Ecuaciones de segundo grado.

Ya sabemos que las cónicas cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados tienen ecuaciones de la forma $Ax^2+By^2+Cx+Dy=E$, y de estas ecuaciones podemos deducir su forma y posición.
Pero cuando las cónicas están inclinadas sus ecuaciones son mas complicadas.

Ejemplos.

- ¿Cual es la ecuación de la elipse formada por los puntos del plano cuyas distancias a (1,0) y (0,2) suman 3?

  $\sqrt{(x-1)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y-2)^2} = 3$

  $\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 3 - \sqrt{x^2+(y-2)^2}$

  $(x-1)^2+y^2 = 9 - 6\sqrt{x^2+(y-2)^2} + x^2+(y-2)^2$

  $(x-1)^2+y^2 -9 - x^2 -(y-2)^2 = - 6\sqrt{x^2+(y-2)^2}$

  $-2x + 4y -4 = - 6\sqrt{x^2+(y-2)^2}$

  $(-2x+4y-4)^2 = 36[x^2+(y-2)^2]$

  $4x^2 +16y^2+16-16xy+16x-32y = 36x^2+36y^2-144y+144$

  $-32x^2 -16xy -20y^2 +112y -144 +16x = 128$

- ¿Cual es la ecuación de la parábola formada por los puntos cuya distancia a (1,1) es igual a su distancia a la recta x+y=0?

  La distancia de (x,y) a (1,1) es $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$

  La distancia de (x,y) a la recta x=y es $|(x,y)(1,1)|/|(1,1)|={}^1/_{\sqrt{2}}\,(x+y)$

  la igualdad de las distancias se expresa como

  $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = {}^1/_{\sqrt{2}}\,(x+y)$

  que elevada al cuadrado queda

  $(x-1)^2+(y-1)^2 = {}^1/_2\,(x+y)^2$

  y expandiendo y simplificándola queda

  ${}^1/_2\,x^2 - xy + {}^1/_2\,y^2 - 2x - 2y = -2$

Procediendo como en los ejemplos anteriores, no es difícil probar que todas las cónicas en el plano tienen ecuaciones de segundo grado, pero estas ecuaciones pueden ser complicadas.

¿Como podemos saber si una de estas ecuaciones corresponde a una elipse, hipérbola, parábola o a alguna otra curva? ¿Será posible saber la forma viendo la ecuación?

¿Será cierto que todas las ecuaciones de segundo grado corresponden a cónicas o a cónicas degeneradas en alguna posición?

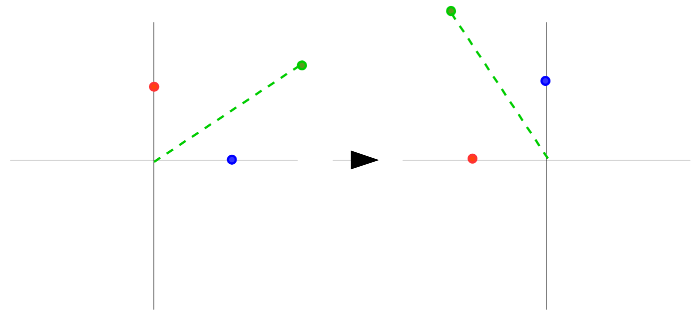
Para contestar estas preguntas es mejor proceder al revés: viendo como cambian las ecuaciones de las curvas al girarlas. Para esto necesitamos ver como cambian las coordenadas de sus puntos.

Ejemplos.

- ¿A donde va el punto (x,y) si lo giramos 90° alrededor del origen?

