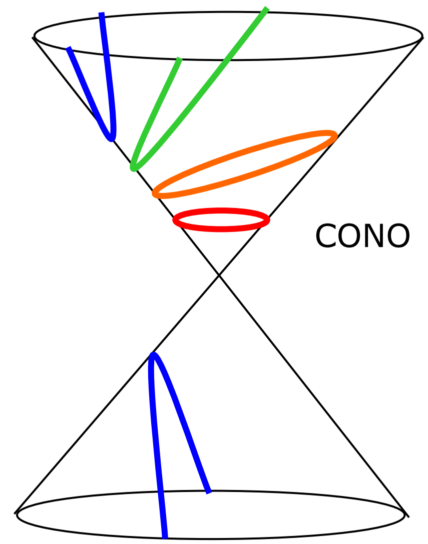
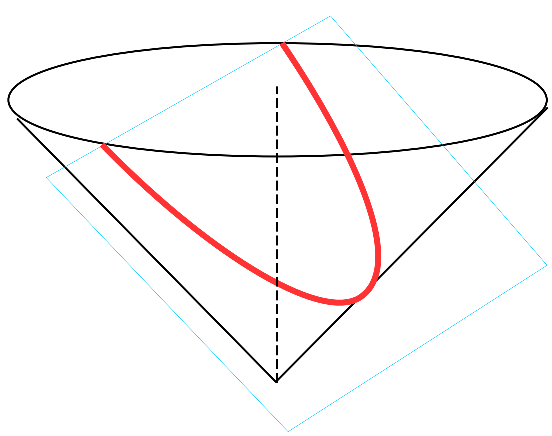
Secciones cónicas

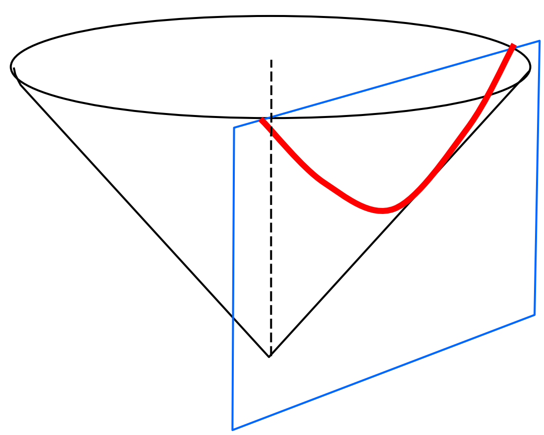
Un **cono** es la superficie que se obtiene girando una recta alrededor de un eje que la cruza.

A las curvas que se obtienen intersectando a un cono con un plano se les conoce como **secciones cónicas**.



Los griegos comenzaron a estudiar las cónicas hace 2400 años, interesados originalmente en su aplicación al problema de la duplicación del cubo, que equivale a hallar geométricamente la raíz cubica de 2: el número x es la raíz cubica de 2 si $x^3=2$. Hallar la raíz cubica de 2 equivale a encontrar la intersección de las curvas $y=x^2$ y $xy=2$. Los griegos descubrieron que estas dos curvas, que llamaron *parábola* e *hipérbola*, podían obtenerse cortando un cono: la parábola con un plano paralelo a la recta que lo genera y la hipérbola con un plano vertical).





Las secciones cónicas aparecen frecuentemente en la naturaleza y tienen propiedades sorprendentes que les dan muchas aplicaciones practicas.

Parábolas

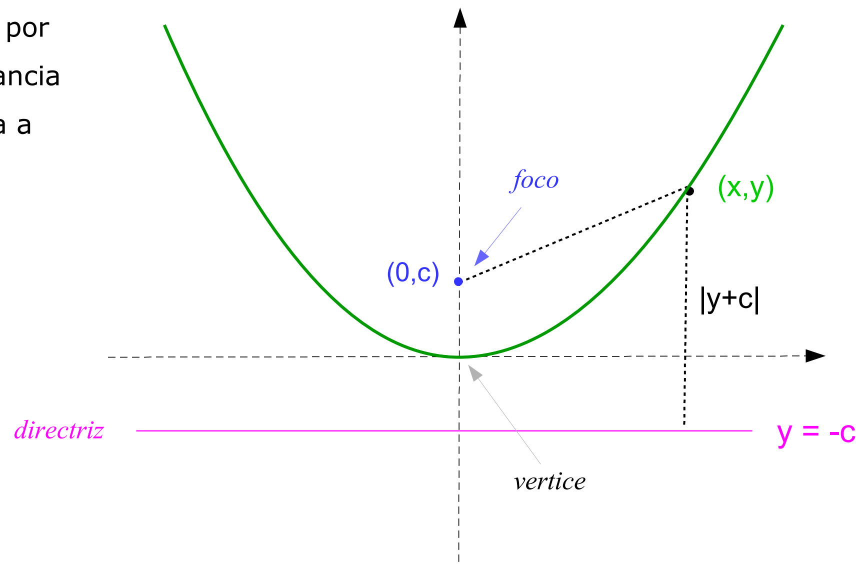
La curva formada por los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo P es igual a su distancia a una recta L es llamada **parábola**. El punto P es el **foco** de la parábola y la recta L es su **directriz**. El punto de la parábola mas cercano al foco es el **vértice**.

La ecuación de la parábola formada por los puntos (x,y) del plano cuya distancia al punto (0,c) es igual a su distancia a la recta y = -c es:

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = |y+c|$$

$$x^2 + (y-c)^2 = (y+c)^2$$

$$x^2 = 4cy$$



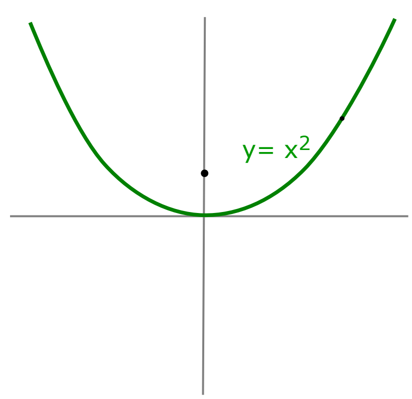
Observar que la distancia focal, que es la distancia del vértice al foco, es 1/4 del coeficiente de y.

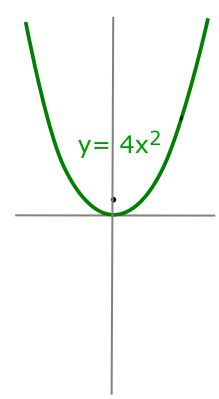
Ejemplo. ¿Donde esta el foco de la parábola $y=x^2$?
Aquí 4c=1 así que c=1/4 y el foco es el punto (0,1/4)

Lema. Todas las parábolas tienen la misma forma (lo único que varía es su tamaño).

Demostración. La forma de la parábola solo depende de la distancia entre el foco y la directriz, al aumentar esta distancia el tamaño de la parábola aumenta en la misma proporción. •

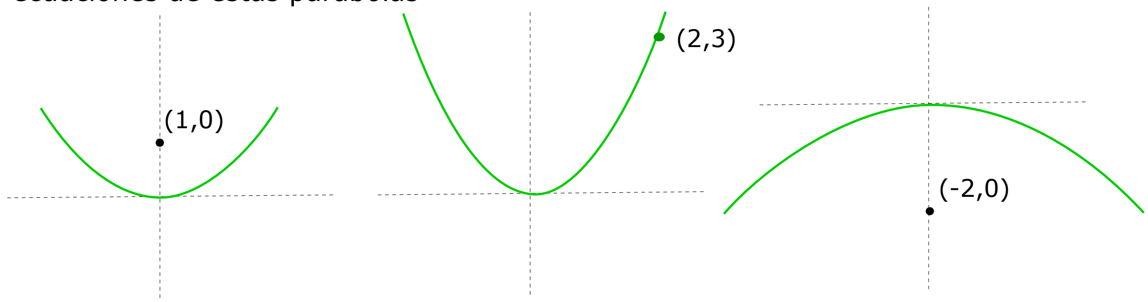
Ejemplo. Considerar las parábolas $y= x^2$, $y = 4x^2$.
Aunque la segunda se ve mas delgada o mas alta que la primera, sus formas sólo difieren en el tamaño:
La primera se obtiene cuadruplicando el tamaño de la segunda: al hacer la transformación $(x',y') = (4x,4y)$ la ecuación $4x^2 = y$ se convierte en $4(x'/4)^2 = y'/4$ que equivale a $x'^2 = y'$.





