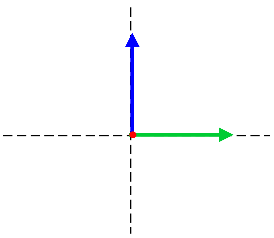
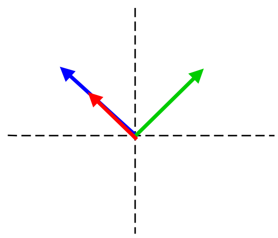
El Producto Interno

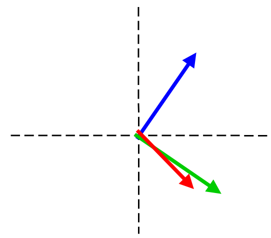
Ya que la suma de vectores puede hacerse algebraicamente (a,b) + (c,d) = (a+c,b+d) parece natural definir un “producto” de vectores como (a,b) x (c,d) = (ac,bd).
Pero este producto no tiene un significado geométrico independiente de coordenadas, como muestra el siguiente ejemplo, ya que al girar dos vectores su “producto” no gira igual:



(1,0)x(0,1) = (0,0)



$(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$x$(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ = (-1/2,1/2)



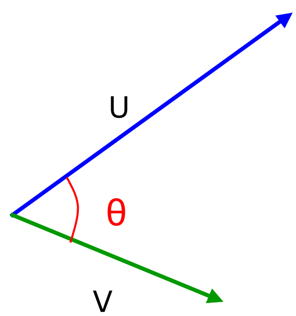
(4/5,-3/5)x(3/5,4/5) = (12/25,-12/25)

Pero aunque el producto por coordenadas de dos vectores (a,b) y (c,d) no tiene un significado geométrico, resulta que la suma de los productos, ac+bd, si lo tiene:

El *producto interno* (o *producto punto* o *producto escalar*) de dos vectores en el plano U=(a,b) y V=(c,d) es el numero U · V = ac+bd

Ejemplo. Si U=(2,3) y V=(1,4) entonces U · V = (2,3) · (1,4) = 2·1+3·4 = 2+12 = 14

El significado geométrico del producto interno es:



Teorema. *U · V = |U| |V| cosθ*
donde θ es el ángulo que forman los vectores.

Demostración. La ley de los cosenos aplicada a las normas de los vectores da

$|U-V|^2 = |U|^2 + |V|^2 - 2|U||V| \cos\theta$

en coordenadas esto es

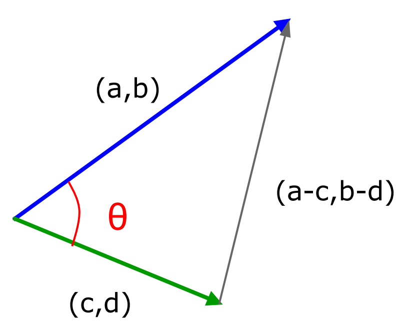
$(a-c)^2 + (b-d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2-2\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{c^2+d^2}\,\cos\theta$

desarrollando y simplificando queda

$-2ac -2bd = -2\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{c^2+d^2}\,\cos\theta$

dividiendo entre -2 queda

$ac + bd = \sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{c^2+d^2}\,\cos\theta = |U|\,|V| \cos\theta$



Observar que el producto interno tiene las siguientes propiedades algebraicas:

1. $U \cdot U = |U|^2$
2. $U \cdot V = V \cdot U$ *conmuta*
3. $U \cdot (V+W) = U \cdot V + U \cdot W$ *se distribuye con la suma*
4. $rU \cdot V = U \cdot rV = r\,(U \cdot V)$ *saca escalares*

Como $U \cdot V = |U|\ |V| \cos\theta$, el producto interno tiene las siguientes propiedades geométricas:

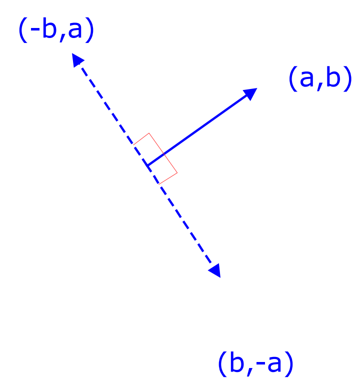
1. $U \cdot V \leq |U|\ |V|$ y la igualdad se da solo si U y V tienen la misma dirección y sentido.

2. $U \cdot V = 0$ si y solo si U y V son ortogonales (perpendiculares).