  $(1,0) \to (0,1)$

  $(0,1) \to (-1,0)$

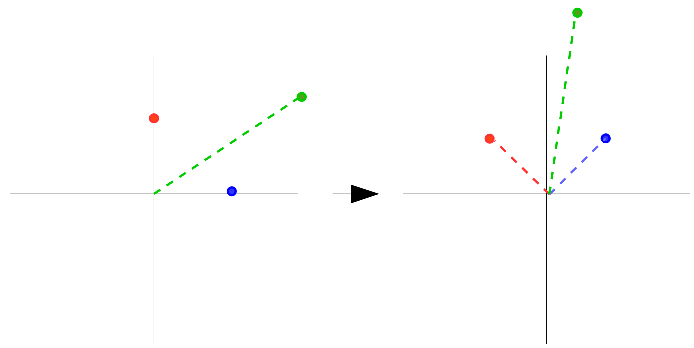


  $(x,y) = x(1,0)+y(0,1) \to x(0,1)+y(-1,0) = (-y,x)$

- ¿A donde va el punto (x,y) si lo giramos 45° alrededor del origen?

  $(1,0) \to (^1/_{\sqrt{2}}, {}^1/_{\sqrt{2}})$

  $(0,1) \to (-^1/_{\sqrt{2}}, {}^1/_{\sqrt{2}})$

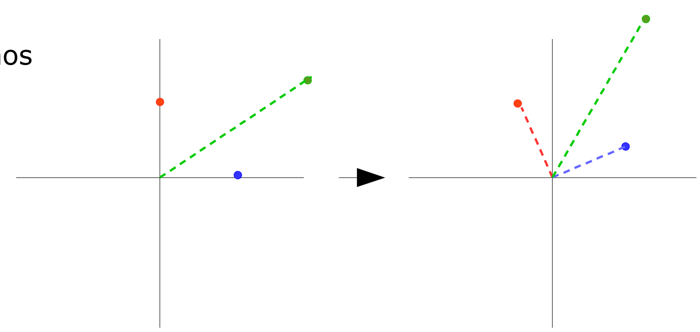


  $(x,y) = x(1,0)+y(0,1) \to x(^1/_{\sqrt{2}}, {}^1/_{\sqrt{2}})+y(-^1/_{\sqrt{2}}, {}^1/_{\sqrt{2}}) = (^1/_{\sqrt{2}}x - {}^1/_{\sqrt{2}}y,\ {}^1/_{\sqrt{2}}x + {}^1/_{\sqrt{2}}y)$

- ¿A donde va el punto (x,y) si lo giramos un ángulo θ alrededor del origen?

  $(1,0) \to (\cos\theta, \mathrm{sen}\theta)$

  $(0,1) \to (-\mathrm{sen}\theta, \cos\theta)$



  $(x,y) = x(1,0)+y(0,1) \to x(\cos\theta,\mathrm{sen}\theta)+y(-\mathrm{sen}\theta, \cos\theta) = (\cos\theta\, x - \mathrm{sen}\theta\, y,\ \mathrm{sen}\theta\, x + \cos\theta\, y)$

- Si giramos 60° entonces $\cos 60° = {}^1/_2$ $\mathrm{sen} 60° = {}^{\sqrt{3}}/_2$

  $(x,y) \to (^1/_2\, x - {}^{\sqrt{3}}/_2\, y,\ {}^{\sqrt{3}}/_2\, x + {}^1/_2\, y)$

Si al girar una curva las coordenadas de sus puntos cambian de (x,y) a otras coordenadas (x',y'), entonces la ecuación original que cumplen x y y debe cambiar a una nueva ecuación que cumplan x' y y'. Para hallar la nueva ecuación basta reescribir la ecuación original en términos de las nuevas coordenadas.

Ejemplo. ¿Como cambia la ecuación de la parábola $y = x^2$ al rotarla 90°?

La rotación de 90° está dada por $(x',y') = (-y,x)$

así que $x' = -y$, $y' = x$

por lo tanto $x = y'$, $y=-x'$

de modo que la ecuación $y = x^2$ se convierte en $-x' = y^2$.

Ejemplo. ¿Como cambia la ecuación de la elipse $50x^2 + 25y^2 = 100$ al rotarla 45°?

