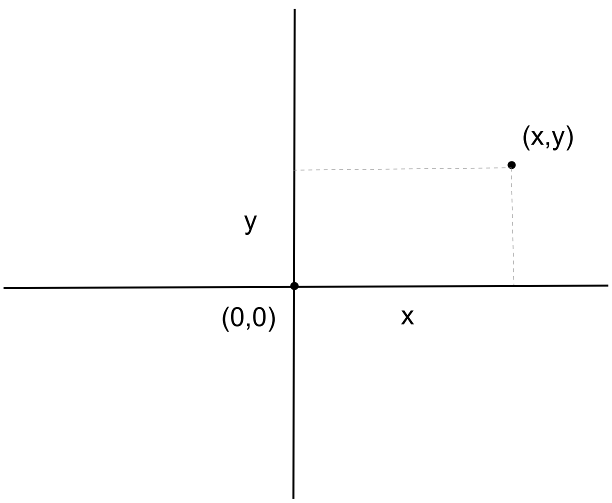
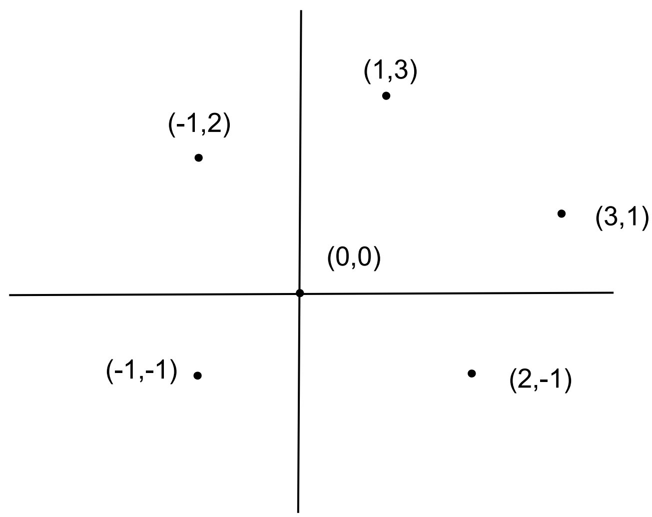
Coordenadas

A mediados del siglo XVII, Rene Descartes y Pierre de Fermat comenzaron a estudiar la geometría usando coordenadas.

Cada punto P del plano euclidiano puede identificarse con una pareja de números reales, que indican la distancia de P a dos rectas perpendiculares, llamadas *ejes de coordenadas*, que se consideran negativas hacia un lado de cada eje. Al punto con coordenadas (0,0) se le llama *origen*.

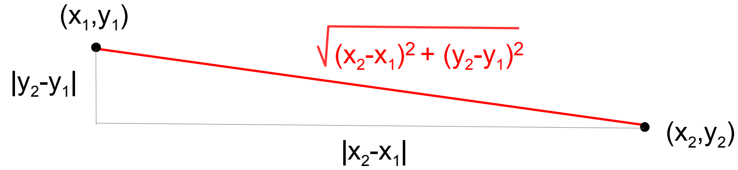




Esta identificación da una biyección entre los puntos del plano euclidiano y las parejas de números reales (x,y).

Teniendo las coordenadas uno puede preguntarse si estas se pueden usarlas para medir distancias y ángulos y que relación tienen las coordenadas con todas las rectas y círculos del plano.

Para empezar, las distancias entre puntos pueden calcularse fácilmente a partir de sus coordenadas usando el teorema de Pitágoras:



Se puede ver que las coordenadas (x,y) de los puntos en cada recta están relacionadas de una manera muy simple, dada por una ecuación de primer grado Ax+By=C.

