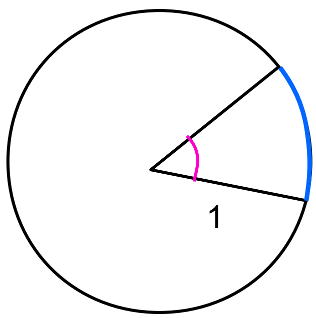
Trigonometría

Angulos

Los ángulos pueden medirse viendo que parte de una circunferencia ocupan. Los babilonios creían que la tierra tardaba 360 días en dar una vuelta al sol, así que dividieron al círculo en 360 *grados*.



Una manera mas natural de medir ángulos es tomar un círculo de radio 1 y medir la longitud del arco determinado por el ángulo. Esta es la medida del ángulo en *radianes*.

Como la circunferencia del círculo mide 2π, entonces

$360° = 2\pi$ radianes

$180° = \pi$ radianes

$\pi/4$ radianes $= 180°/4 = 45°$

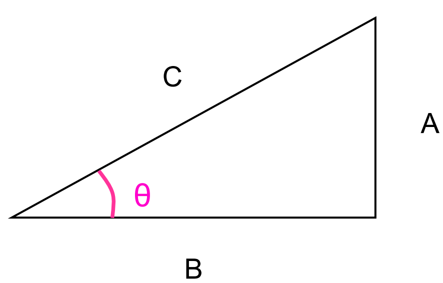
$\pi/6$ radianes $= 180°/6 = 30°$

Problema.

1. ¿A cuantos grados equivale un radian? ¿A cuantos radianes equivale un grado?

Funciones trigonométricas

La forma de un triángulo rectángulo está determinada por un solo ángulo, por lo tanto las proporciones entre sus lados son funciones del ángulo:

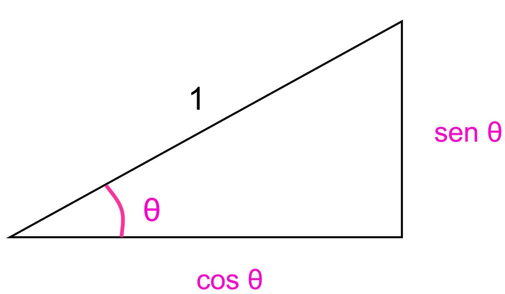


$\text{sen}\ \theta = A/C$

$\cos\theta = B/C$

$\tan\theta = A/B$

En un triángulo rectángulo de hipotenusa 1:



Por el Teorema de Pitagoras:

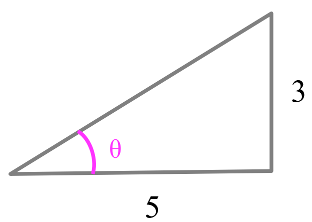
$\text{sen}^2\ \theta + \cos^2\theta = 1$

Observar que para $0 \leq \theta \leq \pi/2$ se tiene que $0 \leq \text{sen}\,\theta \leq 1$ y $0 \leq \cos\theta \leq 1$

y que si el ángulo θ aumenta entonces sen θ aumenta y cos θ disminuye.

Ejemplos:

1. ¿Cuánto vale $\cos\theta$?



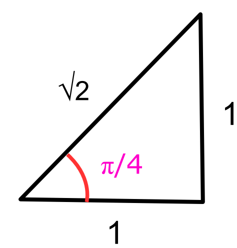
Podemos calcular la hipotenusa usando Pitágoras : $C^2=5^2+3^2=34$

Así que la hipotenusa mide $\sqrt{34}$ y $\cos = {}^{5}/_{\sqrt{34}}$

2. ¿Cuánto vale $\cos\pi/4$? $\pi/4$ radianes= 45^{8}

Un triángulo rectángulo isósceles tiene ángulos de 45^{8}

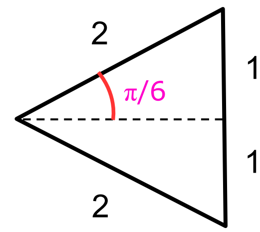
podemos calcular su hipotenusa usando el T. Pitagoras.