La rotación de 45° está dada por $(x',y') = (^1/_{\sqrt{2}}x - ^1/_{\sqrt{2}}y,\ ^1/_{\sqrt{2}}x + ^1/_{\sqrt{2}}y)$

Así que las nuevas coordenadas de los puntos son

$$x' = ^1/_{\sqrt{2}}\, x - ^1/_{\sqrt{2}}\, y$$

$$y' = ^1/_{\sqrt{2}}\, x + ^1/_{\sqrt{2}}\, y$$

Si despejamos x y y en términos de x' y y' queda

$$x = ^1/_{\sqrt{2}}\, x' + ^1/_{\sqrt{2}}\, y'$$

$$y = -^1/_{\sqrt{2}}\, x' + ^1/_{\sqrt{2}}\, y'$$

La ecuación $50x^2 + 25y^2 = 100$ cambia a

$$50(^1/_{\sqrt{2}}\, x'+^1/_{\sqrt{2}}\, y')^2 + 25(-\,^1/_{\sqrt{2}}\, x'+^1/_{\sqrt{2}}\, y')^2 = 100$$

$$50(^1/_2\, x'^2+x'y'+^1/_2\, y'^2)+ 25(^1/_2\, x'^2 -xy +^1/_2\, y'^2) = 100$$

$$75/2\, x'^2 + 25\, x'y'+ 75/2\, y'^2 = 100.$$

Ejemplo. ¿Como cambia la ecuación $50x^2 + 25y^2 = 100$ al hacer la rotación $(x'y')=(^3/_5\, x+4/5y,4/5x+3/5y)$?

Las nuevas coordenadas son

$$x'= ^3/_5\, x+ ^4/_5\, y \qquad\qquad x = ^3/_5\, x' - ^4/_5\, y'$$

$$\Rightarrow$$

$$y'=-^4/_5\, x+ ^3/_5\, y \qquad\qquad y = ^4/_5\, x'+ ^3/_5\, y'$$

La ecuación cambia a

$$50(^3/_5x'-^4/_5\, y')^2+25(^4/_5\, x'+^3/_5\, y')^2 = 100$$

$$50(^9/_{25}\, x'^2 -^{24}/_{25}\, x'y'+^{16}/_{25}\, y'^2)+25(^{16}/_{25}\, x'^2 +^{24}/_{25}\, x'y'+^9/_{25}\, y'^2) = 100$$

$$34x'^2 - 24x'y' +41y'^2 = 100.$$

Veamos como cambia la ecuación general $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=F$ al hacer una rotación:

Al rotar un ángulo θ las coordenadas de los puntos cambian así:

$x' = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\theta$

$y' = x\,\mathrm{sen}\theta + y\cos\theta$

Para hacer las cuentas mas simples abreviaremos c=cosθ y s=senθ, entonces

$$\begin{array}{lcl} x' = cx - sy & & x = cx' + sy' \\ y' = sx + cy & \Rightarrow & y = -sx' + cy' \end{array}$$

Si ahora sustituimos estos valores en la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ obtenemos

$A(cx'+sy')^2 + B(cx'+sy')(-sx'+cy') + C(-sx'+cy')^2 + D(cx'+sy') + E(-sx'+cy') = F$

expandiendo queda

$A(c^2x'^2+2csx'y'+s^2y'^2) + B(-csx'^2+c^2x'y'-s^2x'y'+csy'^2) + C(s^2x'^2-2csx'y'+c^2y'^2) + D(cx'+sy') + E(-sx'+cy') = F$

y reordenando los términos queda

$(Ac^2-Bcs+Cs^2)x'^2 + (2Acs+Bc^2-Bs^2-2Ccs)x'y' + (As^2+Bcs+Cc^2)y'^2 + (Dc-Es)x' + (Ds+Ec)y' = F$

que es una ecuación de la misma forma: $A'x'^2 + B'xy + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F'$ donde los nuevos coeficientes son una combinación los coeficientes originales.

Teorema: Todas las ecuaciones de 2° grado: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ corresponden a cónicas (círculos, elipses, hipérbolas, o parábolas) o cónicas degeneradas (2 rectas, una recta, un punto o el vacío).

Demostración. Ya sabemos que todas las ecuaciones de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey = F$ corresponden a cónicas (o a cónicas degeneradas) con ejes de simetrías paralelos a los ejes de coordenadas. Para ver que cada ecuación de la forma $A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y = F$ corresponde a una cónica, basta ver que hay alguna rotación que hace que la ecuación se convierta en $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F$ (con $B' = 0$).