Ejemplos:

1. Los vectores (2,3) y (9,-6) son ortogonales ya que $(2,3)\cdot(9,-6) = 2\cdot9-3\cdot6 = 0$.

2. Los vectores (b,-a) (-b,a) son ortogonales al vector (a,b) ya que $(a,b) \cdot (b,-a) = ab-ba = 0$. (-b,a) apunta a la izquierda y (b,-a) apunta a la derecha de (a,b).



Observar que $U \cdot V > 0$ si $\theta<90º$ y $U \cdot V < 0$ si $\theta>90º$, ya que es para esos ángulos que el coseno es positivo o negativo.

Ejemplo: $(6,7)\cdot(-8,7) = -1$ así que (6,7) y (-8,7) forman un ángulo mayor que 90º.

Corolario. El ángulo entre los vectores U y V está dado por $\cos\theta = U \cdot V / |U|\ |V|$

Ejemplo: El ángulo θ entre los vectores (1,2) y (3,4) está dado por

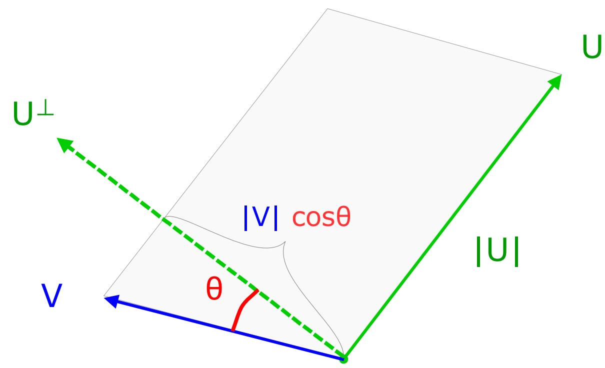
$\cos\theta = (1,2)\cdot(3,4) / |(1,2)||(3,4)| = 1\cdot3+2\cdot4 /(1^2+2^2)^{½}(3^2+4^2)^{½} = 11/\sqrt{125}$.

$\theta = \arccos(11/\sqrt{125})$

Teorema. El área del paralelogramo determinado por dos vectores U y V del plano es $U^{\perp} \cdot V$ donde $U^{\perp}$ es un vector perpendicular a U con la misma norma que U.

Demostración.

$$\text{Area} = \text{base} \times \text{altura} =$$
$$= |U| \quad \underbrace{|V| \cos\theta}_{} =$$
$$= |U^{\perp}| \quad |V| \cos\theta =$$
$$= U^{\perp} \cdot V$$



Corolario. El área dei paralelogramos generado por U=(a,b) y V=(c,d) es el valor absoluto del determinante de la matriz $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Demostración. Si U = (a,b) y V = (c,d) entonces $U^{\perp}$ es (-b,a) o (b,-a)

así que $U^{\perp} \cdot V$ = (-b,a) · (c,d) = ad-bc o bien $U^{\perp} \cdot V$ = (b,-a) · (c,d) = -ad+bc

Ejemplos:

El área del paralelogramo determinado por los vectores (1,2) y (3,4) es (1,2)·(4,-3)=1·4-2·3= 10

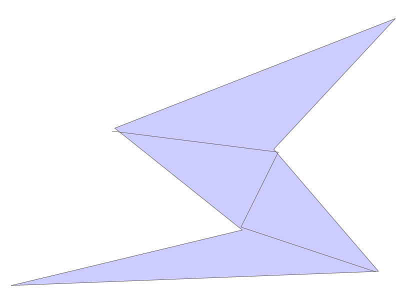
¿Que área tiene el triángulo con vértices (1,2), (7,4) y (3,5)?

Los vectores (7,4)-(1,2)=(6,2) y (3,5)-(1,2)=(2,3) dan dos lados del triángulo.

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo generado por los dos vectores:

Area = 1/2 (6,2)·(3,-2)=1/2 (18-4)= 7

El área de cualquier polígono puede calcularse a partir de las coordenadas de sus vértices dividiendo al polígono en triángulos.

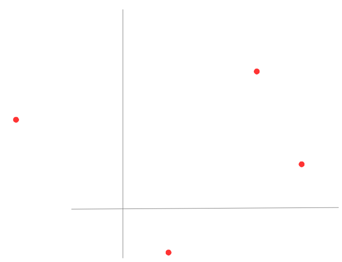


Problemas

1. (Sin calculadora y sin dibujarlos) ¿Los vectores (19,-7) y (4,11) forman un ángulo menor, igual o mayor que 90º? ¿Los vectores (1,2) y (3,1) forman un ángulo menor, igual o mayor que 45º?