$\cos\pi/4 = 1/\sqrt{2}$

3. ¿Cuanto vale sen $\pi/6$? $\pi/6$ radianes = 30^{8}

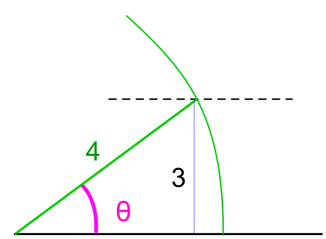
Un triángulo rectángulo con un ángulo de 30^{8}
tiene otro ángulo de 60^{8}. Duplicándolo obtenemos
un triángulo equilátero.



sen $\pi/6 = 1/2$

4. ¿Existe un ángulo θ tal que sen $\theta = 3/4$?

Si, basta dibujar un triángulo rectángulo con lado 3 y hipotenusa 4



5. ¿Existe un ángulo θ tal que sen $\theta = 4/3$?

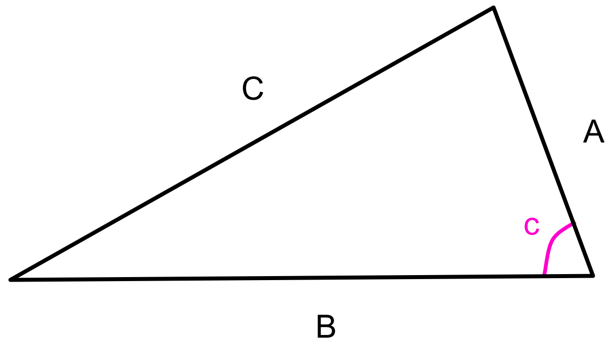
No, porque un lado del triángulo rectángulo seria mayor que la hipotenusa.

Problemas

2. ¿Que relación hay entre sen θ y sen 2θ ?
¿sen 2θ es el doble, o mas del doble o menos del doble que sen θ? ¿o depende del ángulo?

3. Si un objeto se aleja al doble de distancia, el ángulo con que lo vemos se vuelve la mitad, menos de la mitad o mas de la mitad del ángulo con que lo veíamos antes de alejarse?

La ley de los cosenos



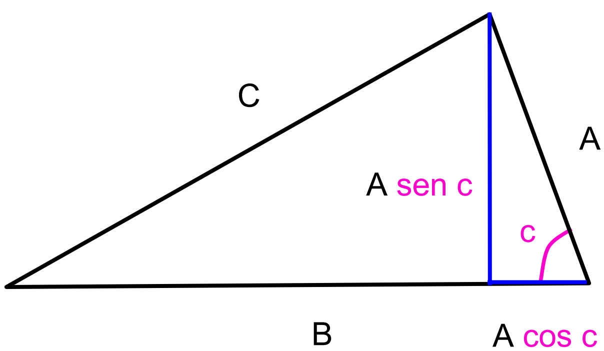
El teorema de Pitágoras no vale para triángulos que no son rectángulos, pero como la forma de un triángulo está determinada por un ángulo y los 2 lados adyacentes, esta información debe ser suficiente para calcular el tercer lado.

La relación entre A, B, C y el ángulo c esta dada por la ley de los cosenos:

$$\boxed{C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos c}$$

Esta es una generalización del Teorema de Pitágoras que vale para todos los triángulos.
(el termino $2AB \cos c$ se anula si y solamente si $c = 90°$ y en este caso queda Pitágoras)

Demostración. Podemos partir al triángulo en 2 triángulos rectángulos:

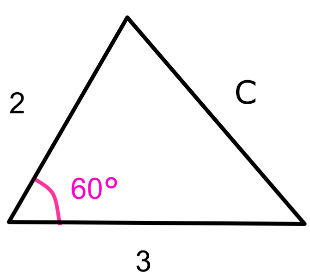


Por el teorema de Pitágoras

$$C^2 = (B - A \cos c)^2 + (A \operatorname{sen} c)^2$$
$$= B^2 - 2AB \cos c + A^2\cos^2 c + A^2\operatorname{sen}^2 c$$
$$= A^2 + B^2 - 2AB \cos c \quad \bullet$$

Ejemplos.