Al rotar la curva un ángulo θ los coeficientes de la ecuación cambian de modo que

$B' = 2(A-C)\cos\theta\,\mathrm{sen}\theta - B(\cos^2\theta-\mathrm{sen}^2\theta)$

$\quad = (A-C)\,\mathrm{sen}2\theta - B\cos2\theta$ (ya que $2\cos\theta\,\mathrm{sen}\theta = \mathrm{sen}2\theta$ y $\cos^2\theta-\mathrm{sen}^2\theta = \cos2\theta$)

Por lo tanto $B' = 0$ si $\cot2\theta = \cos2\theta/\mathrm{sen}2\theta = (A-C)/B$.

Y hay un valor de θ para el que esto ocurre porque la cotangente toma todos los valores entre $-\infty$ y ∞. •

De la prueba anterior se sigue que el número (A-C)/B nos indica la inclinación de la cónica.

Ejemplo. ¿Que cónica representa la ecuación $x^2+3xy+y^2=1$?

Aquí A=1, B=3, C=1 así que (A-C)/B = (1-1)/3 = 0

$\cot 2\theta = 0$ si $2\theta=90°$ o sea $\theta=45°$.

Si rotamos la curva 45°

$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \qquad\qquad x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'$

$\qquad\qquad\qquad\qquad =>$

$y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \qquad\qquad y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'$

la ecuación $x^2 + 3xy + y^2 = 1$ se convierte en

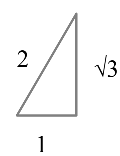
$(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y')^2 + 3(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y')(-\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y') + (-\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y')^2 = 1$

$(\frac{1}{2}x'^2 + x'y' + \frac{1}{2}y'^2) + 3(-\frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2) + (\frac{1}{2}x'^2 - x'y' + \frac{1}{2}y'^2) = 1$

y simplificando queda

$-\frac{1}{2}x'^2 + \frac{5}{2}y'^2 = 1$ *que es una hipérbola*

Ejemplo. ¿Que cónica representa la ecuación $3x^2+\sqrt{12}xy+y^2=1$?



Aquí A=3, B=√12, C=1 así que $\cot 2\theta=(A-C)/B = (3-1)/\sqrt{12} = 1/\sqrt{3}$

así que $2\theta=60°$ o sea 30°.

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\text{sen}\,30° = \frac{1}{2}$

Si rotamos la curva 30°

$x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \qquad\qquad x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'$

$\qquad\qquad\qquad\qquad =>$

$y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \qquad\qquad y = -\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'$

la ecuación $3x^2 + \sqrt{12}xy + y^2 = 1$ se convierte en

$3(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y')^2 + \sqrt{12}(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y')(-\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y') + (-\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y')^2 = 1$

$3(\frac{3}{4}x'^2 + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}x'y' + \frac{1}{4}y'^2) + \sqrt{12}(-\frac{\sqrt{3}}{4}x'^2 - \cancel{\frac{2}{4}}x'y' + \frac{\sqrt{3}}{4}y'^2) + (\frac{3}{4}x'^2 - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}x'y' + \frac{1}{4}y'^2) = 1$

$\frac{6}{4}x'^2 + \frac{10}{4}y'^2 = 1$ *que es una elipse.*

Invariantes.

Al rotar un ángulo θ la ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$$

se convierte en:

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F$$

donde

$A' = A\cos^2\theta - B\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + C\,\text{sen}^2\theta$
$B' = 2(A-C)\cos\theta\,\text{sen}\,\theta - B(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)$
$C' = A\,\text{sen}^2\theta + B\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + C\cos^2\theta$
$D' = D\cos\theta - E\,\text{sen}\,\theta$
$E' = D\,\text{sen}\,\theta + E\cos\theta$

Aunque los coeficientes de la primera ecuación de mezclan de una manera complicada para dar los coeficientes de la segunda, la forma de la curva no cambia, así que debe haber algo en las ecuaciones que no cambie.

