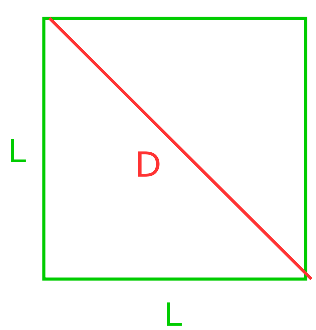
Proporción y Semejanza

Los pitagóricos descubrieron la relación entre la armonía musical y las fracciones, y estaban muy interesados en las proporciones.

En términos modernos, se dice que dos magnitudes A y B están en la *misma proporción* (o la *misma razón*) que otras dos magnitudes C y D si A/B = C/D.

Como los pitagóricos creían que todo estaba regido por los números naturales, les parecía natural pensar que cualquier proporción debía poder expresarse como el cociente de dos números naturales. Fue una gran sorpresa para ellos descubrir que existen cantidades que no son conmensurables, es decir que no existe ninguna cantidad de la que ambas sean múltiplos enteros, y por lo tanto la razón entre ellas no es igual a ninguna fracción.

Proposición 2:10 *La diagonal de un cuadrado no es conmensurable con el lado del cuadrado.*



Demostración.

Supongamos que el lado L y la diagonal D son conmensurables, es decir que existe una longitud c tal que L=mc y D= nc, para algunos números enteros m y n.

Podemos suponer que m y n no son ambos pares (de otro modo, ambos lados serían múltiplos de 2c y podríamos tomar esta longitud en lugar de c).

Como $2L^2 = D^2$ entonces $2m^2c^2 = n^2c^2$, asi que $2m^2 = n^2$.

Como $2m^2$ es par entonces n^2 es par asi que n debe ser par.

Entonces n^2 es múltiplo de 4. Pero entonces m^2 debe ser par y por lo tanto m debe ser par.

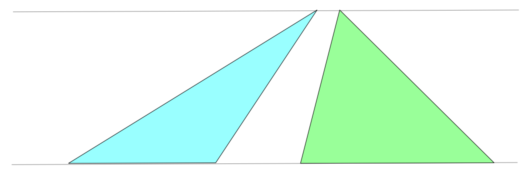
Pero entonces m y n son pares, contradiciendo nuestra elección

Por lo tanto m y n no pueden existir, y L y D son inconmensurables.

La existencia de cantidades inconmensurables hace que hablar de proporciones no sea tan fácil: para Euclides, las magnitudes A y B están en la misma proporción que las magnitudes C y D si los múltiplos enteros de A y B y los de C y D están relacionados de la misma manera:

$$A/B = C/D \text{ si } (\forall\, m,n \textit{ en } \mathbf{N},\ mA \le nB \Leftrightarrow mC \le nD)$$

Proposición 6:2 *Si dos triángulos tienen la misma altura entonces sus áreas están en la misma proporción que sus bases.*



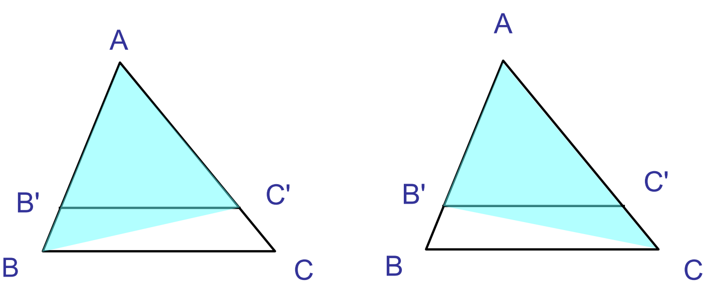
Demostración. Sean B y B´ las bases, h la altura y A y A´las áreas de los triángulos. B y B´ están en la misma proporción que A y A´si para todos m,n en **N**, mB ≤ nB´⇔mA ≤ nA´.

Si mB ≤ nB´ entonces el área de un triángulo de base mB es menor o igual que el área de un triángulo de base nB´. Pero el área de un triángulo de base mB es m veces el área de un triángulo de base B y el área de un triángulo de base nB´ es n veces el área de un triángulo de base B´, así que mA ≤ nA´. La otra desigualdad se demuestra de manera similar. •

Proposición 6:4 *Si dos triángulos tienen ángulos iguales, entonces sus lados correspondientes son proporcionales.*

Demostración. Si los triángulos ABC y AB'C' tienen los mismos ángulos, podemos hacer que los ángulos en A y A' coincidan, de modo que B'C' será paralelo a BC.

