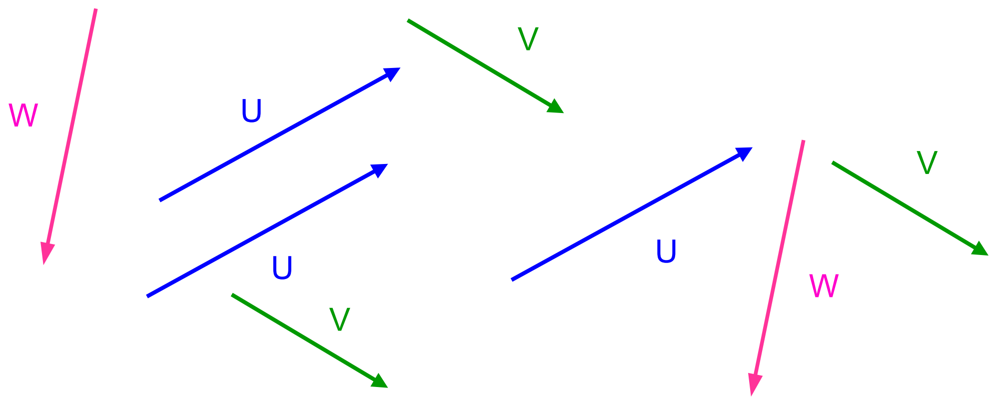
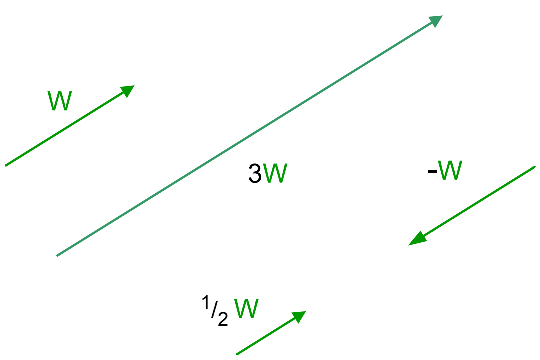
Vectores

Un *vector* es un segmento de recta dirigido en el plano o el espacio euclidiano.



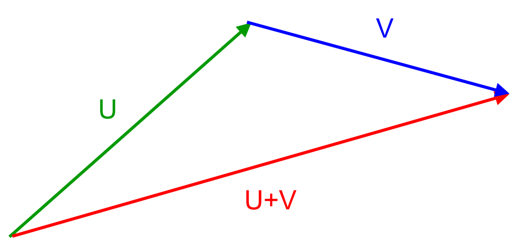
Diremos que dos vectores son iguales si tienen la misma dirección, magnitud (tamaño) y sentido, sin importar donde empiecen. Los vectores pueden representar muchas cosas, como posiciones relativas, desplazamientos, velocidades, fuerzas, etc.

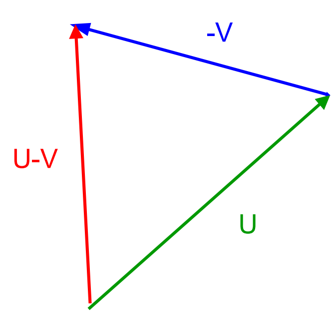
Los vectores pueden multiplicarse por números reales:



rV tiene la misma dirección que V.
rV tiene |r| veces la magnitud de V.
rV tiene el mismo sentido que V si r>0 y tiene el sentido opuesto si r<0.

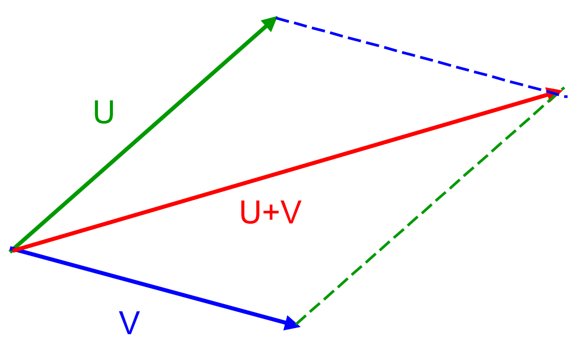
Los vectores pueden sumarse y restarse:

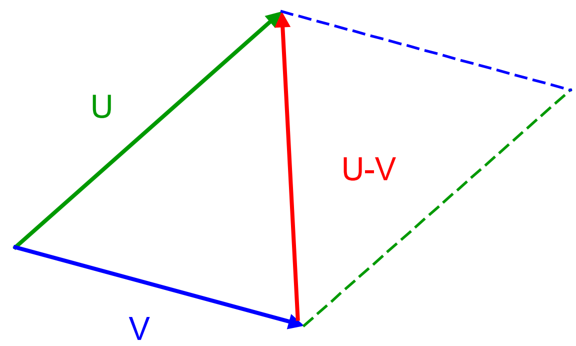




U - V = U+(-V)   es el vector que sumado a V da U.

La regla del paralelogramo:





La suma y resta de dos vectores basados en el mismo punto están dadas por las diagonales del paralelogramo definido por los dos vectores.

Propiedades de la suma de vectores y la multiplicación por escalares:

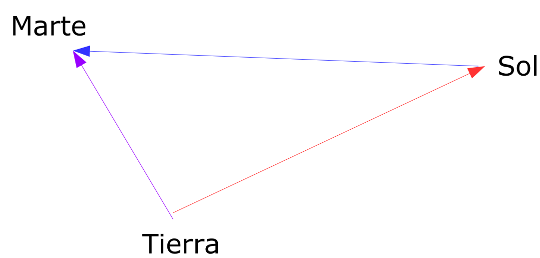
$U + V = V + U$	*conmutatividad*
$(U + V) + W = U + (V+ W)$	*asociatividad*
$\alpha(U+V) = \alpha U + \alpha V$	*distributividad*
$(\alpha+\beta)U = \alpha U + \beta U$	

Estas propiedades se obtienen de la ley del paralelogramo y de la semejanza de triángulos

Aplicaciones:

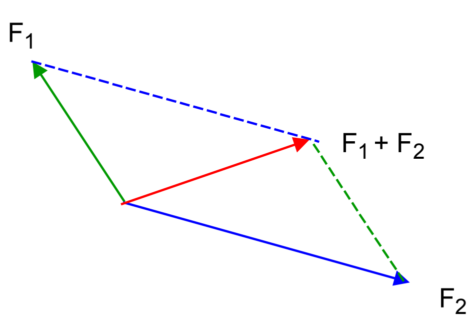
Las posiciones relativas se suman como vectores:

El vector que da la posición de Marte desde la Tierra es la suma del vector que da la posición del Sol desde la Tierra con el vector que da la posición de Marte desde el Sol.



Las velocidades se suman como vectores:

La velocidad de un objeto B respecto a otro objeto A es la suma de la velocidad de B respecto a un observador mas la velocidad del observador respecto a A (que es la velocidad de B respecto al observador menos la velocidad de A respecto al observador)

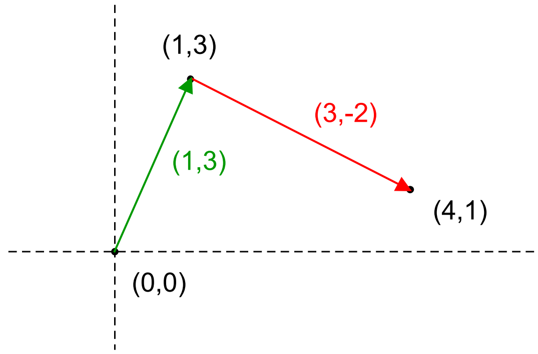


Las fuerzas se suman como vectores:

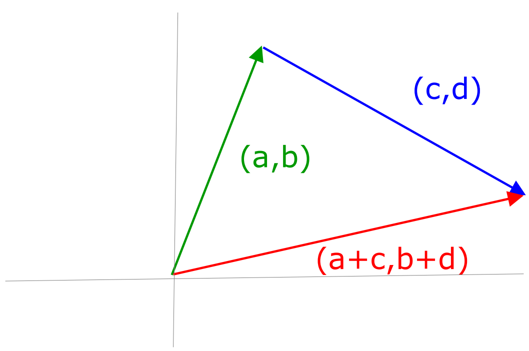
Si se aplican simultáneamente dos fuerzas sobre un punto, la fuerza resultante es su suma vectorial.