Afirmación:

- $A' + C' = A + C$
- $D'^2 + E'^2 = D^2 + E^2$
- $4A'C' - B'^2 = 4AC - B^2$

Demostración. Tarea (hay que hacer las cuentas). •

Estas cantidades *invariantes* contienen información sobre la forma de la curva, que es independiente de las coordenadas, y que permiten saber como quedara la ecuación después de la rotación *sin tener que hacerla*.

Ejemplo. ¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$?

Aquí $A=1$, $B=2$, $C=3$

Si la rotamos para que $B'=0$

$A'+C' = A+C = 4$ $\quad$ $4A'C' = 4AC - B^2 = 8$ $\quad$ (ya que $B' = 0$)

así que

$C' = 4-A'$ $\quad$ $4A'(4-A') = 8$

por lo tanto

$4A'^2 - 16A' + 8 = 0$ $\quad$ $A' = 2 +/- \sqrt{2}$ $\quad$ $C' = 2 -/+ \sqrt{2}$

y la ecuación queda

$(2+\sqrt{2})x'^2 + (2-\sqrt{2})y'^2 = 4$ $\quad$ *es una elipse*

Ejemplo. ¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 3xy + 2y^2 = 4$?

Aquí $A=1$, $B=3$, $C=2$

Si la rotamos para que $B'=0$

$A'+C' = A+C = 3$ $\quad$ $4A'C' = 4AC - B^2 = -1$ $\quad$ (ya que $B' = 0$)

así que

$C' = 3-A'$ $\quad$ $4A'(3-A') = -1$

Por lo tanto

$4A'^2 - 12A' - 1 = 0$ $\quad$ $A' = 3 +/- \sqrt{10}$ $\quad$ $C' = 3 -/+ \sqrt{10}$

y la ecuación queda

$(3+\sqrt{10})x'^2 + (3-\sqrt{10})y'^2 = 4$ $\quad$ *es una hipérbola*

El discriminante.

Al hacer una rotación la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ se convierte en

$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F$ donde $4A'C' - B'^2 = 4AC - B^2$

Este numero es el *discriminante* de la ecuación.

Cuando $B' = 0$ el discriminante es 4AC y la forma de la curva $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F$ depende primordialmente de A' y C' (en las elipses A y C tienen el mismo signo, en las hipérbolas A y C tienen signo contrario y en las parábolas A o C son 0). Para reconocer entre elipses, hipérbolas o parábolas basta entonces saber el *signo* de A'C', que es el signo del discriminante de la ecuación.

Ejemplos.

¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$?

$4AC - B^2 = 4\cdot1\cdot3 - 2^2 = 8 > 0$ así *que debe ser una elipse, un punto o el vacío*

En este caso es una elipse.

($x^2 + 2xy + 3y^2 = 0$ es *un punto*) ($x^2 + 2xy + 3y^2 = -1$ es el vacío)

¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 3xy + 2y^2 = 4$?

$4AC - B^2 = 4\cdot1\cdot2 - 3^2 = -1 < 0$ así *que debe ser una hipérbola o 2 rectas que se intersectan.*

En este caso es una hipérbola.

($x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$ es *un par de rectas:* $(x+y)(x+2y) = 0$)

¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 2xy + y^2 = 4$?

$4AC - B^2 = 4\cdot1\cdot1 - 2^2 = 0$ *debe ser una parábola, o una recta, o 2 rectas paralelas.*

Se puede escribir como $(x+ y)^2 = 4$, *así que es un par de rectas:* $x+y = 2$, $x+y = -2$.

($x^2 + 2xy + y^2 = 0$ es *una recta:* $x+y = 0$)

Problemas

1. ¿Que ecuaciones cuadráticas cumplen

   a. La elipse formada por los puntos cuyas sus distancias a (-1,-1) y a (1,1) suman 3?

   b. La hipérbola formada por los puntos cuyas distancias a (-1,-1) y a (1,1) difieren por 2?

2. Si se hace la rotación $(x',y') = (^3/_5 x+^4/_5 y, -^4/_5 x+^3/_5 y)$

a. ¿Cual es la imagen de la recta $p(t)=(1+3t,3-2t)$?

b. ¿Y la imagen de la recta $2x+3y=11$?

c. ¿ Cual es la imagen del círculo $p(t)=(2\cos t,2\operatorname{sen} t)$?

d. ¿Y la imagen del círculo $x^2+y^2=4$?