Los triángulos azules tienen áreas iguales, así que por **6:2** se tiene que



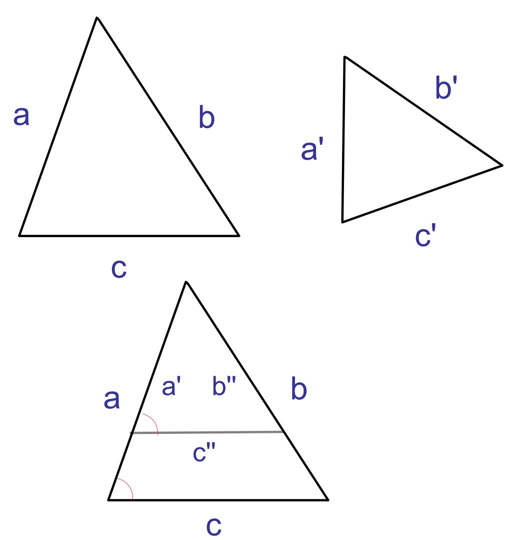
AB' / AB = Area AB'C' / Area ABC' = Area AC'B' / Area ACB' = AC' / AC •

Proposición 6:5 *Si dos triángulos tienen lados proporcionales, entonces sus ángulos correspondientes son iguales.*

Demostración. Supongamos que los triángulos tienen lados de longitudes a, b, c y a', b', c' respectivamente, y que a'/a= b'/b = c'/c.

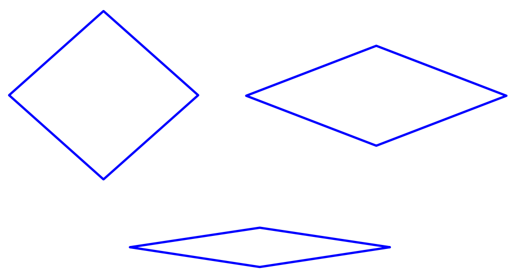
Sobre el lado de longitud a copiemos la longitud a' y donde termine tracemos una paralela al lado de longitud c. Obtenemos un triángulo de lados a', b'' y c''.

Este triángulo tiene ángulos iguales al de lados a,b c, así que por **6:4** se tiene que a'/a = b''/b = c''/c. Como ademas a'/a= b'/b = c'/c entonces a´=a´, b'' = b' y c'' = c' así que por **1.8** los triángulos con lados a', b', c' y a', b'', c'' tienen ángulos iguales. •

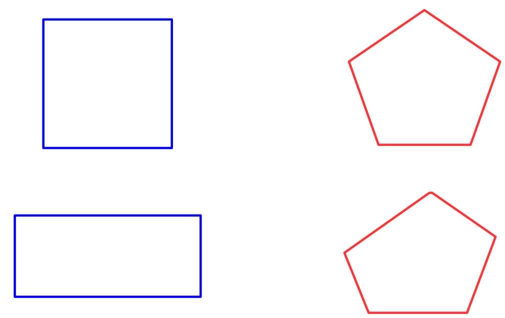


Decimos que dos figuras son *semejantes* si tienen lados proporcionales y ángulos iguales.

Las proposiciones 6.3 y 6.4 dicen que para los triángulos basta que se cumpla una de las condiciones para que se cumpla la otra. Esto no es cierto para figuras con mas lados!

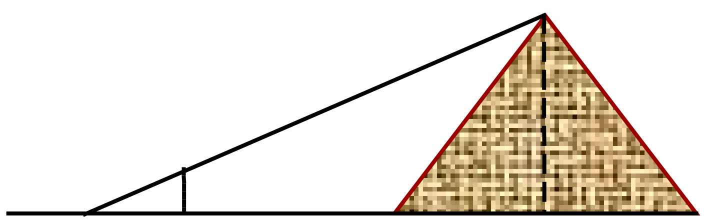


Lados proporcionales, ángulos distintos



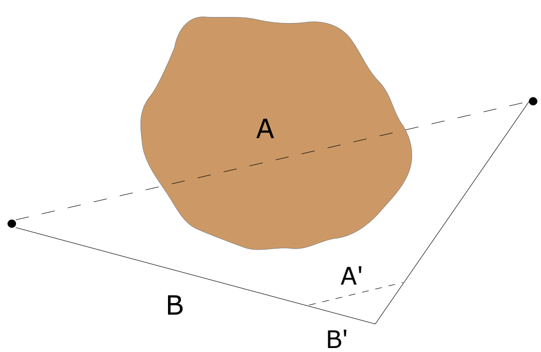
Angulos iguales, lados no proporcionales