Ejemplo:

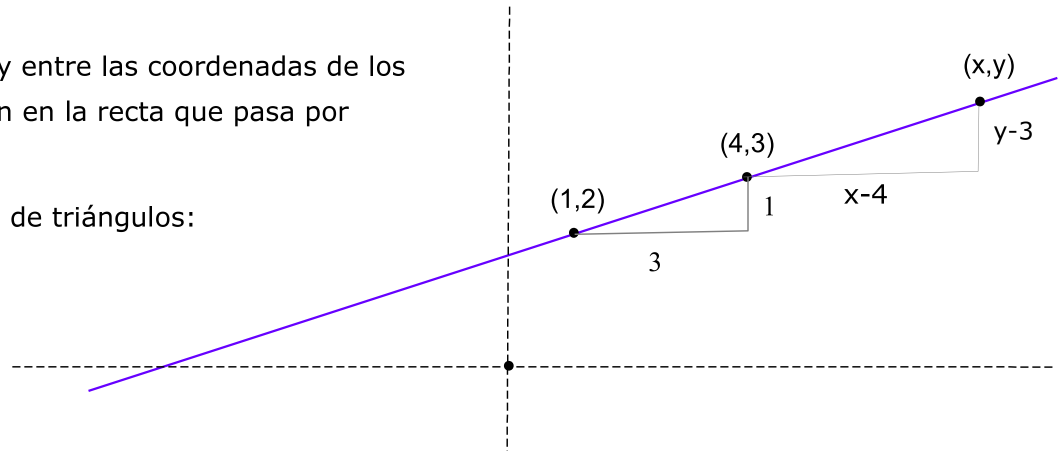
¿Que relación hay entre las coordenadas de los puntos que están en la recta que pasa por (1,2) y (4,3)?

Por la semejanza de triángulos:

y-3 / x-4 = 1/3

3(y-3) = 1(x-4)

-x + 3y = 5



Así que los puntos de la recta que pasa por (1,2) y (4,3) satisfacen la ecuación -x + 3y = 5

Para saber, por ejemplo, si el punto (87,31) está o no está en la recta, basta checar si cumple o no con la ecuación: -87 + 3(31) = 7 ≠ 5 así que el punto no esta en la recta.

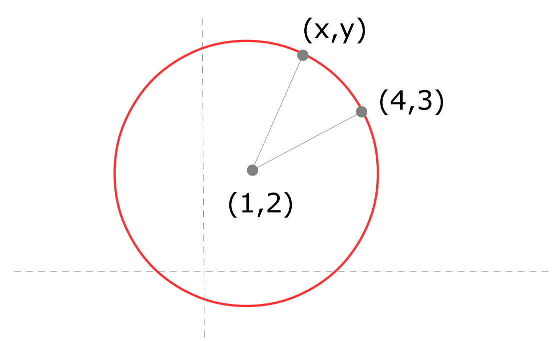
Las coordenadas de los puntos en un círculo están relacionados por la fórmula de la distancia, por lo que satisfacen una ecuación de la forma $x^2+y^2+Ax+By=C$.

Ejemplo: Los puntos (x,y) del plano que están en el círculo con centro en el punto (1,2) y que pasa por el punto (4,3) satisfacen la ecuación

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (4-1)^2 + (3-2)^2$

que puede simplificarse a

$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 5$



Para saber, por ejemplo, si el punto (3,-1) esta dentro o afuera del circulo, bastaría checar que le pasa con la ecuación: $(3)^2 + (-1)^2 - 2(3) - 4(-1) = 8 > 5$ así que el punto (3,-1) esta afuera.

Problemas.

1. ¿Que relación hay entre las coordenadas de los puntos alineados con (-3,4) y (5,7)?

2. ¿Que relación hay entre las coordenadas de los puntos que están a distancia 1 del punto (1,0)?

Un Modelo algebráico para el plano euclidiano.

En lugar de poner las coordenadas puestas sobre el plano euclidiano, se puede proceder al revés: empezar con en el conjunto R^2 ={(x,y) / x,y T R} y usarlo como un *modelo* para el plano euclidiano, definiendo a los puntos como las parejas (x,y), definiendo a las rectas en términos algebráicos como los conjuntos de soluciones de ecuaciones de primer grado Ax+By=C y demostrando que estas cumplen con los axiomas de la geometría euclidiana. Probemos por ejemplo:

Lema. Por 2 puntos distintos del plano cartesiano pasa (al menos) una recta.

Demostración. Tenemos que probar que para cada par (d,e) y (f,g) en R^2, existe una ecuación Ax + By = C de la que (d,e) y (f,g) son soluciones. Necesitamos encontrar los coeficientes adecuados A, B y C.