3. ¿Como queda la ecuación de la hipérbola $9x^2-4y^2=1$...

a. si se traslada 3 unidades a la derecha y 1 unidad hacia arriba?

b. si se aumenta su tamaño al doble?

c. si se rota 90 grados?

d. si se rota 45 grados?

4. ¿Que inclinación tienen los ejes de estas cónicas? Rótalas para que no estén inclinadas.

a. $x^2+xy+y^2 = 3$

b. $xy+y^2 = 2$

c. $2x^2+3xy-2y^2 = 1$

5. Muestra que si las ecuaciones $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = F$ y $A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 = F$ corresponden a una misma cónica rotada entonces

a. $A + B = A' + B'$

b. $4AC-B^2 = 4A'C' - B'^2$

6. Usa los invariantes $A+C$ y $4AC-B^2$ para hallar la forma exacta de las siguientes cónicas.

a. $3x^2+2xy+3y^2= 2$

b. $x^2+2xy = 3$

c. $3x^2+2xy+y^2 = 4$

d. $2x^2+4xy+y^2 = 5$

e. $4x^2+4xy+y^2 = 6$

7. ¿Que cónicas son las siguientes? (basta decir: elipse, hipérbola, parábola, 2 rectas, una recta, un punto, el vacío..)

a. $x^2-xy+y^2+2x-y = 5$

b. $x^2+3xy+5y^2+4x+17y = 0$

c. $x^2+4xy+4y^2+3x = 2$

d. $x^2-xy-2y^2+2x-y = -1$

Cónicas y transformaciones lineales.

Las transformaciones lineales del plano son aquellas que mandan líneas rectas en líneas rectas y que además fijan al origen. Es fácil ver que las transformaciones lineales deben mandar rectas paralelas en rectas paralelas y por lo tanto preservan la suma de vectores y la multiplicación por escalares, es decir que si T es una transformación lineal y u, v son vectores y k es un número real entonces $T(u+v) = T(u) + T(v)$ y $T(ku) = k\,T(u)$.

En particular, cada transformación lineal T está determinada por las imágenes de cualesquiera 2 vectores con distintas direcciones:

$T(x,y) = T(x,0) + T(0,y) = x\,T(1,0) + y\,T(0,1)$

Si $T(1,0) = (a,b)$ y $T(0,1) = (c,d)$ entonces $T(x,y)=(ax+cy,bx+dy)$

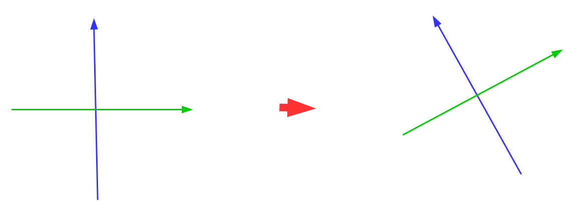
Todas las transformaciones lineales del plano son de esta forma, y todas las transformaciones de esta forma son lineales.

Es fácil ver que la inversa de cada transformación lineal es una transformación lineal, y que la composición de dos transformaciones lineales es otra transformación lineal.

Ejemplos.

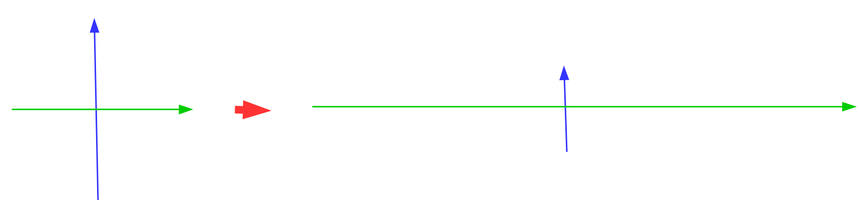
- Las rotaciones con centro en el origen son transformaciones lineales.