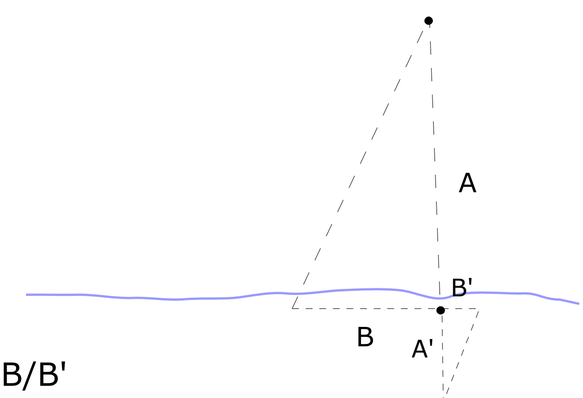
En el siglo VI AC, Thales uso proporciones para calcular la altura de las pirámides de Egipto.



Los teoremas de de semejanza de triángulos tienen muchas aplicaciones practicas.

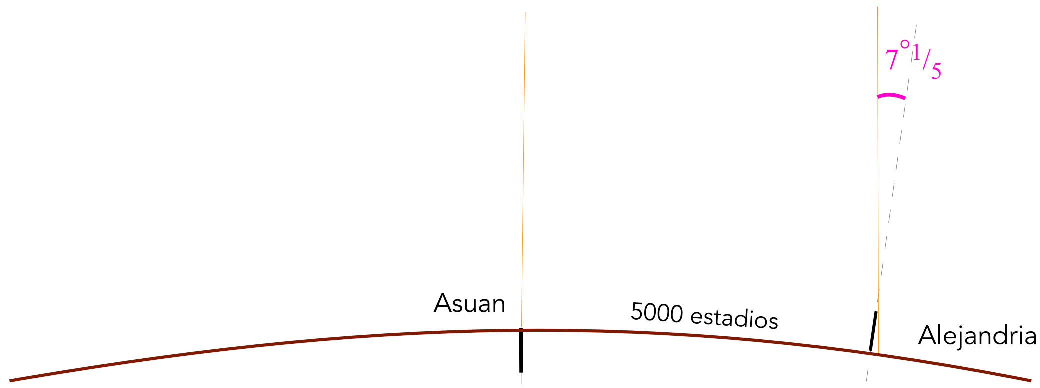
Ejemplos: calcular la distancia entre dos puntos si hay un obstáculo entre ellos (como una montaña) o calcular la distancia de un punto a otro punto inaccesible (como la distancia a un barco desde la playa).





$A/B = A'/B'$ asi que $A = A'B/B'$

En el siglo II AC Eratostenes pudo calcular la circunferencia de la tierra usando proporciones.



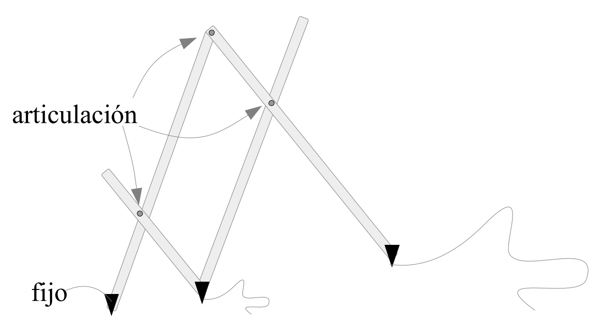
Eratostenes se enteró que un día al año, al mediodía, los rayos del sol llegaban al fondo de un pozo profundo en Asuán. Así que el sol debía estar exactamente en el zenit. Se pregunto si pasaría lo mismo en Alejandría, y averiguo que no: a esa misma hora los rayos formaban un ángulo de 7 grados y 1/5 con una columna vertical. Sabia que el Sol estaba muy lejos, por lo que sus rayos debían llegar casi paralelos a la Tierra. Sabiendo la distancia entre Aswan y Alejandría (5000 estadios) pudo calcular la circunferencia de la tierra.

Problemas.

1. a. Calcular el ancho de la calle donde viven *sin cruzarla* usando semejanza .