(d,e) y (f,g) son soluciones de Ax + By = C si y solo si Ad + Be = C y Afd + Bgd = Cd

De aquí podemos despejar a A y B en terminos de C:

A = C (e-g/ef-dg)

B = C (f-d/ef-dg) (suponiendo que ef-gd≠0)

Si tomamos por ejemplo C= ef-gd queda A=e-g y B=f-d y podemos comprobar que (d,e) y (f,g) son soluciones de la ecuación (e-g)x i (f-d)y = ef-dg

$(e-g)d+(f-d)e = e\cancel{d}-gd+fe-d\cancel{e} = ef-dg$

$(e-g)f+(f-d)g = ef-g\cancel{f}+f\cancel{g}-dg = ef-dg$ y esto funciona aunque ef-gd=0 •

En el plano cartesiano también podemos definir la distancia entre 2 puntos algebráicamente:

$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ y con esto quedan definidos también los círculos.

Al modelo del plano euclidiano construido a partir de R^2 ={(x,y) / x,y T R} con esas rectas y esa distancia se le llama **plano cartesiano**.

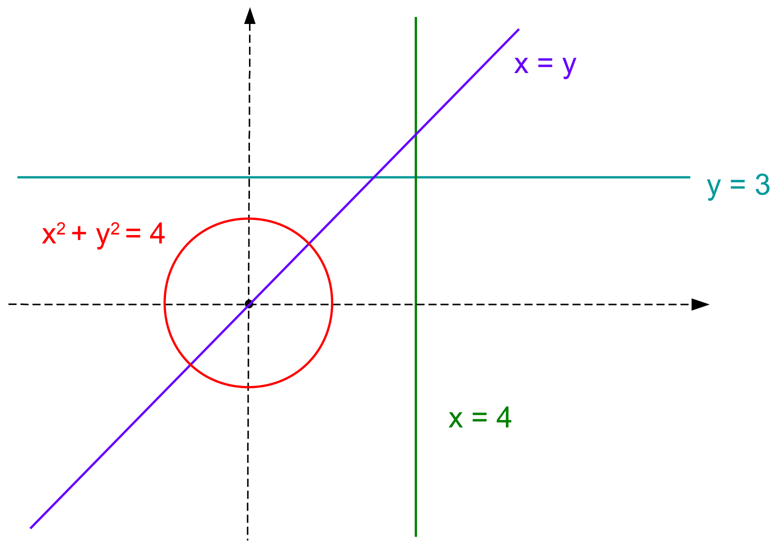
Problemas

3. Demuestra que en el plano cartesiano 2 rectas distintas se intersectan a lo mas en un punto.

4. Demuestra que por cada punto del plano cartesiano afuera de una recta L pasa una recta paralela a L.

Curvas y ecuaciones

En el plano cartesiano podemos describir lineas y curvas por medio de **ecuaciones**, que son las relaciones numéricas entre las coordenadas de sus puntos:



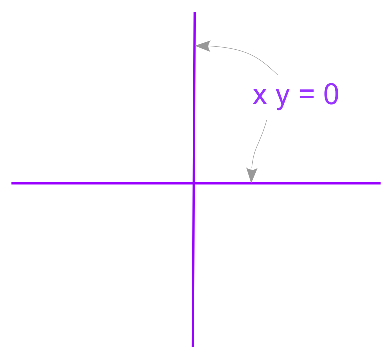
Descartes y Fermat observaron que al usar coordenadas muchos problemas geométricos podían transformarse en problemas algebraicos y viceversa. Al estudio de la geometría usando coordenadas y álgebra se le conoce como geometría *analítica.*

Mientras que Descartes buscó ecuaciones para las curvas conocidas, Fermat procedió al revés, al partir de ecuaciones algebraicas y tratar de hallar que forma geométrica tenían sus soluciones. El conjunto de soluciones de una ecuación es usualmente una curva, pero puede ser otras cosas, como un punto, o nada. Saber la forma de una curva a partir de la ecuación puede ser muy difícil, a menos que la ecuación sea sencilla y podamos manipularla para llevarla a una ecuación ya conocida, o a una ecuación donde podamos "ver" la propiedad geométrica que encierra.

Ejemplos.

- ¿Como son las soluciones de la ecuación $xy = 0$?