Problemas

1. Da las ecuaciones de estas parábolas



2. Dibuja las parábolas, mostrando sus focos

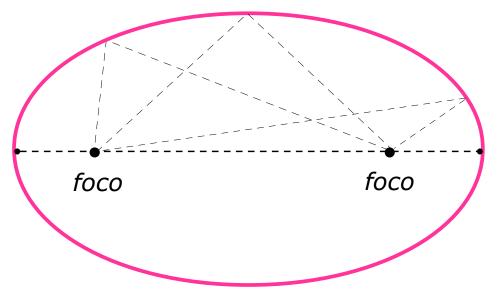
a. $y=x^2$ b. $y=x^2+1$ c. $y=(x+1)^2$ d. $x=y^2$

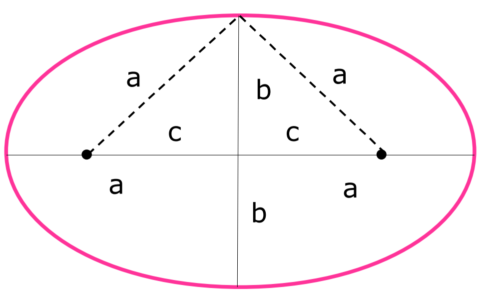
3. Da 3 parametrizaciones distintas para la parábola $y=x^2$

Elipses

Una *elipse* esta formada por los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (llamados **focos**) es constante.

Podemos dibujar una elipse usando una cuerda cuya longitud sea la suma de las distancias que queremos, amarrando sus extremos a los focos y tensando la cuerda con el lápiz.





Por su definición, la elipses son simétricas respecto a la línea que une a los focos y a su mediatriz, estos son los **ejes** de la elipse. Si lel largo de la cuerda es 2a y la distancia entre los focos es 2c, entonces el largo de la elipse debe ser 2a y la altura debe ser 2b, donde $b^2+c^2=a^2$. Por lo tanto dos elipses del mismo largo y ancho deben tener la misma forma (tarea).

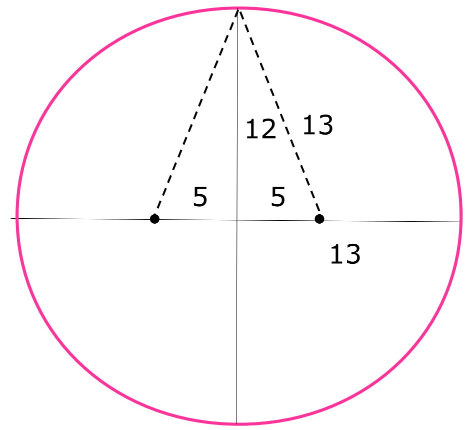
Lema. La forma de una elipse (salvo el tamaño) esta determinada por la razón a/b.

Demostración. Si una elipse tiene largo 2a y ancho 2b y otra elipse tiene largo 2a' y ancho 2b', y a/b=a'/b', entonces a'/a=b'/b y al escalar la primera elipse por el factor a'/a, se convierte en una elipse de largo a'/a(2a)=2a' y ancho a'/a(2b)=b'/b(2b)=2b'. Ahora las dos elipses son del mismo largo y ancho, así que tienen la misma forma. ●

Ejemplo.

¿Que tan larga y ancha es una elipse si la distancia entre sus focos es 6 y la longitud de la cuerda es 10?

La longitud de la elipse es 10 y la anchura es 8 (ya que $10^2 - 6^2 = 8^2$)



Ejemplo.

¿Si una elipse tiene largo 13 y ancho 12,

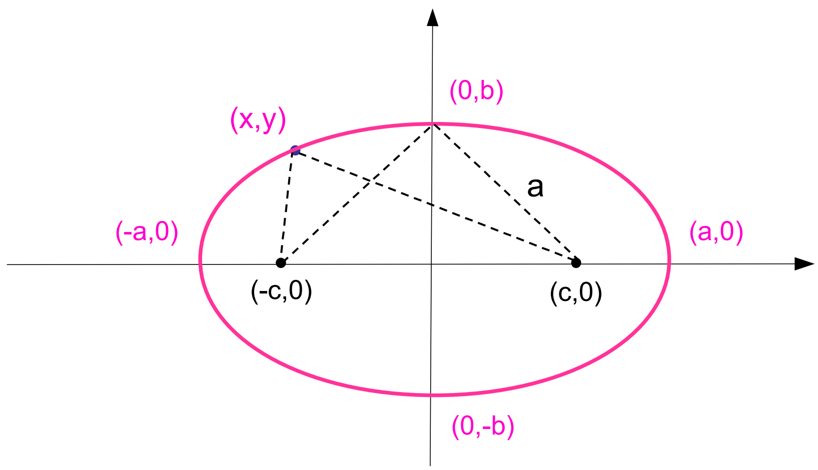
cual es la distancia entre sus focos?

$2a = 13$, $2b = 12$ y como $b^2 + c^2 = a^2$ entonces

$c^2 = a^2 - b^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$

así que $c = 5$ y la distancia entre los focos es $2c = 10$

Ecuaciones de las elipses



Si elegimos el sistema de coordenadas de modo que los focos estén en los puntos (-c,0) y (c,0) y la suma de las distancias es 2a, entonces la elipse cruza al eje x en los puntos (a,0) y (-a,0) y al eje y en los puntos (0,b) y (0,-b) donde $b^2 = a^2 - c^2$

La ecuación es:

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ *elevando al cuadrado queda*

$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2 + y^2$ *desarrollando y simplificando*

$4a \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 4a^2 + 4cx$ *dividiendo entre 4a*

$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = (a + c/a\ x)$ *elevando al cuadrado*

$(x+c)^2 + y^2 = (a + c/a\ x)^2$ *desarrollando y simplificando*

$x^2 - c^2/a^2\ x^2 + y^2 = a^2 - c^2$ *agrupando*

$(a^2-c^2)/a^2\ x^2 + y^2 = a^2 - c^2$ *sustituyendo $a^2-c^2 = b^2$*

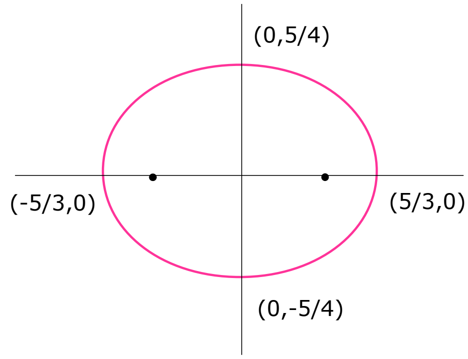
$b^2/a^2\ x^2 + y^2 = b^2$ *y dividiendo entre b^2 queda*

$\boxed{x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1}$

Ejemplo. ¿Que ecuación tiene la elipse formada por los puntos cuyas distancias a (-3,0) y (3,0) suman 10?