  La rotación por 30° está dada por
  $T(x,y) = (\sqrt{3}/_2\, x - {}^1/_2\, y,\ {}^1/_2\, x + \sqrt{3}/_2\, y)$



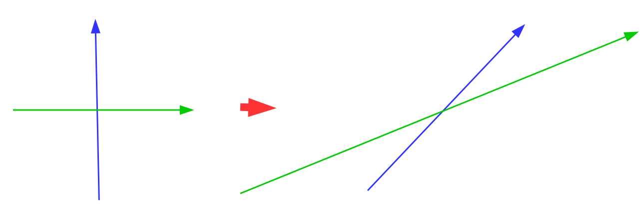
- Las homotecias y estiramientos desde el origen son transformaciones lineales.

  La transformación que estira el eje x al triple y encoge el eje y a la mitad es $T(x,y) = (3x, {}^1/_2 y)$.



- Podemos definir una transformación lineal para llevar a cualesquiera dos vectores no paralelos a otros 2 vectores no paralelos.

  La transformación lineal que lleva (1,0) a (2,1) y lleva (0,1) a (1,1) es $T(x,y)=(2x+y,x+y)$.



Las transformaciones lineales pueden convertir un cuadrado en un rectángulo, o en un rombo o en cualquier paralelogramo, así que pueden hacerlo perder casi toda su simetría. Es natural preguntarse en que pueden convertir a las cónicas.

Lema. Las transformaciones lineales convierten cónicas en cónicas.

Demostración. Cada transformación lineal T es de la forma $(x',y') = (ax+by,cx+dy)$ y su inversa es otra transformación lineal de la forma $(x,y) = (a'x'+b'y',c'x'+d'y')$.
Una cónica está formada por los puntos (x,y) del plano que satisfacen una ecuación cuadrática $Ax^2+ Bxy +Cy^2+ Dx + Ey = F$. Su imagen bajo T está formada por los puntos (x',y') que satisfacen la ecuación que se obtiene escribiendo a (x,y) en términos de (x',y'):

$$A(a'x'+b'y')^2+ B(a'x'+b'y')(c'x'+d'y') +C(c'x'+d'y')^2+ D(a'x'+b'y') + E(c'x'+d'y') = F$$

Si desarrollamos esta ecuación

$$A(a'^2x'^2+2a'b'x'y'+b'^2y'^2) + B(a'c'x'^2+a'd'x'y'+b'c'x'y'+b'd'y'^2) + C(c'^2x'^2+2c'd'x'y'+d'^2y'^2)+ D(a'x'+b'y') + E(c'x'+d'y') = F$$

y si agrupamos las x' y y' obtenemos

$$(Aa'^2+Ba'c'+Cc'^2)x'^2+(2Aa'b'+Ba'd'+Bb'c'+2Ccd')x'y'+(Ab'^2+Bb'd'+Cd'^2)y'^2+(Da'+Ec'')x' +(Db'x'+Ed')y' = F$$

Esta es otra ecuación cuadrática en x' y y', y todas estas ecuaciones corresponden a cónicas. •

Ejemplo. Hallar una transformación lineal que conviertan la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ en la hipérbola $x'^2 - 2y'^2= 1$

La transformación $(x',y')=(x,{}^1/_{\sqrt{2}}y)$ lo hace: $x=x'$, $y=\sqrt{2}y'$ así que si $x^2 - y^2 = 1$ entonces $x'^2-(\sqrt{2}y')^2 = 1$.

Ejemplo. ¿A donde va el círculo $x^2 + y^2 = 1$ al aplicarle la transformación lineal $(x',y') = (x+y,y)$?

$(x,y) = (x'-y',y')$

La ecuación $x^2+ y^2 = 1$ se convierte en $(x'-y')^2 + y'^2 = 1$

o sea $(x'^2-2x'y'+y'^2)+y'^2 = 1$ que puede reescribirse como

$x'^2-2x'y'+2y'^2 = 1$ esta es la ecuación de la imagen del círculo.

Aquí $A=1$ $B=-2$ $C=2$, $4AC-B^2=4>0$ así que es una elipse.