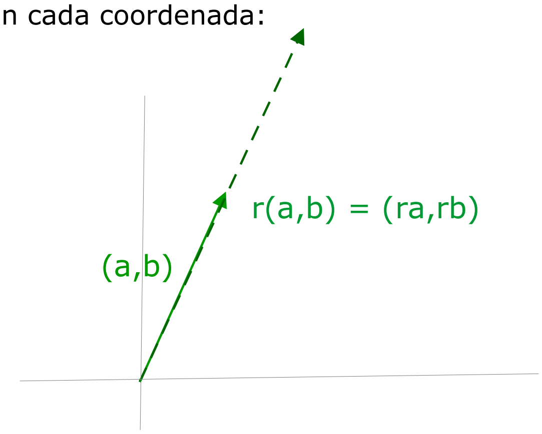
Vectores y coordenadas

Cada punto del plano (x,y) determina un vector que va del origen al punto, y que se denota también por (x,y). Entonces el vector que va del punto (x,y) al punto (x',y') es (x'-x,y'-y).



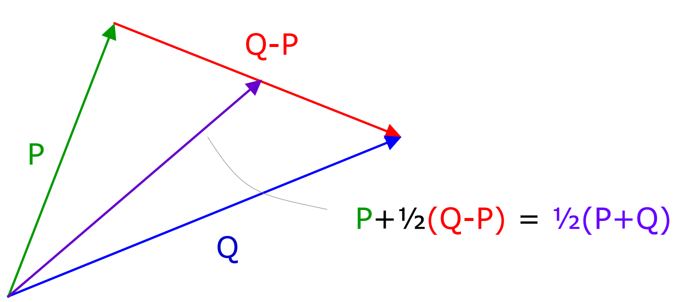
Observar que la suma de vectores esta dada por la suma coordenada a coordenada, y el producto por escalares también esta dado por el producto en cada coordenada:





Las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de la suma de vectores y el producto por escalares son consecuencia de las propiedades de la suma y el producto de números reales.

Ejemplo. Si P y Q son dos puntos en el plano, el punto medio entre P y Q es ½(P+Q).

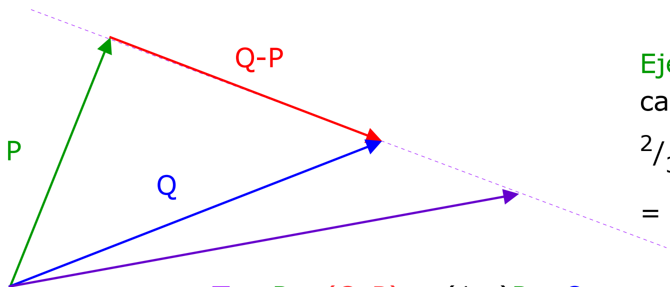


Ejemplo: El punto medio entre (2,4) y (6,1) es ½(2+6,4+1) = (4,2.5)

Lema. Los puntos alineados con P y Q son los puntos de la forma sP+rQ con r+s=1.

Demostración. Si del punto P nos movemos en la dirección del vector Q-P obtenemos un punto T alineado con P y Q. Recíprocamente, si el punto T está alineado con P y Q entonces el vector T-P tiene la misma dirección que el vector Q-P. Así que los puntos alineados con P y Q son de la forma

T = P + r(Q-P) = (1-r)P + rQ   Si s=1-r obtenemos el resultado. •



T = P+r(Q-P) = (1-r)P+rQ

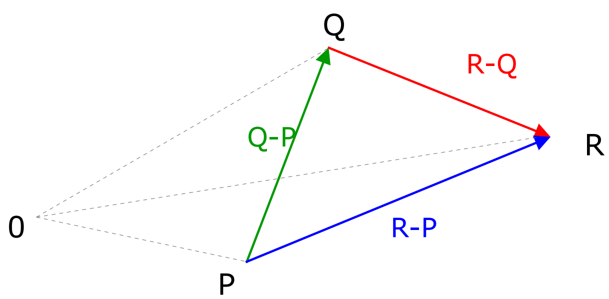
Ejemplo. El punto que esta a un tercio del camino entre (2,4) y (6,1) es