Aquí $a=10/2=5$, $c=3$ así que $b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 3^2 = 16 = 4^2$

Así que la ecuación es $x^2/5^2 + y^2/4^2 = 1$



Ejemplo. ¿Como se ve la curva $9x^2 + 16y^2 = 25$?

La ecuación puede escribirse como $9/25\ x^2 + 16/25\ y^2 = 1$

o sea $x^2/(5/3)^2 + y^2/(5/4)^2 = 1$ que es esta elipse:

$a=5/3$ $b=5/4$ $c=\sqrt{175}/12$

Lema. Las elipses son círculos estirados.

Demostración.

Si tomamos el circulo $x^2 + y^2 = 1$

y lo estiramos horizontalmente y verticalmente

por medio de la transformación $(x',y')=(ax,by)$

entonces $x=x'/a$, $y=y'/b$

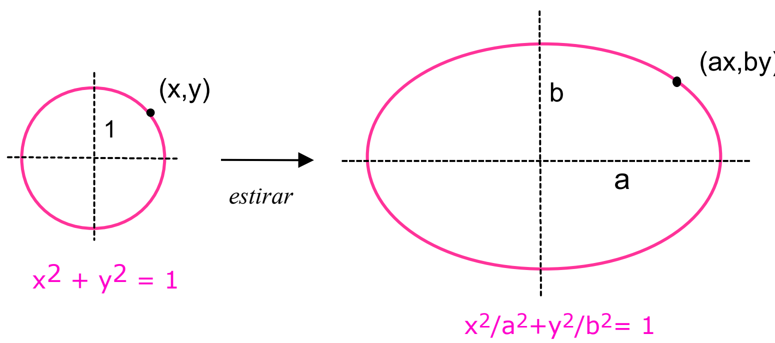
y obtenemos la curva

$(x'/a)^2 + (y'/b)^2 = 1$

que equivale (dividiendo entre b^2) a

$x'^2/a^2 + y'^2/b^2 = 1$

que es la ecuación de una elipse. •



Ejercicio: Si se estira el círculo $x^2 + y^2 = 1$ horizontalmente al doble, se convierte en una elipse. ¿cual es su ecuación?

¿Cual es la distancia entre sus focos, y cuanto suman las distancias de los puntos de la elipse a sus focos?

La transformación que estira al circulo es $(x',y')=(2x,y)$

si despejamos a $(x,y)=(x'/2,y')$ y la ecuación transformada es

$x'^2/4 + y'^2= 1$

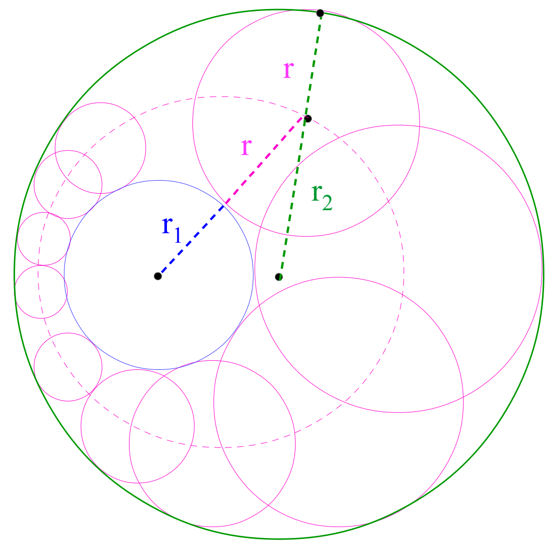
así que $a=2$, $b=1$ y $c=\sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{3}$

la longitud de la cuerda es 4 y la distancia focal es $2\sqrt{3}$

Ejercicio:

Si C_1 y C_2 son dos círculos y C_1 está dentro de C_2 ¿Que curva forman los centros de los círculos que son tangentes a C_1 y C_2 ?

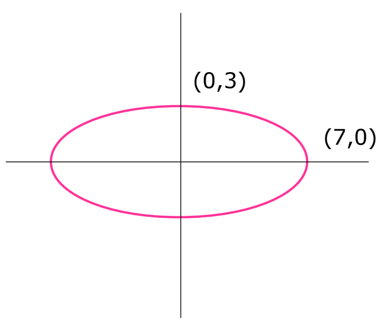
Si C es un círculo de radio r tangente a C_1 y C_2 entonces las distancias del centro de C a los centros de C_1 y C_2 son $r_1 + r$ y $r_2 - r$ donde r_1 y r_2 son los radios de C_1 y C_2. Por lo tanto la suma de las dos distancias es $r_1+r + r_2-r = r_1+r_2$ que no depende del radio de C.

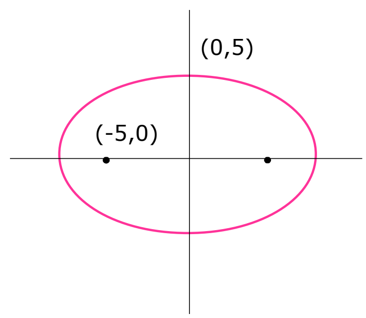


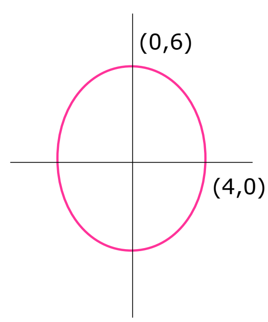
Así que los centros de los círculos tangentes forman una elipse, cuyos focos son los centros de C_1 y C_2.

Problemas

4. Da las ecuaciones de las elipses

a. 

b. 

c. 

5. Dibuja las elipses, mostrando sus focos

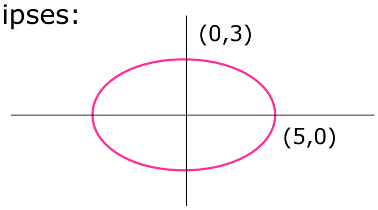
a. $x^2 + 4y^2 = 16$

b. $4x^2 + 9y^2 = 1$

c. $9x^2 + 4y^2 = 36$

6. Da parametrizaciones para las siguientes elipses:

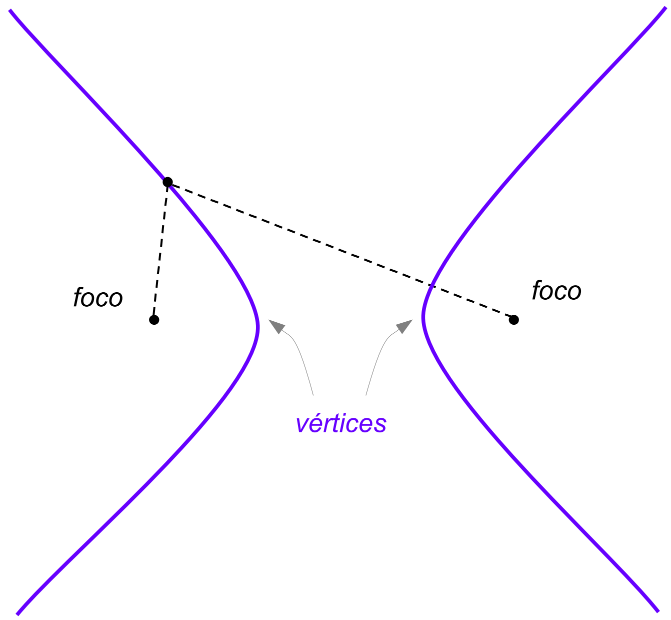
a. $4x^2 + 9y^2 = 1$

b. 

7. Una escalera de 9m de largo está recargada en una pared y hay un gato parado a 2/3 de la punta. Si la escalera empieza a resbalarse, que trayectoria seguirá el gato hasta el piso (suponiendo que no salta).