1. Si un triángulo tiene un ángulo de 60° y los lados adyacentes miden 2 y 3, cuanto mide el tercer lado?



Por la ley de los cosenos

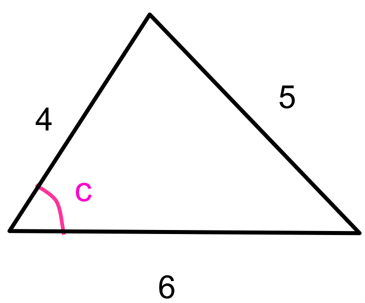
$C^2 = A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B \cos c$

como $\cos 60° = 1/2$ entonces

$C^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1/2 = 4 + 9 - 6 = 7$

así que $C = \sqrt{7}$

2. Los lados de un triángulo miden 4, 5 y 6 ¿cuánto mide el ángulo opuesto al lado mediano? ¿cuanto mide el ángulo?



Por la ley de los cosenos:

$5^2 = 4^2 + 6^2 - 2·4·6 \cos c$

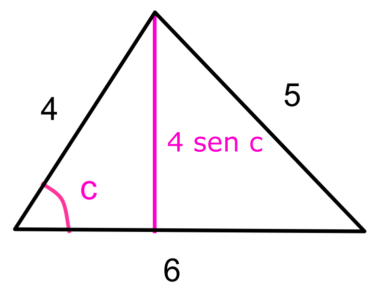
$25 = 52 - 48 \cos c$

$\cos c = 27/48 = 9/16$

Podemos obtener el ángulo c usando la función inversa del coseno (llamada arccos o $\cos^{-1}$) en la calculadora: $c = \cos^{-1}(9/16) = 0.973$ radianes.

b. ¿Cuál será la altura del triángulo sobre el lado 6 ?

Altura = $4 \text{ sen } c = 4\,(1-\cos^2 c)^{1/2} = 4(1-(9/16)^2)^{1/2} = \sqrt{175}/4$

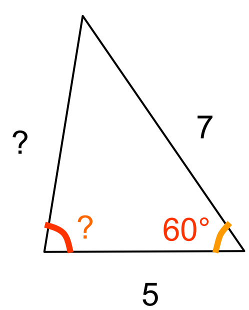


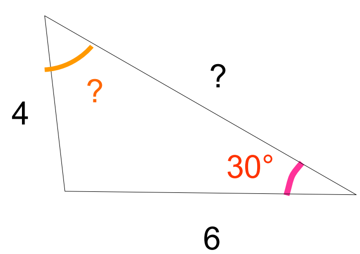
c. ¿Cual es el área del triángulo?

Area = base x altura / 2 = $(6 \times \sqrt{175}/4)/2 = 3/4\sqrt{175}$

Problemas

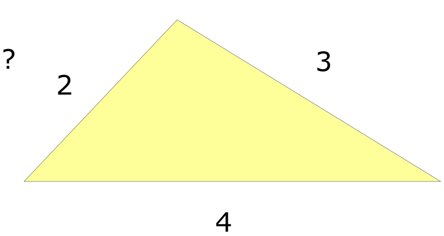
4. ¿Cuanto miden el lados y el ángulos marcados?





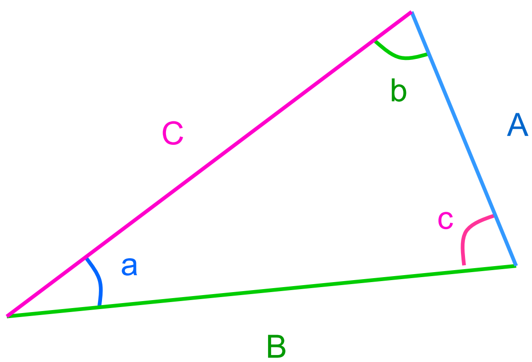
5. a. ¿Cuanto miden los ángulos de este triángulo (en radianes)?

   b. ¿Cual es el área del triángulo?