2. ¿Cual es el área del paralelogramo generado por los vectores (1000,37) y (27,1)? ¿Cual es la altura del paralelogramo sobre el lado largo?

3. ¿Cual es el área del cuadrilátero con vértices en (1,-1), (-2,2), (4,1) y (3,3)?



4. Los vértices de un triángulo están en A=(2,3), B=(5,6) y C=(1,-4). Calcula
   a. La longitud del lado BC
   b. La longitud de la mediana por A
   c. El ángulo en el vértice A
   d. El área del triángulo
   e. La altura desde el lado BC
   f. El centro de gravedad del triángulo
   g. El diámetro del círculo circunscrito

   No escriban de mas! Cada inciso puede hacerse en uno o dos renglones.

5. a. Encuentra un vector del plano cuyos productos punto con (1,2) y con (3,1) sean iguales.
   b. Encuentra un vector del plano que forme ángulos iguales con (1,2) y (3,1).
   (iguales significa exactamente iguales)

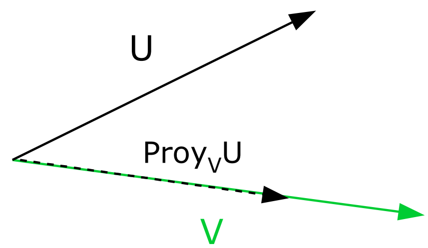
6. ¿Como se ven todos los vectores del plano cuyo producto interior con un vector fijo V da el mismo número?

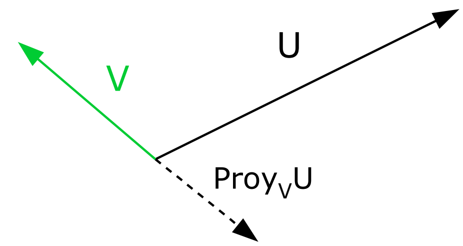
7. Demuestra que $(U+V) \cdot (U-V) = |U|^2 - |V|^2$

8. Demuestra que si $|U-V| = |U+V|$ entonces U y V son ortogonales.
   Sugerencia: escribe la igualdad usando el producto interno.

Proyecciones y descomposición de vectores

Si U y V son vectores en el plano, la *proyección de* U *en la dirección de* V es el vector formado por la "sombra" de U en la linea determinada por V, cuando se ilumina U perpendicularmente a V.

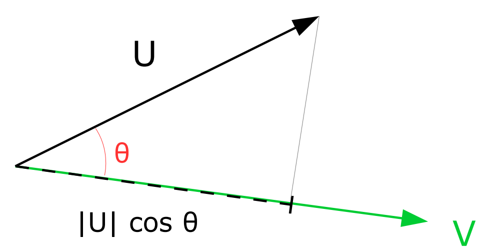




Lema. La proyección de U en la dirección de V esta dada por $\text{Proy}_V\, U = \dfrac{U\cdot V}{V\cdot V}\, V$

Demostración. La sombra de U en la linea de V mide

$$|U| \cos\theta = \frac{|U||V| \cos\theta}{|V|} = \frac{U\cdot V}{|V|}$$



Para obtener la proyección de U hacia V, basta multiplicar el tamaño de la sombra por el vector unitario en la dirección de V:

$$\text{Proy}_V U = \frac{U\cdot V}{|V|}\,\frac{1}{|V|}\, V = \frac{U\cdot V}{V\cdot V}\, V$$

Ejemplo. La proyección de U=(1,2) hacia V=(3,4) es

$$\text{Proy}_V U = \frac{U\cdot V}{V\cdot V}\, V = \frac{(1,2)\cdot(3,4)}{(3,4)\cdot(3,4)}\,(3,4) = \frac{1\cdot 3 + 2\cdot 4}{3^2+4^2}\,(3,4) = \frac{11}{25}\,(3,4)$$

Y la proyección de V=(3,4) hacia U=(1,2) es

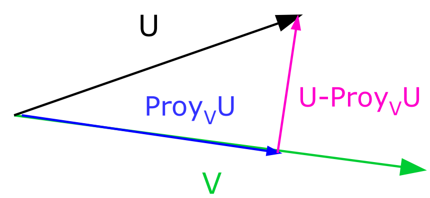
$$\text{Proy}_U V = \frac{V\cdot U}{V\cdot V}\, U = \frac{(3,4)\cdot(1,2)}{(1,2)\cdot(1,2)}\,(1,2) = \frac{3\cdot 1 + 4\cdot 2}{1^2+2^2}\,(1,2) = \frac{11}{5}\,(1,2)$$

Lema. La proyección de U en la dirección de V es el único vector paralelo a V que al restarlo a U da un vector ortogonal a V.