Hipérbolas

Una **hipérbola** está formada por los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos P y Q (los **focos**) es constante.



Podemos dibujar hipérbolas usando una cuerda, aunque no es tan fácil como dibujar elipses (ver los problemas al final).

Se consideran las dos posibles diferencias (distancia a P menos distancia a Q y distancia a Q menos distancia a P) para que la definición sea simétrica. Así que la hipérbola tiene 2 ejes de simetría: la línea de los focos y su mediatríz.
Los puntos de la hipérbola mas cercanos a los focos son los **vértices**., que están en la línea de los focos. Observar que la distancia entre los vértices es la diferencia entre las distancias de los puntos de la hipérbola a los focos.

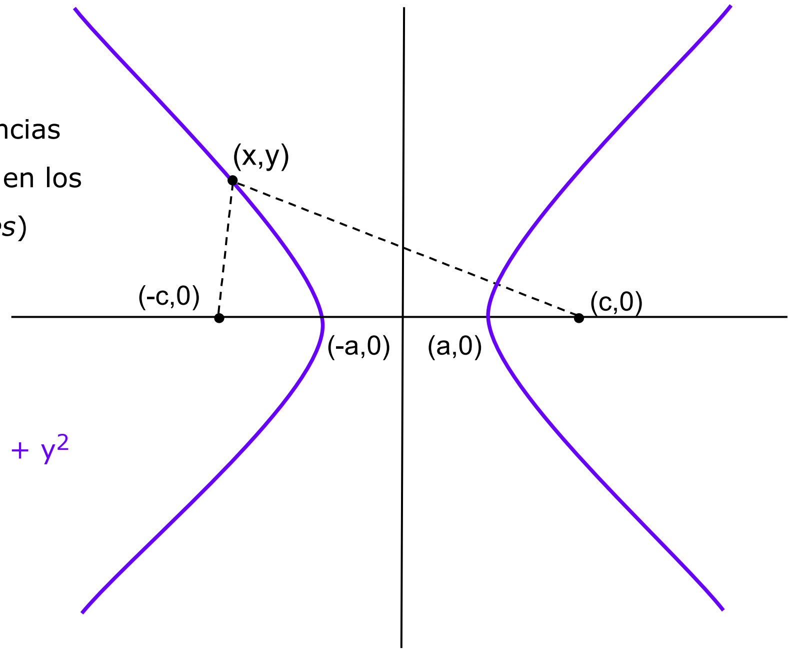
La **excentricidad** de una hipérbola es la razón *distancia entre focos / distancia entre vértices.*

Lema. La forma de una hipérbola está determinada por su excentricidad.

Demostración. Si dos hipérbolas tienen la misma excentricidad y agrandamos una para que las distancias entre los focos coincidan entonces las distancias entre los vértices también coinciden y por lo tanto la diferencia de las distancias de los puntos a los focos también coinciden por lo tanto las dos tienen la misma forma. •

Ecuaciones de las hipérbolas.

Si elegimos el sistema de coordenadas de modo que los focos estén en los puntos (-c,0) y (c,0) y si la diferencia de las distancias es 2a, entonces la hipérbola cruza al eje x en los puntos (a,0) y (-a,0) (estos son los *vértices*)



$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\ (x+c)^2 + y^2$

$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = -4a^2 - 4cx$

$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = -(a + c/a\ x)$

$(x+c)^2 + y^2 = (a + c/a\ x)^2$

$x^2 - c^2 /a^2\ x^2 + y^2 = a^2 - c^2$

$(a^2 - c^2)/a^2\ x^2 + y^2 = a^2 - c^2$ y si definimos $b^2 = c^2 - a^2$ entonces

$-b^2/a^2\ x^2 + y^2 = -b^2$ y dividiendo entre $^-b^2$ queda

$$\boxed{x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1}$$

La excentricidad de esta hipérbola es c/a donde $c^2 = a^2 - b^2$

Ejemplo. ¿Cual es la ecuación de la hipérbola formada por los puntos cuyas distancias a (3,0) y (-3,0) difieren por 4?

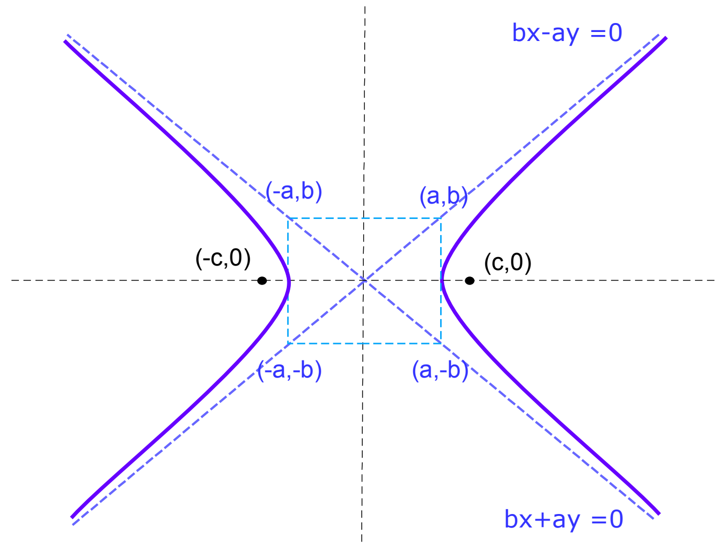
Aquí a=4/2=2, c=3, así que b= $\sqrt{3^2-2^2} = \sqrt{5}$ y la hipérbola tiene ecuación $x^2/4 - y^2/5 = 1$

Ejemplo. ¿Cual es la ecuación de la hipérbola con focos en (2,0) y (-2,0) y vértices en (1,0) y (-1,0)?

Aquí c=2 y a=1 así que b = $\sqrt{c^2-a^2} = \sqrt{3}$ y la hipérbola tiene ecuación $x^2/1 - y^2/3 = 1$

Ejemplo. La ecuación $4x^2 - y^2 = 36$ representa una hipérbola, ya que podemos escribirla como $x^2/9 - y^2/36 = 1$. De aquí podemos hallar los focos y la diferencia de las distancias: a = 3 , b = 6 y $c^2 = a^2+b^2 = 45$ así que c = $\sqrt{45}$, por tanto la diferencia de las distancias es 2a=6 y los focos están en $(-\sqrt{45},0)$ y $(\sqrt{45},0)$.

Asíntotas de la hipérbola.



La ecuación de la hipérbola

$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$

"se parece" a la ecuación

$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 0$

que corresponde a un par de rectas:

$x/a-y/b = 0 \quad x/a+y/b =0$

o sea

$bx-ay =0 \qquad bx+ay =0$

Lema. La hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ se aproxima *asintóticamente* a las rectas $x^2/a^2 - y^2/b^2 =0$

Demostración. Si despejamos y de la ecuación de la hipérbola queda $y = \pm b/a \sqrt{x^2-a^2}$

y si despejamos y de la ecuación de las lineas queda $y= \pm b/a\, x$

Es fácil ver que cuando x crece, $\sqrt{x^2-a^2}$ se aproxima cada vez mas a x: $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-a^2} - x = 0$, así que la hipérbola $y = \pm b/a \sqrt{x^2 - a^2}$ se aproxima cada vez mas a la recta $y = \pm b/a\, x$. •

Las rectas y = b/a x y y = -b/a x son las *asíntotas* de la hipérbola. Teniendo los vértices y las asíntotas de la hipérbola es fácil dibujarla:

Ejemplo. ¿Como se ve la hipérbola $x^2/4 - y^2/9 = 1$?