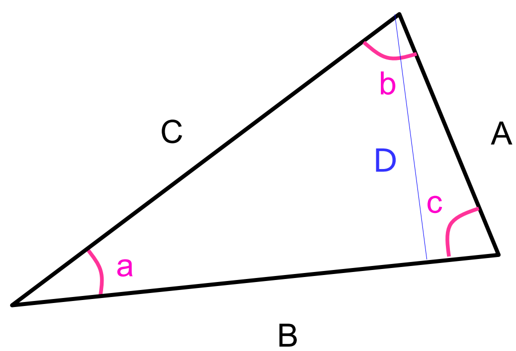


La ley de los senos

Nos da otra relación entre los lados y los ángulos de un triángulo:



A / sen a = B / sen b = C / sen c



Demostración.

Si la altura sobre el lado B es D entonces

sen a = D/C   y   sen c = D/A

por lo tanto

A / sen a = A / (D/C) = AC / D

C / sen c = C / (D/A) = CA / D

Esto prueba una de las 3 igualdades, las otras se obtienen cambiando de altura. •

Corolario. A/C = sen a/sen c o sea que los lados del triángulo están en la misma proporción que los senos de los ángulos opuestos.

Corolario. En cualquier triángulo el lado mayor es el opuesto al ángulo mayor.

Ejemplo. En un triángulo con ángulos 45°, 60° y 75° ¿que proporción guardan los lados?

Sean A, B y C los lados opuestos a esos ángulos. Por la ley de los senos los lados guardan la misma proporción que los senos de los ángulos opuestos.

sen 45° = 1/√2 ≈ 0.7071...   sen 60° = √3/2 ≈ 0.8660...   sen 75° ≈ 0.9659...

Así que el triángulo con lados 0.7071.. 0.8660.. y 0.9659.. (y todos los triángulos semejantes a el) tienen ángulos 45°, 60° y 75°.

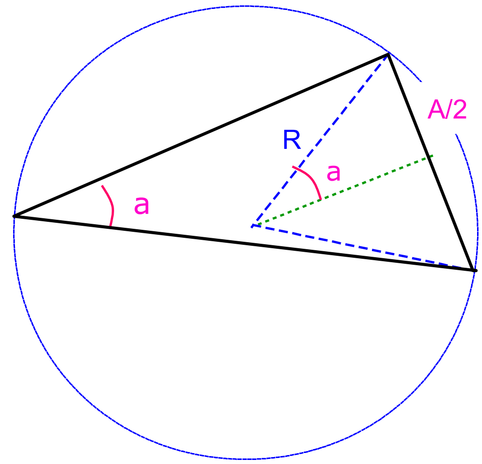
¿Que significado geométrico tiene A / sen α ?

Veamos el el círculo circunscrito al triángulo.

Si R es el radio, entonces sen α = A/2 / R

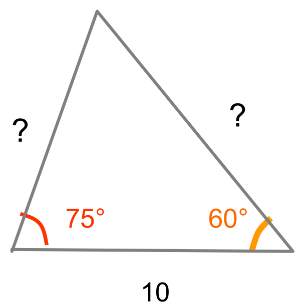
Así que A / sen a = 2R

que es el diámetro del círculo circunscrito.



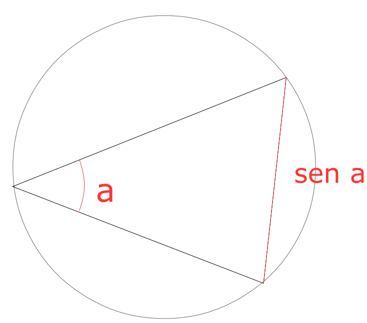
Problemas

6. Encuentra los lados faltantes

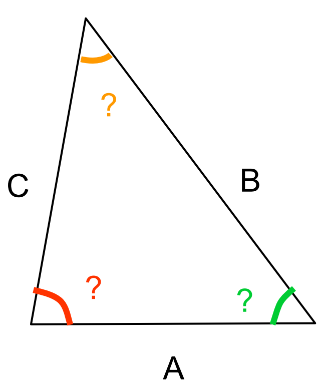


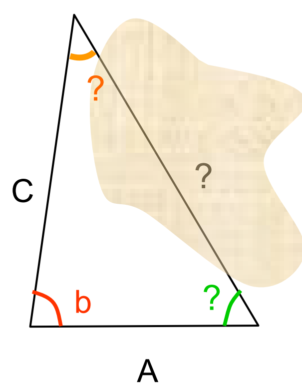
7. Los lados de un triángulo miden 3, 4 y 6, ¿cual es el diámetro del circulo circunscrito?