Demostración. Un vector paralelo a V tiene la forma tV para algún numero real t.
Si U-tV es ortogonal a V entonces (U-tV)·V = 0, es decir U·V-tV·V = 0 o sea U·V= tV·V
así que t= U·V/V·V.

Corolario. Cada vector U puede descomponerse de manera única como la suma de un vector paralelo a V y otro ortogonal a V:

$U = \text{Proy}_V U + (U-\text{Proy}_V U)$



Ejemplo. El vector (3,2) puede descomponerse como la suma de un vector paralelo y otro perpendicular a (5,4):

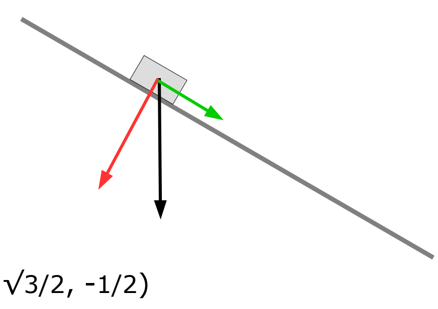
$\text{Proy}_{(5,4)}(3,2) = {}^{(3,2)\cdot(5,4)}/_{(5,4)\cdot(5,4)}\,(5,4) = {}^{23}/_{41}(5,4) = ({}^{115}/_{41},{}^{92}/_{41})$

$(3,2) - \text{Proy}_{(5,4)}(3,2) = (3,2) - ({}^{115}/_{41},{}^{92}/_{41}) = ({}^{8}/_{41}, {}^{-10}/_{41})$

$(3,2) = \underbrace{({}^{115}/_{41},{}^{92}/_{41})}_{\text{paralelo a }(5,4)} + \underbrace{({}^{8}/_{41}, {}^{-10}/_{41})}_{\text{ortogonal a }(5,4)}$

Ejemplo. Para un objeto en un plano inclinado, la fuerza de gravedad se descompone en una fuerza paralela al plano (que empuja al objeto cuesta abajo) y una fuerza normal al plano (que lo empuja hacia el plano, la fricción es proporcional a esta fuerza).

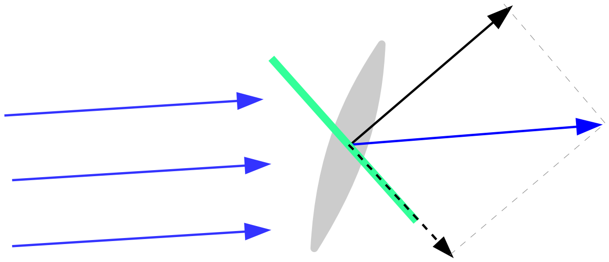
Si la fuerza de gravedad esta dada por el vector (0,-g) y el plano tiene una inclinación de 30°, un vector que apunta "cuesta abajo" es (cos 30°, -sen 30°) = (√3/2, -1/2).



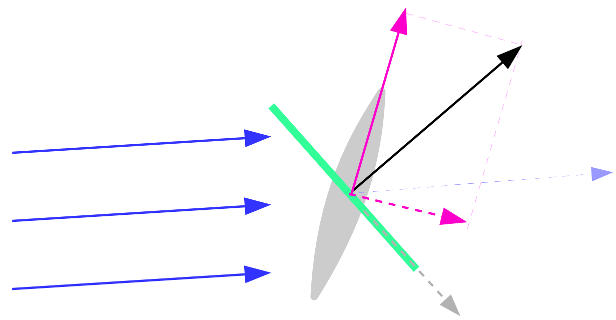
Así que la componente tangencial es
$\text{Proy}_{(\sqrt{3}/2,\, -1/2)}(0,-g) = {}^{(0,-g)\cdot(\sqrt{3}/2,\, -1/2)}/_{1}\,(\sqrt{3}/2, -1/2) = 1/2\ g\,(\sqrt{3}/2, -1/2)$

y la componente normal al plano es
$\text{Proy}_{(-1/2,\sqrt{3}/2)}(0,-g) = {}^{(0,-g)\cdot(-1/2,-\sqrt{3}/2)}/_{1}\,(-1/2,\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}/2\ g\,(-1/2,-\sqrt{3}/2)$

Aplicación: Un modelo simplificado de un velero:



La fuerza del viento se descompone en una componente ortogonal a la vela, que empuja a la vela, y otra componente en la dirección de la vela, que se pierde.