a=2, b=3

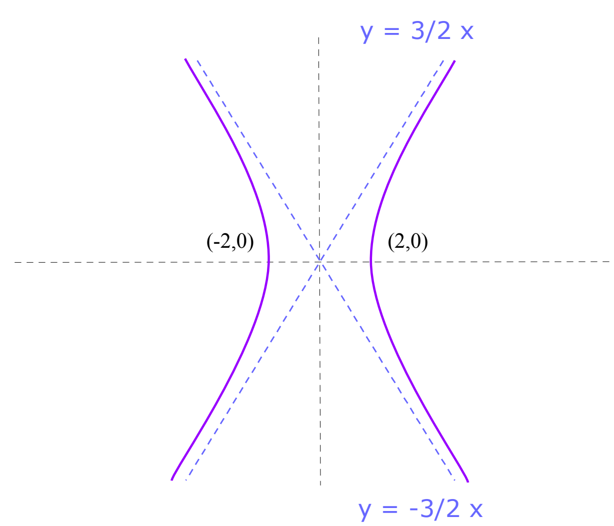
así que los vértices son (-2,0) y (2,0) y

las asíntotas están dadas por

$x^2/4 - y^2/9 = 0$ o sea $y = \pm 3/2\, x$

y como $c=\sqrt{a^2+b^2} =\sqrt{13}$ los focos están en

$(\sqrt{13},0)$ y $(-\sqrt{13},0)$



Ejemplo. Encuentra la ecuación de la hipérbola con vértices en (1,0) y (-1,0) y cuyas asíntotas son las rectas $y=\pm2x$.

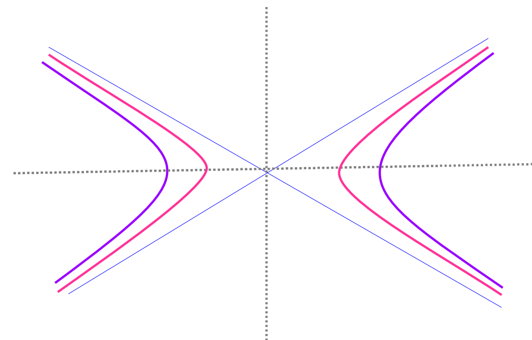
Aquí a=1 y b/a=2 así que b=2 y la ecuación es $x^2/1 - y^2/4 = 1$

Lema. Dos hipérbolas horizontales con las mismas asíntotas tienen la misma forma (solo difieren en el tamaño).

Demostración. Si las hipérbolas tienen ecuaciones $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ y $x^2/a'^2 - y^2/b'^2 = 1$ y sus asíntotas coinciden entonces $a/b=a'/b'$, así que $a'/a=b'/b$.
El escalamiento que lleva los puntos (x,y) a los puntos $(x',y')=(a'/a\ x,\ b'/b\ y)$ envía la primera hipérbola a la segunda, ya que si $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ entonces $x'^2/a'^2-y'^2/b'^2 = (a'/a\ x)^2/a'^2-(b'/b\ y)^2/b'^2=x^2/a^2-y^2/b^2=1$.
Por lo tanto las hipérbolas son iguales salvo por el tamaño. •

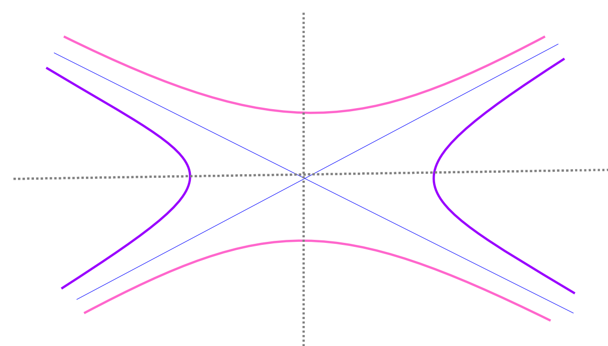
Ejemplo.

Las ecuaciones $x^2 - 2y^2 = 1$ y $4x^2 - 8y^2 = 1$ corresponden a hipérbolas horizontales con asíntotas: $\sqrt{1}x\pm\sqrt{2}y=0$ y $\sqrt{4}x\pm\sqrt{8}y=0$ y estas asíntotas son iguales ya que $\sqrt{1}/\sqrt{2} = \sqrt{4}/\sqrt{8}$.
Así que las dos hipérbolas tienen la misma forma y solo difieren por el tamaño: $4x^2 - 8y^2 = 1$ tiene la mitad del tamaño que $x^2 - 2y^2 = 1$.



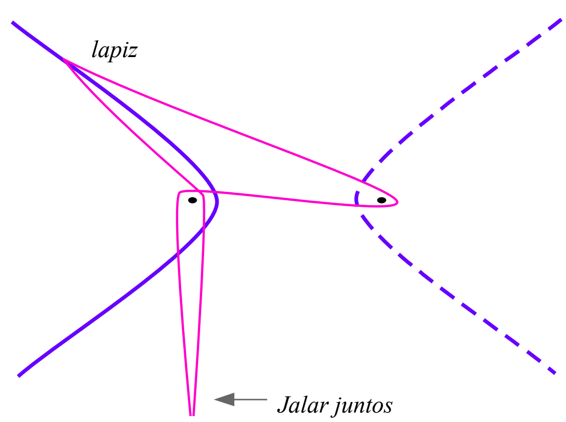
Ejemplo.

Las ecuaciones $x^2 - 4y^2 = 1$ y $x^2 - 4y^2 = -1$ corresponden a hipérbolas con las mismas asíntotas: $x\pm2y=0$ pero los papeles de x y y están intercambiados: la primera es de una hipérbola que abre hacia los lados y la segunda abre hacia arriba y abajo.

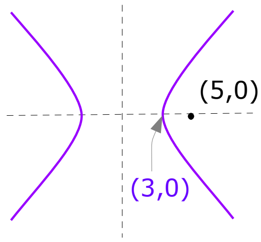


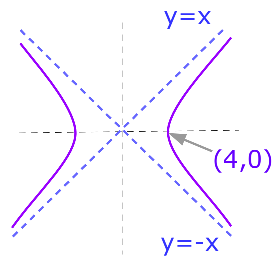
Problemas

8. El diagrama muestra como dibujar parte de una hipérbola usando una cuerda larga que pasa por dos clavos puestos en los focos.
Explica por que funciona.



9. Da las ecuaciones de estas hipérbolas.

a. 

b. 

10. Dibuja cuidadosamente estas hipérbolas, mostrando sus asíntotas y focos.

a. $x^2 - 4y^2 = 16$ b. $4x^2 - 9y^2 = 36$ c. $x^2 - 4y^2 = -16$

11. ¿Cuales de estas hipérbolas tienen la misma forma (sin importar el tamaño ni la posición)

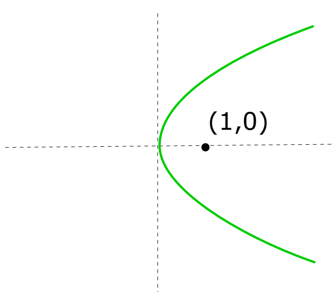
a. $3x^2 - 6y^2 = 1$ b. $4x^2 - 8y^2 = 1$ c. $2x^2 - y^2 = 1$

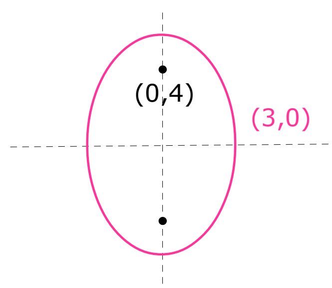
Problemas de repaso

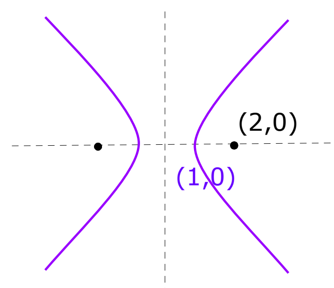
12. Dibuja cuidadosamente las siguientes cónicas :

$4x^2 + y = 36$ $4x^2 + y^2 = 36$ $4x^2 - y^2 = 36$ $4x^2 - y^2 = -36$

13. ¿Que ecuaciones satisfacen estas cónicas?