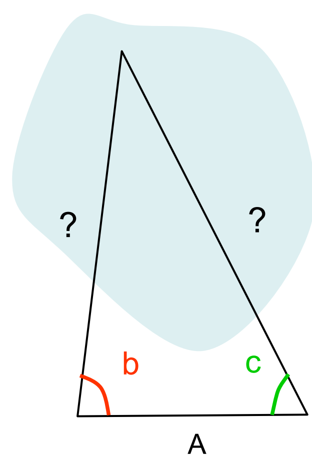
8. Demuestra que en un triángulo inscrito en un círculo de diámetro 1, el lado opuesto al ángulo α mide sen a.



Algunas aplicaciones de las leyes de senos y cosenos

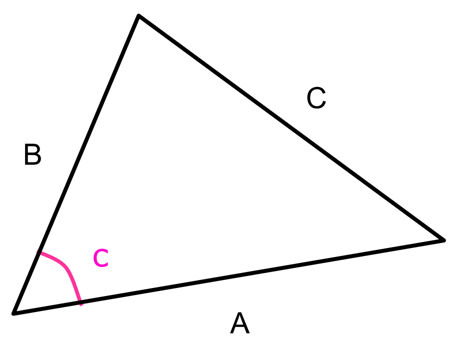






(Opcional) El área de un triángulo.

Sabemos que los lados de un triángulo determinan al triángulo, así que debería haber una manera de calcular el área a partir de los lados. Herón la encontró hace 2000 años



Area = base x altura/2 = A B sen c /2

Por la ley de los cosenos

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos c$$

y sabemos que

$\operatorname{sen}^2 c + \cos^2 c = 1$

$\operatorname{sen}^2 c = 1 - \cos^2 c = 4A^2B^2/4A^2B^2 - (A^2 + B^2 - C^2)^2 /4A^2B^2 =$

$= 4A^2B^2-(A^4+B^4+C^4+2A^2B^2-2A^2C^2-2B^2C^2) / 4A^2B^2=$

$=-(A^4+B^4+C^4-2A^2B^2-2A^2C^2-2B^2C^2) / 4A^2B^2 =$

$= (A+B+C)(A+B-C)(B+C-A)(C+A-B) / 4A^2B^2$

(*obtener esta factorización no es fácil, pero no es difícil comprobarla*)

Así que de la primera fórmula

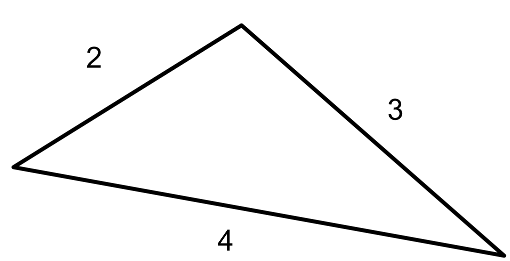
$\text{Area}^2 = A^2B^2 \operatorname{sen}^2 c / 2^2 = (A+B+C)(A+B-C)(B+C-A)(C+A-B) /16$

Por lo tanto

$\text{Area} = 1/4 \sqrt{(A+B+C)(A+B-C)(B+C-A)(C+A-B)}$ *Esta es la fórmula de Herón.*

Ejemplo.

¿Cual es el área del triángulo con lados 2, 3 y 4?



$\text{Area} = 1/4 \sqrt{(A+B+C)(A+B-C)(B+C-A)(C+A-B)}$

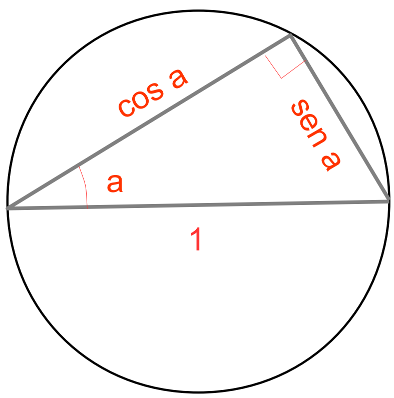
$= 1/4 \sqrt{9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1}$