  $xy = 0$ equivale a que $x = 0$ o $y = 0$, que son dos rectas

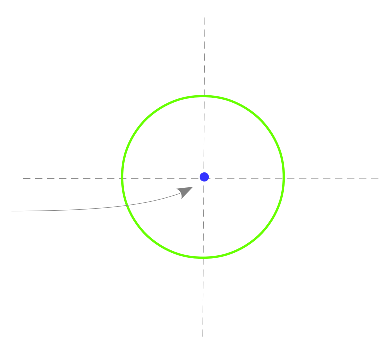


- ¿Como son las soluciones de las ecuaciones $x^2 + y^2 = r$?

  $x^2 + y^2 = 1$ es un circulo de radio 1.

  $x^2 + y^2 = 0$ equivale a que $x = 0$ y $y = 0$, que es un punto

  $x^2 + y^2 = -1$ no tiene ninguna solución



Ejercicio: ¿Que forma tendrán estas curvas?

$x^3 + y^3 = 1$ $\qquad\qquad$ $x^4 + y^4 = 1$

Aun si saber su forma, podemos decir que el conjunto de soluciones de $x^4 + y^4 = 1$ es simétrico respecto al eje y, ya que al cambiar x por $-x$ la ecuación queda igual, y también que es simétrico respecto al eje x, ya que al cambiar y por $-y$ la ecuación queda igual.

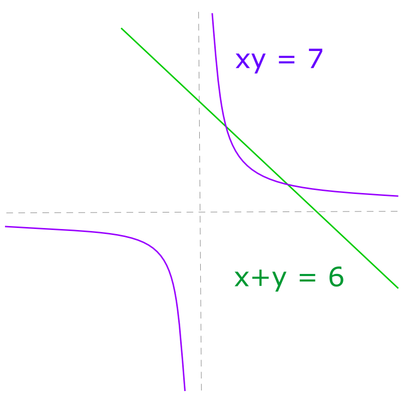
No sucede lo mismo con $x^3 + y^3 = 1$, ya que al cambiar x por $-x$ se convierte en $-x^3 + y^3 = 1$ y al cambiar y por $-y$ se convierte en $x^3 - y^3 = 1$.

La geometría analítica forma un puente entre el álgebra y la geometría que permite traducir problemas geométricos en problemas algebraicos y viceversa, dándoles una perspectiva distinta.

La geometría analítica es la base sobre la que en el siglo XVIII se desarrolló el cálculo y en el siglo XIX nació la geometría algebráica.

Ejemplos.

- ¿Existen dos números reales tales que su suma sea 6 y su producto sea 7?



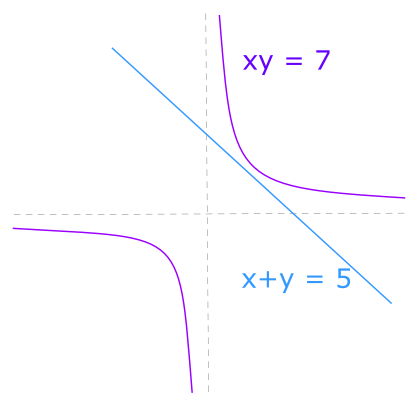
Si los números son x y y, la primera condición dice que $x+y = 6$ y la segunda que $xy = 7$.

Las soluciones del problema están dadas por los puntos de intersección de las dos curvas $x+y = 5$ y $xy = 7$

En el dibujo se puede ver que hay dos soluciones

- ¿Existen dos números reales cuya suma sea 5 y su producto sea 7?

No, ya que $x+y = 5$ y $xy = 7$ no se intersectan.



Problemas

5. ¿Que ecuación sencilla cumplen los puntos del plano que están a la misma distancia de (1,2) que de (4,3)? (usar *únicamente* la formula de la distancia y simplificar todo lo posible)

6. Dibuja las soluciones de estas ecuaciones

$xy = 1$ $\qquad$ $x^2 = y^2$ $\qquad$ $x^2 = y^3$

7. ¿Como se verán las soluciones de estas ecuaciones?

$x^3 + y^3 = 1$ $\qquad$ $x^4 + y^4 = 1$

(traten de imaginárselas y luego compruébenlo usando la computadora)

Aquí pueden jugar https://www.desmos.com/calculator/pi5ofejgt0?lang=es

8. ¿Puedes encontrar una ecuación en x y y que tenga exactamente 2 soluciones?