14. Muestra que los centros de las circunferencias tangentes a 2 círculos fijos forman un circulo, una elipse o una hipérbola, dependiendo de la posición de los 2 círculos.

15. Si encoge el circulo $x^2 + y^2 = 1$ verticalmente a la mitad, se convierte en una elipse. ¿Donde están sus focos? ¿Cuanto suman las distancias de los puntos de la elipse a los focos?

16. Muestra que las hipérbolas $4x^2-6y^2 = 36$ y $6x^2-9y^2 =16$ tienen la misma forma y solo difieren en el tamaño ¿Cuantas veces mas grande es una que la otra? (amplifica una para que su ecuación se convierta en la de la otra).

Ecuaciones de 2o grado

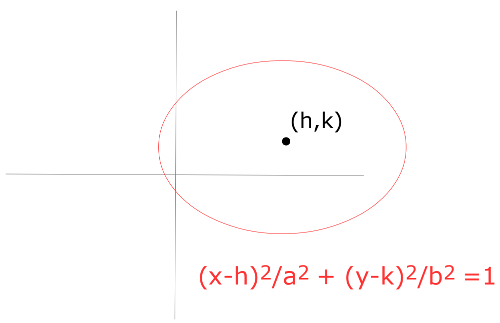
Lema. Las ecuaciones $Ax^2+By^2 = C$ corresponden a círculos, elipses, hipérbolas, pares de rectas, puntos o el vacío (dependiendo de los signos de A, B y C).

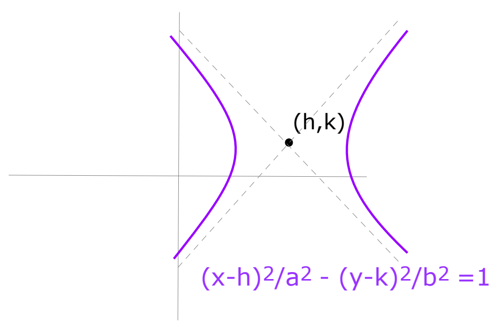
Demostración. Si A,B,C tienen todos el mismo signo podemos dividir por C y queda $A'x^2+B'y^2 = 1$ con $A',B'>0$, que es una elipse. Si A, B tienen el mismo y C=0 es un punto, y si el signo de C es opuesto al de A y B entonces es el vacío Si A y B tienen distinto signo y C no es 0 es una hipérbola, y si C=0 es un par de rectas. •

Ejemplos.

$2x^2+3y^2 = 1$ es una elipse	$2x^2-3y^2 = 1$ es una hipérbola	$2x^2 = 1$ son dos rectas
$2x^2+3y^2 = 0$ es un punto	$2x^2-3y^2 = 0$ son dos rectas	$2x^2 = 0$ es una recta
$2x^2+3y^2 = -1$ es el vacío	$2x^2-3y^2 = -1$ es una hipérbola	$2x^2 = -1$ es el vacío

Las ecuaciones $Ax^2+By^2 = C$ corresponden a cónicas centradas en el origen. Trasladándolas podemos hallar las ecuaciones de cónicas con otros centros:





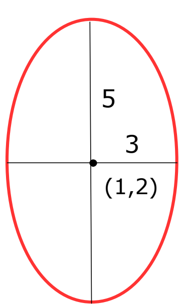
Ejemplos.

- ¿Que ecuación tiene el circulo de radio 3 centrado en (1,2)?

  La ecuación del circulo es $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = 3$ o bien

  $(x-1)^2+(y-2)^2 = 9$

- ¿Que ecuación cumple esta elipse?



Si desplazáramos la elipse 1 unidad a la izquierda y 2 hacia abajo entonces quedaría centrada en el origen y su ecuación seria

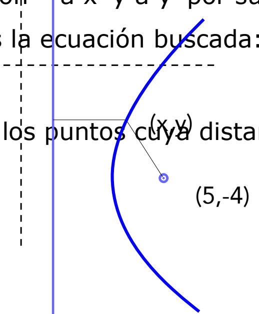
$x'^2 / 3^2 + y'^2 / 5^2 = 1$ *

El desplazamiento está dado por $(x',y)=(x-1,y-2)$.

Si reemplazamos en la ecuación * a x' y a y' por sus valores en términos de x y y obtenemos la ecuación buscada:

$(x-1)^2 / 3^2 + (y-2)^2 / 5^2 = 1$

- ¿Que ecuación tiene la parábola formada por los puntos cuya distancia al punto



(5,-4) es igual a su distancia a la recta x=1?

La distancia de (x,y) a (5,-4) es $\sqrt{(x-5)^2+(y+4)^2}$

y la distancia de (x,y) a la recta es |x-1|

así que la ecuación es $\sqrt{(x-5)^2+(y+4)^2} = |x-1|$

si elevamos al cuadrado queda

$(x-5)^2 + (y+4)^2 = (x-1)^2$

y simplificando queda

$-8x + y^2 + 8y = -40$

Lema. Todas las ecuaciones de segundo grado $Ax^2+By^2+Cx+Dy = E$ corresponden a círculos, elipses, hipérbolas, parábolas, pares de rectas, rectas, puntos o el vacío.

Demostración. Si A≠0 y B≠0 entonces podemos completar cuadrados para escribir a la ecuación en la forma $A(x-a)^2+B(y-b)^2 = E'$ y esta es una cónica (circulo, elipse, hipérbola, par de rectas, punto o el vacío, dependiendo del signo de E') con centro en (a,b).

Si A≠0 y B=0 entonces la ecuación se puede escribir como $A(x-a)^2+Dy= E'$ que es una parábola si D≠0 y si D=0 es una recta o un par de rectas paralelas o el vacío, dependiendo del signo de E'. •

Ejemplos.

¿A que curva corresponde la ecuación $x^2-8x-6y-14=0$?

La ecuación puede escribirse como

$x^2-8x = 6y +14$

si completamos cuadrados queda

$x^2-8x+16 = 6y + 14 + 16$

o sea $(x-4)^2 = 6(y+5)$

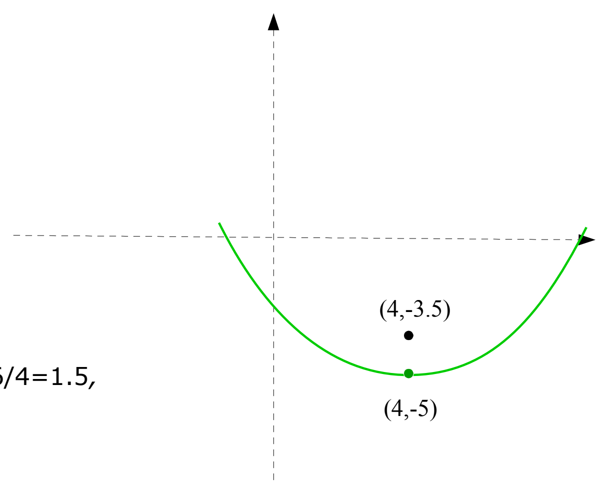
que puede escribirse como

$x'^2 = 6y'$ *donde* $x' = x-4$, $y'=y+5$

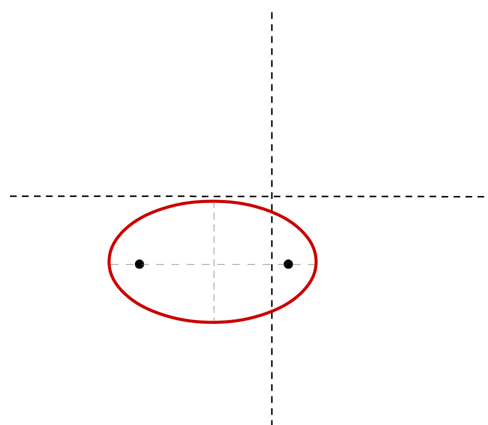
Así que es una parábola con vértice en (4,-5)

La distancia focal es 1/4 del coeficiente lineal, es decir 6/4=1.5,

así que el foco esta en (4,-5)+(0,1.5)=(4,-3.5)



¿A que curva corresponde la ecuación $x^2 + 4y^2 + 2x + 8y = -1$?