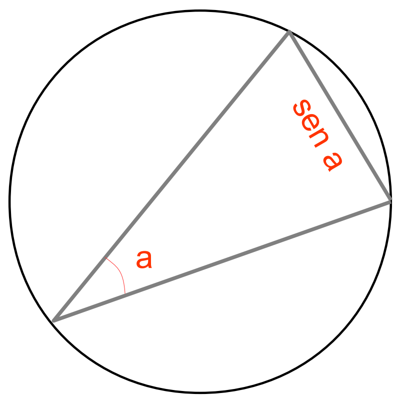
$= 1/4 \sqrt{135}$

(Opcional) Calculo de senos y cosenos

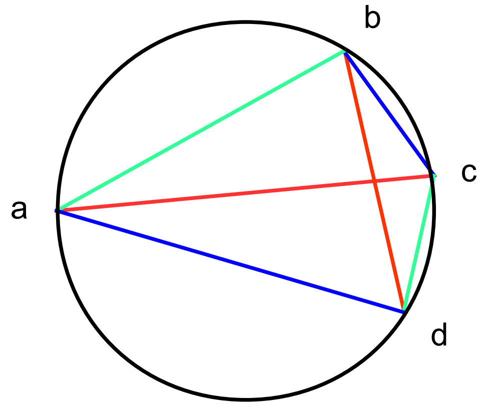
Para muchas aplicaciones como la astronomía es necesario saber los valores de senos y cosenos de los ángulos con mucha precisión, pero los únicos ángulos para los que pueden calcularse exactamente a partir de la definición son para 30°, 45° y 60°.

Observar que inscribimos un triángulo en un circulo de diámetro 1 de modo que uno de sus lados sea el diámetro, entonces el triángulo es rectángulo y los otros lados son el seno y el coseno de los otros ángulos.
Y para cualquier triángulo inscrito en un círculo de diámetro 1, el lado opuesto al ángulo a mide sen a (pero el otro lado no es cos a) (por que?)





Las primeras tablas de senos y cosenos fueron calculadas por Ptolomeo hace 2000 años usando un teorema que lleva su nombre:



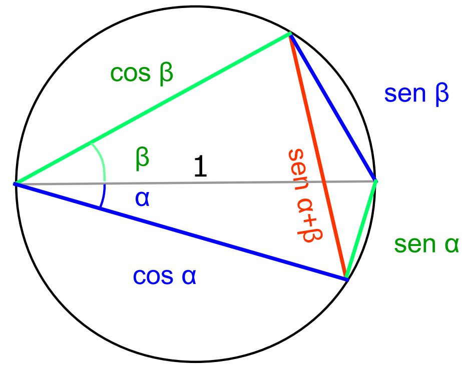
Teorema de Ptolomeo: Para cada cuadrilátero inscrito en un círculo, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos:

$$ac \cdot bd = ab \cdot cd + ad \cdot bc$$

El teorema de Ptolomeo es otra generalización del teorema de Pitágoras.

La prueba del teorema de Ptolomeo no es difícil (se hace usando triángulos semejantes

Podemos calcular el seno de la suma de dos ángulos inscribiéndolos en un círculo de diámetro 1.



Por el teorema de Ptolomeo:

$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\ \alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\ \beta \cdot \cos\alpha$

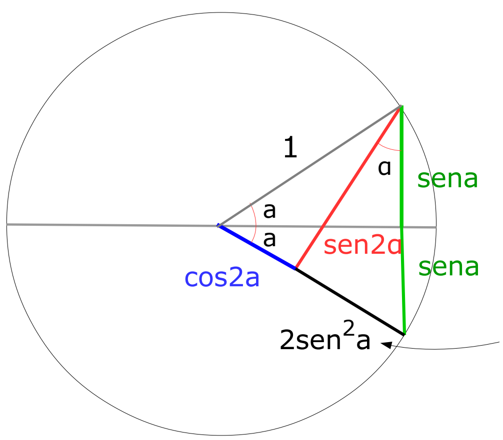
La igualdad también vale si cambiamos suma por resta.