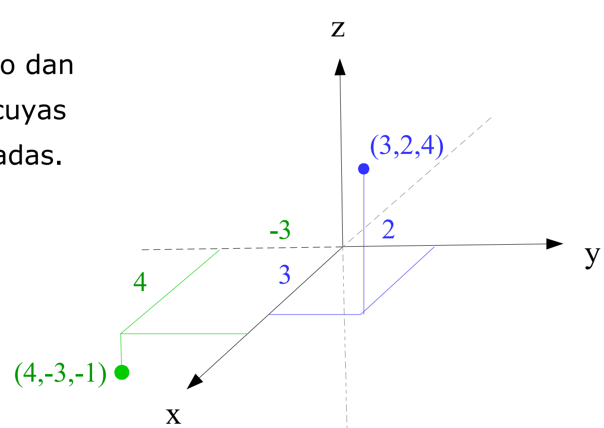
9. ¿Existen dos números reales tales que sus cuadrados sumen 6 y sus cubos sumen 4?

Coordenadas en el espacio euclidiano

Así como podemos modelar al plano euclidiano con el conjunto $R^2 = \{ (x,y) / x, y \in R\}$

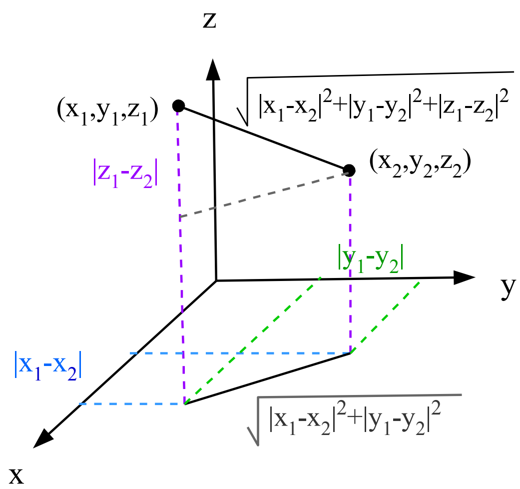
también podemos modelar al espacio euclidiano con el conjunto $R^3 = \{ (x,y,z) / x, y, z \in R\}$

En este caso las coordenadas de un punto dan la distancia a 3 planos perpendiculares, cuyas intersecciones son los 3 ejes de coordenadas.



¿Como se medirá a distancia entre 2 puntos (x_1,y_1,z_1) y (x_2,y_2,z_2) ?

Podemos usar el teorema de Pitágoras (2 veces) para hallar la distancia a partir de las diferencias de sus coordenadas.



Ejemplo. La distancia de (3,2,4) a (4,-3,-2) es $\sqrt{(3-4)^2+(2+3)^2+(4+2)^2} = \sqrt{1+25+36} = \sqrt{62}$

Igual que en el plano cartesiano, en el espacio cartesiano podemos usar ecuaciones para representar rectas, círculos, planos, esferas, etc.

Así como las ecuaciones en dos variables x,y corresponden usualmente curvas en el plano (aunque también pueden corresponder a puntos o al vacío), las ecuaciones en 3 variables x,y,z corresponden usualmente a *superficies* (aunque también pueden corresponder a curvas, puntos o al vacío).

Observar que si en una ecuación no aparece alguna variable, esa variable es libre de tomar cualquier valor.

Ejemplos.

- $y = 2$ es un plano paralelo al plano xz (y debe valer 2, pero x y y pueden tomar todos los valores)
- $xyz = 0$ son los 3 planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ juntos
- La ecuación $x^2+y^2+z^2 = 9$ corresponde a una esfera de radio 3 centrada en el origen.
- $x^2+y^2 = 0$ es una recta (el eje z) (ya que x y y deben valer 0, pero z puede tomar todos los valores)

Problemas

10. ¿Cuanto miden los lados del triángulo en R^3 con vértices en (2,-1,3), (3,1,8) y (4,-4,7)?

11. ¿Que crees que representen las siguientes ecuaciones en el espacio?

 a. $x+y = 1$ b. $x+y+z = 0$ c. $x^2+y^2 = 1$ d. $x^2+y^2+z^2 = 0$