La ecuación puede escribirse como

$(x^2+2x \quad) +4(y^2+2y \quad) = -1$

y si completamos cuadrados queda

$(x^2+2x+1) +4(y^2+2y+1) = -1+1+4 = 4$

$(x+1)^2 +4(y+1)^2 = 4$

$(x+1)^2/2^2 + (y+1)^2/1^2 = 1$

Esta es una elipse centrada en (-1,-1)

a=2, b=1 y $c = \sqrt{2^2 -1^2} = \sqrt{3}$ así que es una elipse horizontal, con eje mayor 4 y el eje menor 2

los vértices son (-1-2,-1) y (-1+2,-1) y los focos $(-1-\sqrt{3},-1)$ y $(-1+\sqrt{3},-1)$

Ejemplo. ¿A que curva corresponde la ecuación $x^2-9y^2+6x+36y=18$?

La ecuación puede escribirse como

$(x^2+6x \quad) -9(y^2-4y \quad) = 18$

y si completamos cuadrados queda

$(x^2+6x+9) -9(y^2-4y+4) = 18+9-36 = -9$

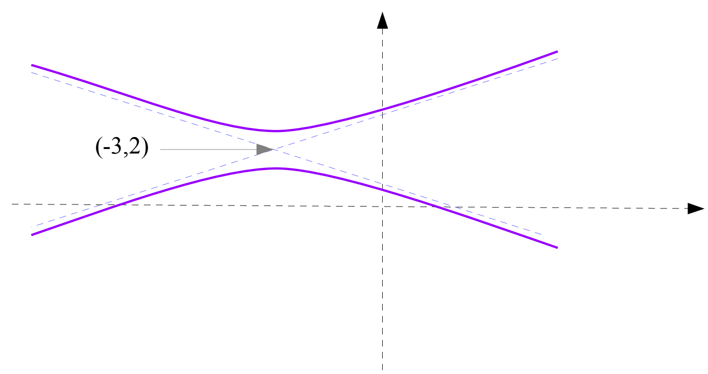
$(x+3)^2 -9(y-2)^2 = -9$

$-(x+3)^2 / 3^2 + (y-2)^2 / 1^2 = 1$

Esta es una hipérbola centrada en (-3,2)

que abre hacia arriba, con a=1, b=3 y $c^2=1^2+3^2=10$ así

que $c = \sqrt{10}$



Los vértices están en (-3,2+1) y (-3,2-1) y los focos están en $(3,2+\sqrt{10})$ y $(3,2-\sqrt{10})$

Las asíntotas están dadas por

$-(x+3)^2 / 3^2 + (y-2)^2 / 1^2 = 0$

es decir $y-2 = \pm 1/3\ (x+3)$ o sea $y = 1/3\ x + 3$, $y = -1/3\ x + 1$

Una definición común para (casi) todas las cónicas.

¿Que curva forman los puntos del plano cuya distancia a la recta y=0 es igual a su distancia al punto (0,3)?

La distancia de (x,y) a (0,3) es $\sqrt{x^2+(y-3)^2}$

La distancia de (x,y) a la recta y=0 es |y|

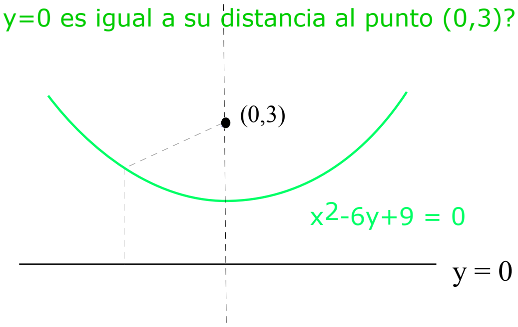
Si las distancias son iguales entonces

$\sqrt{x^2+(y-3)^2} = |y|$ elevando al cuadrado

$x^2+(y-3)^2 = y^2$ simplificando

$x^2-6y+9 = 0$ o sea $x^2= 6(y-3/2)$

es una parábola vertical con foco en (0,3)



¿Que curva forman los puntos cuya distancia al punto (0,3) es la mitad de su distancia a la recta y=0?

Si la distancia a (0,3) es la mitad de la distancia a la recta y=0 entonces

$\sqrt{x^2+(y-3)^2} = 1/2|y|$ elevado al cuadrado queda

$x^2+(y-3)^2= 1/4y^2$ y simplificando queda

$x^2+3/4y^2-6y = -9$

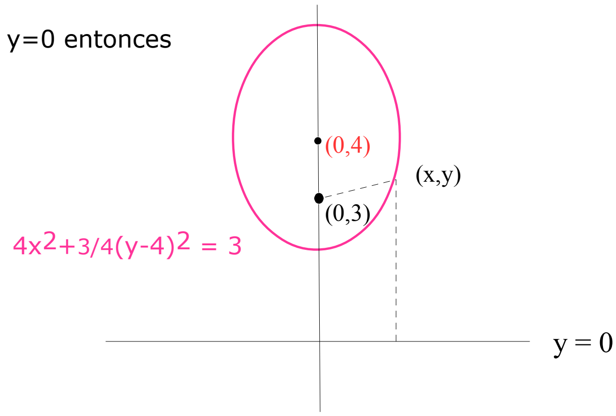
esta ecuación parece la de una elipse,

para comprobarlo podemos completar cuadrados:

$x^2+3/4[y^2-8y+16] = -9+12$

$4x^2+3/4(y-4)^2 = 3$

que es la ecuación de una elipse centrada en (0,4).



¿Que curva forman los puntos cuya distancia al punto (0,3) es el doble de su distancia a la recta y=0?

Si la distancia al punto (0,3) es el doble de la distancia a la recta y=0 entonces

$\sqrt{x^2+(y-3)^2} = 2|y|$

elevado al cuadrado queda

$x^2+(y-3)^2 = 4y^2$

y expandiendo y simplificando queda

$x^2-3y^2-6y = -9$

esta ecuación parece la de una hipérbola, podemos completar cuadrados:

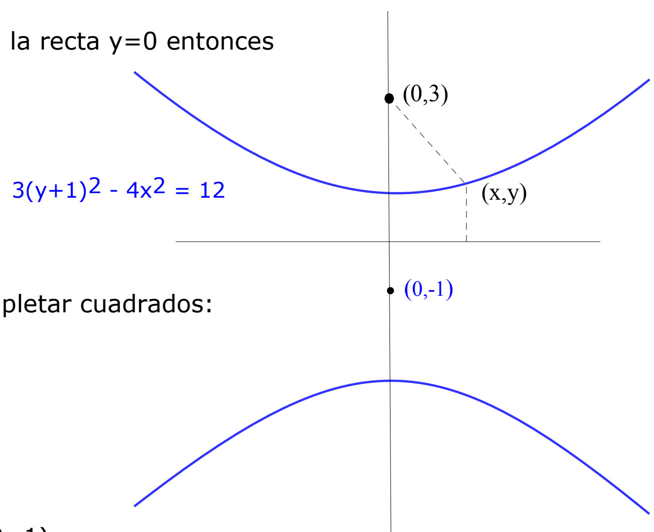
$x^2-3[y^2+2y+1] = -9-3$

$x^2-3(y+1)^2 = -12$

$x^2-3(y+1)^2 = -12$ o bien

$-x^2/12+(y+1)^2/4= 1$

que corresponde a una hipérbola vertical centrada en (0,-1).