Ejemplos:

$\text{sen}\ 75º = \text{sen}\ (45º+30º) = \text{sen}45º\cos30º + \text{sen}30º\cos45º = 1/\sqrt{2}\ \sqrt{3}/2 + 1/2\ 1/\sqrt{2}$

$\text{sen}\ 15º = \text{sen}\ (45º -30º) = \text{sen}45º\cos30º - \text{sen}30º\cos45º = 1/\sqrt{2}\ \sqrt{3}/2 - 1/2\ 1/\sqrt{2}$

Los senos y cosenos del doble y de la mitad de un ángulo pueden obtenerse de la siguiente figura:



Ya que negro/verde = senɑ

Ya que rojo/verde = cosɑ

$\cos2a = 1 - 2\text{sen}^2 a$ $\qquad$ $\text{sen}2a = 2\text{sen}a\cos a$

Y de la primera pueden despejarse

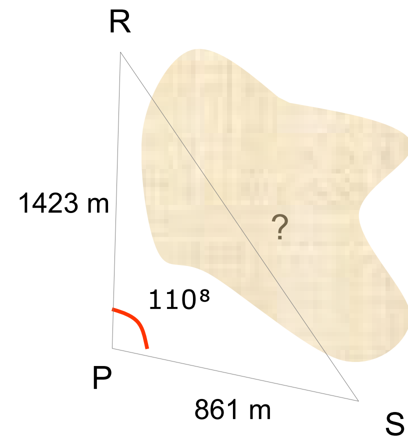
$\text{sen}^2 a = \dfrac{1 - \cos2a}{2}$ $\qquad$ y de aquí sale $\qquad$ $\cos^2 a = 1 - \text{sen}^2 a = \dfrac{1 + \cos2a}{2}$

Ejemplo.

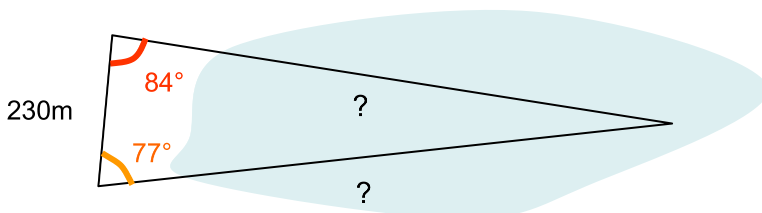
$\text{sen}^2 15º = \dfrac{1 - \cos 30º}{2} = \dfrac{1 - \sqrt{3}/2}{2} = 1/2 - \sqrt{3}/4$ $\qquad$ Así que $\text{sen}\ 15º = \sqrt{1/2 - \sqrt{3}/4}$

Problemas de repaso

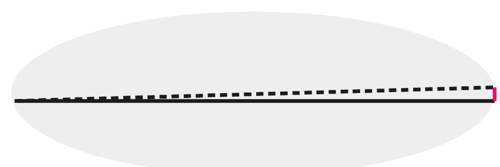
9. Calcula la distancia RS y ángulos faltantes (con calculadora)



10. Calcula las distancias (usando calculadora)

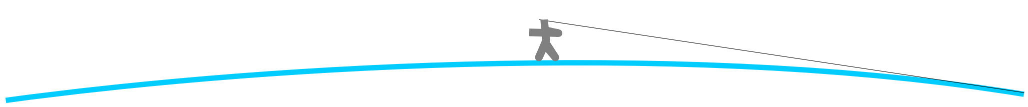


11. Al perforar un túnel de 1000 metros de largo a través de una montaña se comete un error de 1 grado en la dirección ¿como a que distancia acabará de la salida planeada? (sin calculadora)



12. a. ¿A que distancia esta el horizonte, si estas viendo al mar desde la playa (y tus ojos están 1.7 m de la superficie de la tierra, y que esta es una esfera)?

b. ¿Y si esas viéndo el mar desde el mástil de un barco, a 10m de altura?



13. a. ¿Que ángulo abarca la luna vista desde la tierra? ¡Mídanlo!

b. Usa tu respuesta para hallar la razón entre el tamaño de la luna y su distancia a la tierra.

c. ¿El ángulo depende de la posición de la luna en el cielo o no?