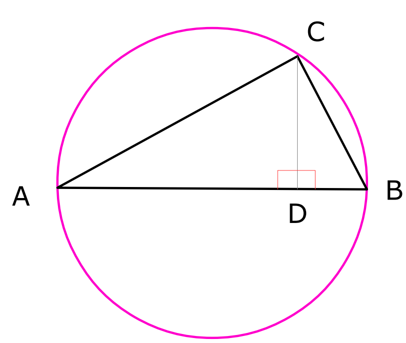
   b. Calcular la altura de un poste del otro lado de la calle, sin cruzar.

2. El pantógrafo es un instrumento articulado que se usa para hacer copias a escala: al seguir un dibujo con una punta, la otra punta traza una copia ampliada o reducida del dibujo. Explica por que funciona.



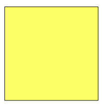
3. Usa los datos de Eratóstenes para estimar la circunferencia de la Tierra, en estadios.

4. Muestra que si AB es un diámetro y C es cualquier punto del círculo, entonces $\angle ACB = 90°$ y los tres triángulos son semejantes.

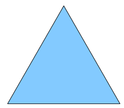


Areas y Perímetros

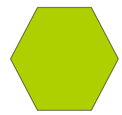
En el plano euclidiano existen figuras semejantes de todos los tamaños. Al cambiar la escala de las figuras, sus perímetros crecen en la misma proporción que la escala, mientras que sus áreas crecen como el cuadrado de la escala.



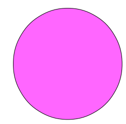
$P = 4\,L$
$A = L^2$



$P = 3\,L$
$A = \sqrt{3}/_4\, L^2$



$P = 6\,L$
$A = 3\sqrt{3}/_2\, L^2$



$C = ?\,R$
$A = ?\,R^2$

Como el círculo puede aproximarse con polígonos, su perímetro (la circunferencia) debe ser un múltiplo del radio R y su área debe ser un múltiplo de R^2.

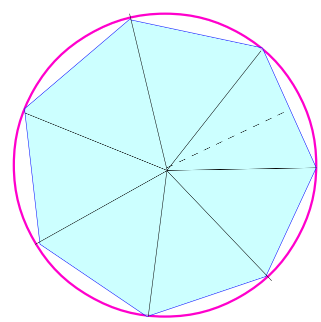
El número π es, por definición, la proporción C/D entre la circunferencia y el diámetro de un círculo:

$$C = \pi\, D$$

En el siglo II AC, Arquímedes calculó por primera vez el área exacta del círculo:

Teorema (Arquímedes). *El área de un círculo es igual a la de un triángulo cuya base es la circunferencia y cuya altura es el radio del círculo.*

Demostración. Consideremos polígonos regulares inscritos en el círculo:



El área del polígono es la suma de las áreas de los triángulos. Como el área de un triángulo es igual a la altura multiplicada por la base y dividida entre 2, el área del polígono es la altura h multiplicada por el perímetro (que es la suma de las bases) y dividida entre 2.

$$A = h \cdot P / 2$$

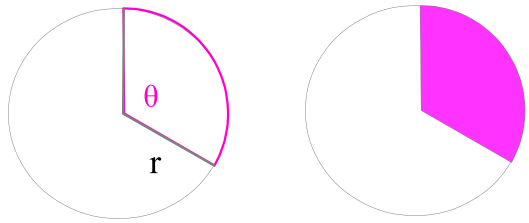
Si tomamos polígonos con mas y mas lados, su área se aproximará cada vez mas al área del círculo y su perímetro se aproximará a la circunferencia, mientras que h se aproximará al radio. En el límite, obtenemos que el área del círculo es el radio multiplicado por el perímetro y dividido entre 2: $A = R \cdot C / 2$ •

Las fórmulas de la circunferencia y el área del círculo vienen de la definición de y del teorema de Arquímedes: $C = \pi \cdot D = 2\pi \cdot R$ y $A = R \cdot C / 2 = R \cdot \pi \cdot 2R / 2 = \pi \cdot R^2$

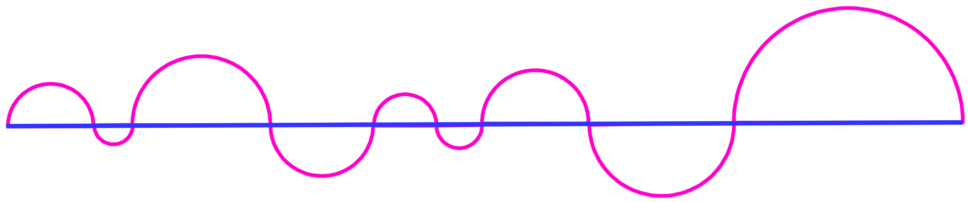
Aquí hay un artículo bonito del trabajo de Arquímedes (en ingles):
http://www.ams.org/samplings/feature-column/fc-2012-02

Problemas.