Lema. El lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto *p* es ***e*** veces la distancia a una recta *L* es una elipse, una parábola o una hipérbola, dependiendo del valor de **e.**

Demostración. Si elegimos el sistema de coordenadas de modo que la recta L sea x=0 y el punto P sea (1,0) entonces un punto (x,y) que satisface la condición debe cumplir:

$\sqrt{x^2+(y-1)^2} = e\ |y|$

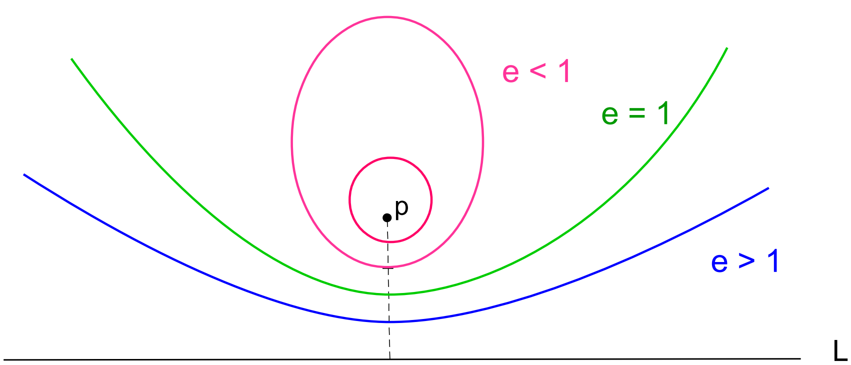
$x^2 + y^2 - 2y + 1 = e^2y^2$

$x^2 + (1-e^2)y^2 - 2y = -1$

Si $0<e<1$ es una elipse.

Si $e=1$ es una parábola.

Si $e>1$ es una hipérbola.



¿Que tiene que ver el punto P con los focos de la cónica? Si una elipse (o hipérbola) tiene sus focos en (c,0) y (-c,0) y la suma (o diferencia) de las distancias es 2a entonces su ecuación es

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - 2a = \pm \sqrt{(x+c)^2+y^2}$ elevando al cuadrado

$(x-c)^2+y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2 = (x+c)^2+y^2$

$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = -4a^2 +(x+c)^2+y^2 -(x-c)^2-y^2$

$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = -4a^2 + 4cx$ dividiendo entre 4a

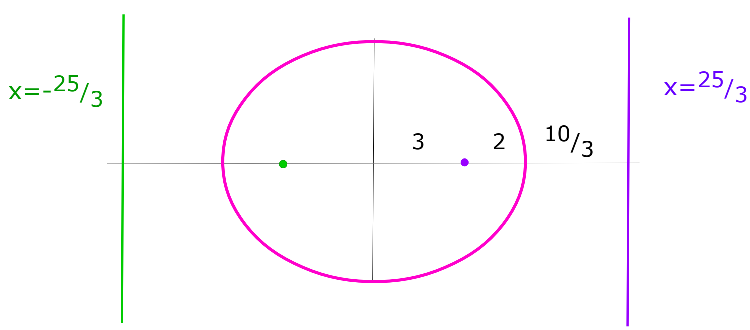
$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = - a - c/a\, x = c/a\,(x - a^2/c)$

Esto dice que la distancia de (x,y) a (c,0) es c/a veces la distancia de (x,y) a la recta $x = a^2/c$ De modo que F es un foco de la elipse o hipérbola. El numero **e**=c/a es la *excentricidad* de la cónica y a la linea L se le llama *directriz*.

Ejemplo. ¿Cual es la excentricidad de una hipérbola cuyas asíntotas son perpendiculares?
Si las asíntotas son $y=\pm x$ o sea $x^2-y^2=0$ entonces la hipérbola tiene ecuación $x^2-y^2=k^2$ (o $-x^2+y^2=k^2$) es decir $x^2/k^2 -y^2/k^2 = 1$ (o $-x^2/k^2 +y^2/k^2 = 1$) así que a=b y por lo tanto $c= \sqrt{a^2+a^2} =\sqrt{2}\, a$.
y la excentricidad es $c/a = \sqrt{2}$.

Ejemplo. ¿Donde están las directríces de la elipse $x^2/25 + y^2/16 = 1$?
Aquí a=5, b=4 así que $c=\sqrt{25-16} = 3$ y la elipse tiene excentricidad $e=c/a= {}^3/_5$.

Las directrices son perpendiculares a la linea de los focos y vértices, y la distancia del vértice al foco (que es 2) es ${}^3/_5$ de la distancia del vértice a la directriz. Así que la distancia de la directriz al vértice es ${}^5/_3(2)= {}^{10}/_3$

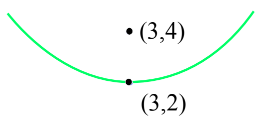


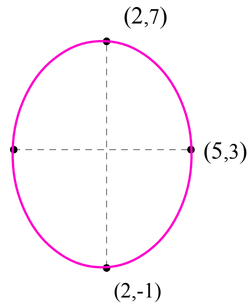
Lema. La forma de cada cónica (salvo por el tamaño) esta determinada por su excentricidad.

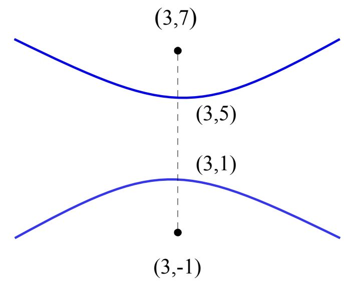
Demostración. Ya sabíamos que todas las parábolas son iguales (salvo por el tamaño), y también sabemos que la forma de las elipses e hipérbolas esta determinada por la razón c/a = distancia entre los focos / distancia entre los vértices. •

Problemas

17. ¿Cuales son las ecuaciones de estas cónicas?







18. Dibuja las siguientes cónicas, mostrando sus vértices, focos, asíntotas, etc

a. $x^2+4y^2+4x-12y = 51$

b. $x^2-9y^2+6x+18y = 4$

c. $y^2+6y+2x = 7$

19. ¿Que ecuación cumplen los puntos del plano cuya distancia al punto (0,0) es el triple de su distancia al punto (4,8)? ¿A que curva corresponde esta ecuación?

20. ¿Que ecuaciones cuadráticas cumplen los puntos del plano cuya distancia a (4,0) es ...

a. igual a su distancia a la recta $x=0$?

b. un tercio de su distancia a la recta $x=0$?

c. el triple de su distancia a la recta $x=0$?

¿A que cónicas corresponden estas ecuaciones?

21. Encuentra la excentricidad de las siguientes curvas

a. Una elipse que tiene el doble de largo que de ancho

b. La hipérbola $x^2 - 4y^2 = 1$

c La órbita de la tierra alrededor del sol

22. ¿Que curvas forman los puntos del plano cuya distancia a un punto p es igual a su distancia a un círculo C? (hay dos casos)