${}^2/_3(2,4)+{}^1/_3(6,1) = ({}^4/_3\,,{}^8/_3)+({}^6/_3\,,{}^1/_3) =$

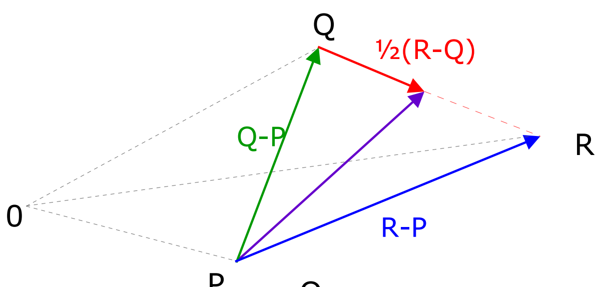
$= ({}^{10}/_3\,,3)$

Teorema. Las medianas de un triángulo se intersectan en un punto que las divide en la razón 2:1

Demostración. Las medianas de un triángulo son las lineas que van de los vértices a los puntos medios de los lados opuestos. Para ver que las medianas concurren hay que ver que el punto que esta a 2/3 del recorrido de cada mediana es el mismo para las 3 medianas.

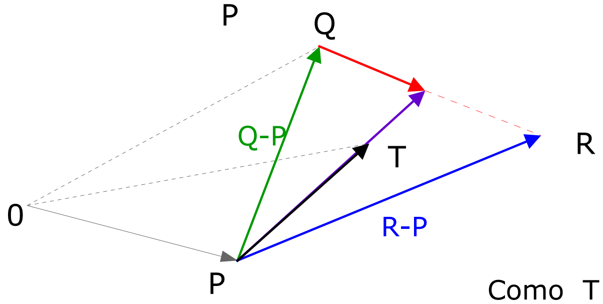


Las posiciones de los vértices del triángulo están dadas por 3 vectores P, Q y R, los vectores que unen a los vértices son Q-P, R-Q y R-P.



El vector que va del vértice P al punto medio del lado opuesto es Q-P + ½(R-Q)

El vector que va de P al punto T que esta a dos tercios del recorrido de la mediana es 2/3(Q-P+½(R-Q))



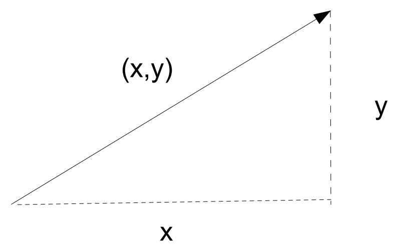
Así que la posición de T esta dada por el vector
T = P+2/3(Q-P+½(R-Q)) =
  = P+2/3 Q-2/3 P+1/3R-1/3Q =
  = 1/3P+1/3Q+1/3R

Como T = 1/3P+1/3Q+1/3R es simétrico respecto a P,Q R, el punto T es el mismo para las 3 medianas. •

Norma o magnitud.

Al tamaño de un vector V se le conoce como su *magnitud* o *norma* y se le denota por |V|. Los vectores de norma 1 se llaman *unitarios*.