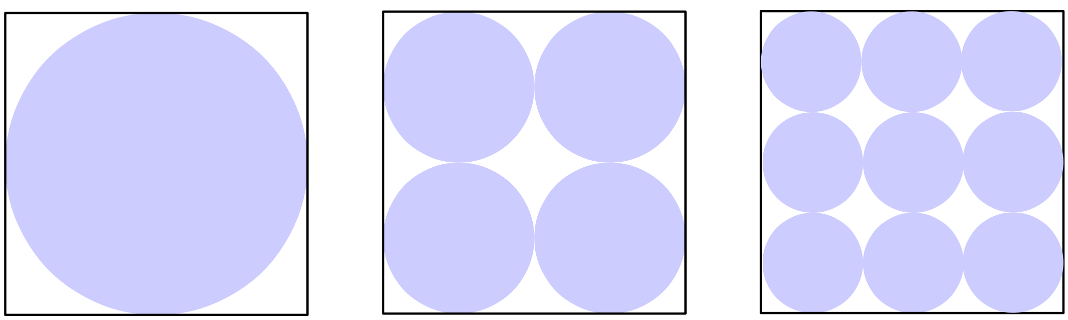
5. ¿Cual es la longitud de un arco de círculo de θ grados y radio r?
¿Cual es el área de la rebanada circular?



6. ¿Cual es la longitud de la curva roja (formada por semicírculos) si la línea azul mide 10 unidades?



7. ¿Cuales círculos ocupan una mayor área del cuadrado? *Justifica bien tu respuesta.*



8. a. Si las dimensiones de una caja se duplican, ¿como cambia su superficie? ¿Y su volumen? ¿Y si las dimensiones se triplican?

b. Si las dimensiones de un tetraedro se duplican, ¿como cambia su superficie? ¿Y su volumen? ¿Y si las dimensiones se triplican?

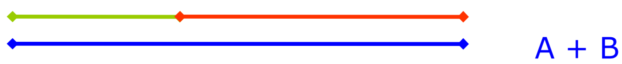
9. ¿Si una esfera de volumen V tiene radio r, que radio tiene una esfera de volumen 2V? (no hace falta la fórmula del volumen de la esfera)

Aritmética y geometría

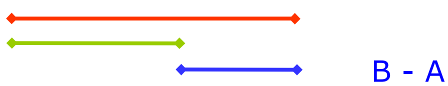
En *Los Elementos* las magnitudes y proporciones no se trataran con aritmética sino en términos puramente geométricos.

Las magnitudes pueden expresarse como longitudes:

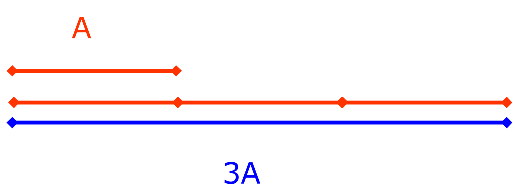
¿Como podemos sumar magnitudes?



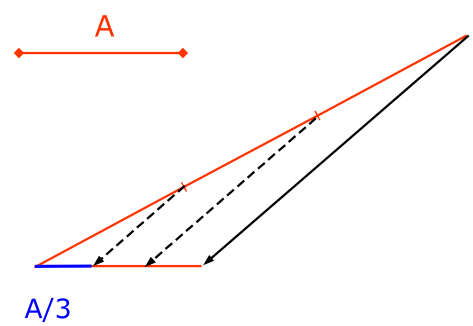
¿Y restarlas?



¿Cómo podemos multiplicar cualquier magnitud por un número natural n?

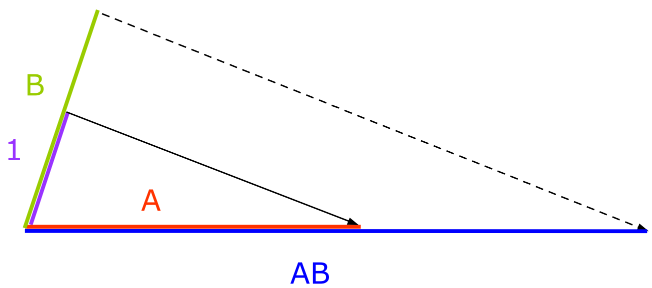


¿Y como podemos dividir cualquier magnitud en n partes iguales?