Sus ejes están inclinados un ángulo θ donde $\cot 2\theta= {}^{A-C}/_{B} = {}^1/_2$ así que $2\theta\approx 63.435$ y $\theta\approx 31.717$.

Si queremos saber la forma de la elipse hay que hallar los coeficientes A' y C' de la ecuación con $B'=0$.

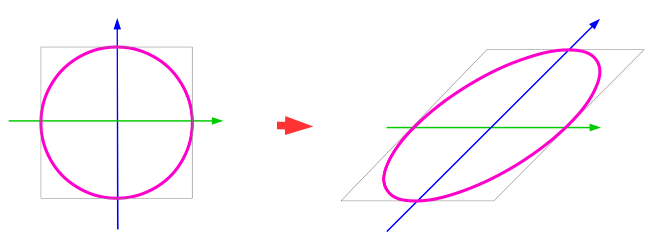
Sabemos que $A'+C' = A+C = 3$ y que $4A'C' = 4AC-B^2 = 4$ así que $C'=3-A'$ y $4A'(3-A')=4$ de modo que $A'^2-3A'+1=0$ así que $A'= \frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \approx 2.618$ y $C' = \frac{3\mp\sqrt{5}}{2} \approx 0.382$

y la ecuación de la elipse girada sería aprox.

$2.618x'^2+0.382y'^2 = 1$ o sea

$x'^2/0.618^2+y'^2/1.618^2=1$

y aquí vemos que la elipse tiene ancho (aprox) 1.236 y largo (aprox) 3.236.

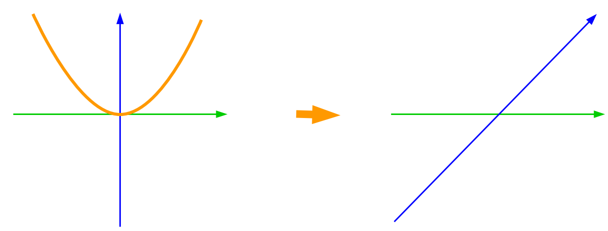


Ejemplo. ¿Existe una transformación lineal que envíe una parábola a si misma pero que mueva sus puntos? Si la parábola es $x^2 = y$ entonces la transformación lineal $(x',y') = (2x,4y)$ envía la parábola a si misma ya que $x={}^1/_2x'$ $y= {}^1/_4y'$ así que si $x^2 = y$ entonces $({}^1/_2x')^2 = {}^1/_4y'$ que equivale a $x'^2 = y'$.

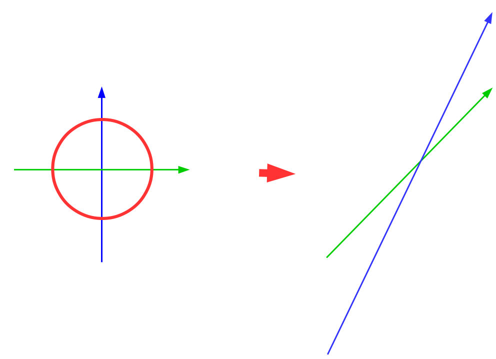
Problemas.

8. Encuentra una transformación lineal T que envíe la elipse $x^2+4y^2 = 16$ a la elipse $x^2+9y^2 = 9$. ¿La transformación T envía los focos a los focos? (adivinar no es suficiente).

9. Muestra que la transformación lineal $T(x,y)=(x+y,y)$ envía la parábola $y = x^2$ a otra parábola.
Da su ecuación y di cual es su eje.



10. Muestra que la transformación lineal $T(x,y)=(x+y,x+2y)$ envía el círculo $x^2 + y^2 = 1$ a una elipse.
í aprox. de que ancho y de que largo es.



11. Encuentra la ecuación de una hipérbola cuyas asíntotas sean las rectas $x=0$ y $y=0$, y da una transformación lineal que la envíe a otra hipérbola cuyas asíntotas sean las rectas $y=x$ y $y=0$.

12. Muestra que existe una transformación lineal que envía la elipse $x^2/4+ y^2 = 1$ en si misma pero que NO preserva sus ejes. (hint: si fuera un círculo sería muy fácil)