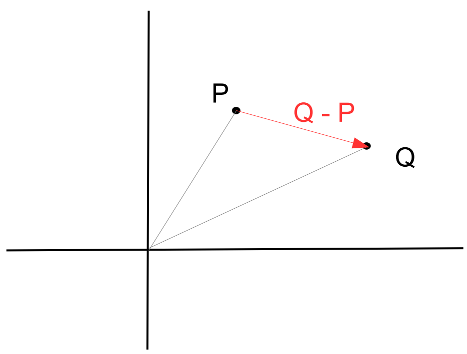
Por el Teorema de Pitagoras la norma del vector (x,y) es $|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$



Ejemplo:

$|(4,-3)| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

La distancia entre dos puntos P y Q del plano es la norma del vector Q-P



Ejemplo:

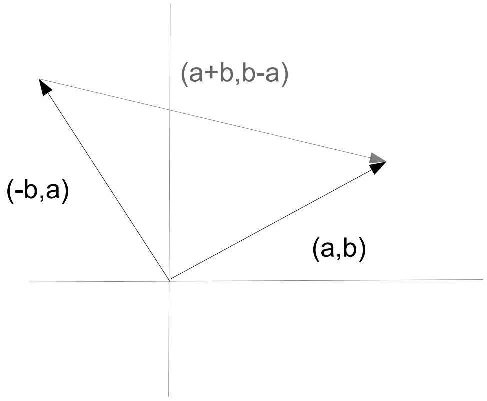
Si P=(4,1) y Q=(7,0) entonces
$dist(P,Q)=|(7-4,0-1)|=\sqrt{3^2+(-1)^2} =\sqrt{10}$

Al multiplicar un vector V por un numero r, se obtiene un vector paralelo a V cuya norma es |r| veces la norma de V, ya que si V=(x,y) entonces rV=(rx,ry) y entonces

$|rV| = (rx)^2+(ry)^2 = r^2 (x^2+y^2) = |r| \; x^2+y^2 = |r| \, |V|$

Ejemplo. Un vector unitario paralelo a V=(4,-3) es $^1/_{|V|}V= {}^1/_5(4,-3) = ({}^4/_5,{}^{-3}/_5)$

Lema. Los vectores (a,b) y (-b,a) tienen magnitudes iguales y son perpendiculares.



Demostración. $|(a,b)|^2 = a^2+b^2 = (-b)^2+a^2 =|(-b,a)|^2$
así que (a,b) y (-b,a) tienen la misma norma.
Para ver que (a,b) y (-b,a) son perpendiculares, basta ver que el triángulo formado por (a,b), (-b,a) y su diferencia (a+b,b-a) cumplen el teorema de Pitágoras:

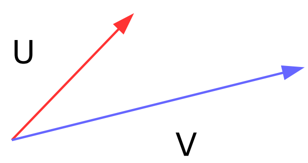
$|(a+b,b-a)|^2 = a^2+\cancel{2ab}+b^2+b^2-\cancel{2ba}+a^2$

$|(a,b)|^2+|(-b,a)|^2 = a^2+b^2+b^2+a^2$ •

Problemas

1. Dibuja cuidadosamente -U+2V, 2U-V y 3U-2V basados en el mismo punto que U y V.

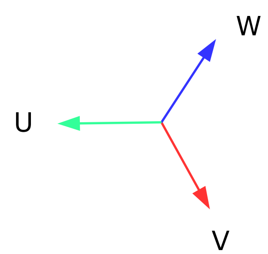
   Ahora dibuja V-2U, U-2V y 2U-3V. ¿Que observas?



2 a. Encuentra un vector con la norma de (2,5) y la dirección de (3,7).

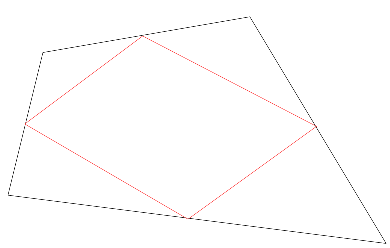
   b. Encuentra dos vectores unitarios perpendiculares a (3,7).

3. Encuentra las coordenadas de 3 vectores del plano, *todos de la misma magnitud*, que sumen 0.



U+V+W = 0

4. Demuestra usando vectores (y sin usar coordenadas) que los puntos medios de cualquier cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo.



(Hint: si los vértices son P,Q,R,S ¿que vectores van de un punto medio a otro?)

5. a. Demuestra analíticamente (usando únicamente coordenadas y álgebra) que para todos los vectores U, V del plano, |U+V| ≤ |U| + |V|.

   b. ¿Será cierto que |U-V| ≤ |U| - |V|?