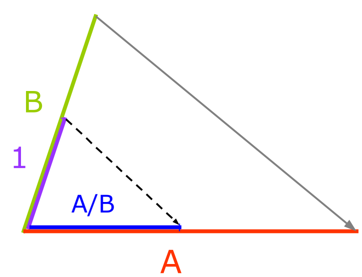
Pregunta: ¿Cómo podremos multiplicar geométricamente dos magnitudes, que pueden no ser enteros ni fracciones? *El resultado, como en los casos anteriores, debe ser una magnitud lineal, no un área.*

La multiplicación debe depender del tamaño de la unidad, ya que si multiplicamos una magnitud por algo mayor que 1 debemos obtener una magnitud mayor, pero si multiplicamos por algo menor que 1 debemos obtener algo menor. Si fijamos la unidad (la magnitud 1 que al multiplicarla por si misma no cambia) entonces *AB es la magnitud que guarda con B la misma proporción que la magnitud A guarda con 1.*



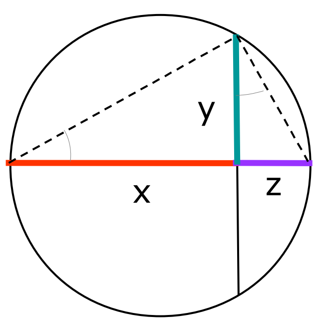
Dibujemos un triángulo con dos lados de longitudes A y 1.
Luego dibujemos un triángulo semejante cuyo lado correspondiente a 1 tenga longitud B, entonces su lado correspondiente a A tendrá longitud AB.

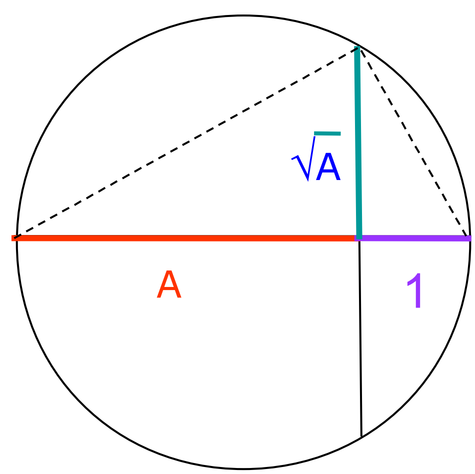
¿Cómo podemos dividir geométricamente dos magnitudes?



Dibujemos un triangulo con 2 lados de longitudes A y B, y dibujemos un triangulo semejante cuyo lado correspondiente a B tenga longitud 1, entonces su lado correspondiente a A tendra longitud A/B.

¿Como se puede obtener la raíz cuadrada de una magnitud?





Los triángulos formados por el diámetro de un círculo y una línea perpendicular son semejantes, asi que $x/y=y/z$ *por lo tanto* $xz=y^2$

Problema

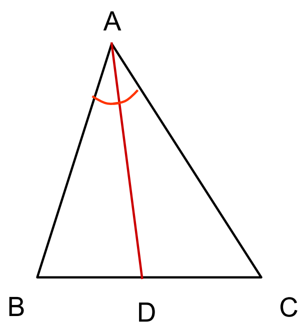
10. Si A = B = 1 =

Dibuja exactamente

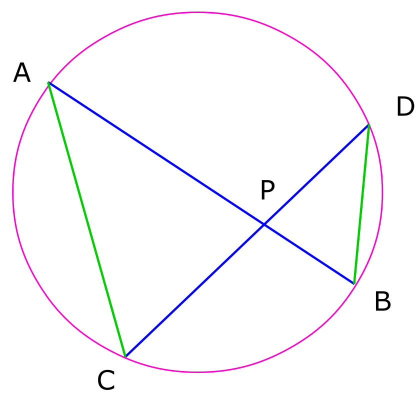
a. A^2 b. $1/B$ c. $\sqrt{AB}$

Problemas de repaso

11. Demuestra que si AD es la bisectriz del ángulo BAC entonces BD/DC = AB/AC



Ojo: Los triangulos NO son semejantes!



12. Muestra que si A,B,C,D son puntos en un circulo, y AB y CD se cruzan en un punto P, entonces

a. Los triángulos ACP y DBP son semejantes

b. $AP\cdot PB = CP\cdot PD$.

c. Dibuja el caso en que P está afuera del círculo ¿se valen a y b en este caso?

13. Traza un segmento de recta que pase por el punto p y apunte exactamente al punto de intersección de las dos lineas, pero *sin salir para nada* del papel.