trayectoria de un punto que gira en un círculo de radio 3 y centro en (1,2), partiendo del punto mas bajo y moviéndose en la dirección de las manecillas del reloj con rapidez constante 2.

11. Encuentra parametrizaciones aproximadas de las órbitas de la Tierra y de Marte alrededor del Sol y la Luna alrededor de la Tierra (usando las escalas y los periodos de las órbitas correctas!). Usalas para graficar a escala (usando la computadora):

    a. La trayectoria de la Luna vista desde el Sol.
    b. La trayectoria de Marte vista desde la Tierra.
    c. La trayectoria de la Tierra vista desde Marte.

12. Gráfica las siguientes trayectorias en la computadora para $0 \le t \le 2\pi$ a.

    $p(t) = (\cos t, \text{sen } 2t)$ $\quad$ c. $r(t) = (\text{sen } 3t, \cos 4t)$ b.

    $q(t) = (\text{sen } t, \cos 2t)$ $\quad$ d. $s(t) = (\cos 3t, \cos 5t)$