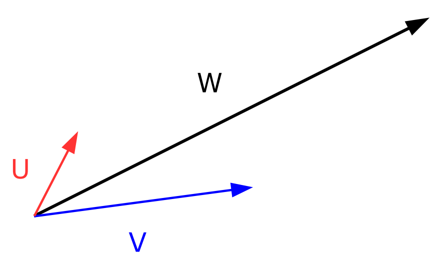


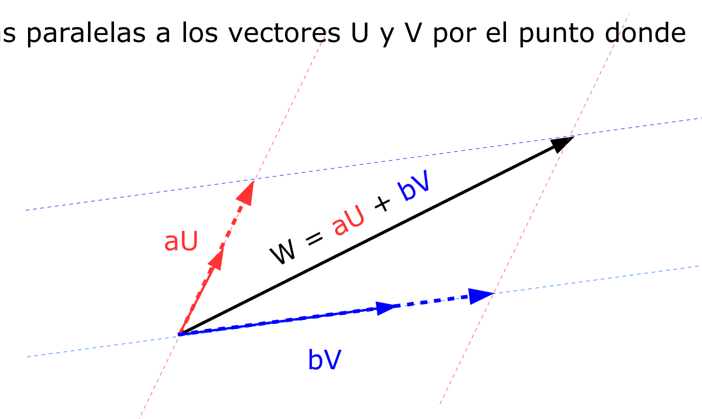
La fuerza que empuja a la vela, se descompone a su vez en una componente en la dirección del barco, que impulsa al barco, y una componente ortogonal a la dirección del barco, que es absorbida por la quilla.

Con este modelo se puede mostrar, por ejemplo, que un velero puede avanzar casi en la dirección opuesta al viento, si se coloca la vela en una dirección apropiada.

Combinaciones lineales

Observar que si U y V son dos vectores del plano en distintas direcciones (perpendiculares o no) entonces cualquier vector W del plano puede descomponerse como suma de un múltiplo de U y un múltiplo de V, como puede verse trazando lineas paralelas a los vectores U y V por el punto donde termina W:





Cuando W se puede escribir como la suma de un múltiplo de U y un múltiplo de V decimos que W es una combinación *lineal* de U y V.

Observar que si U y V son perpendiculares entonces W es la suma de sus proyecciones hacia U y hacia V, pero si U y V no son perpendiculares entonces no, y la combinación de U y V que da W debe encontrarse de otra manera.

Ejemplos

Descomponer al vector (6,7) como combinación lineal de (1,2) y (3,4).

Buscamos dos números reales a y b tales que (6,7) = a(1,2) + b (3,4) = (a+3b,2a+4b)

Entonces a + 3b = 6 y 2a+4b = 7.

Multiplicando la primera ecuación por 2 y restando la segunda ecuación queda 2b = 5 así que b = 5/2

Y 4 veces la primera ecuación menos 3 veces la segunda da -2a = 3 así que a =-3/2

Podemos checar si el resultado es correcto calculando la suma:

-3/2(1,2) + 5/2 (3,4) = (-3/2,-3) + (15/2,10) = (6,7)

¿Que combinaciones de fuerzas en las direcciones de (1,4) y (1,5) dan por resultado fuerzas en la dirección de (1,0)?

Buscamos números reales tales que a(1,4) + b(1,5) = c(1,0)

a + b = c → a – 4/5 a = c → 1/5 a =c → a = 5c

4a+5b = 0 → b = -4/5 a → b = -4c

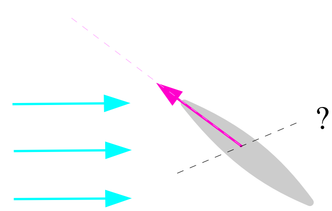
Así que las combinaciones buscadas son de la forma 5c (1,4) – 4c (1,5) = c(1,0)

Problemas

9. a. Escribe al vector (1,2) como suma de un vector paralelo y uno perpendicular a (3,4).
   b. Escribe al vector (3,4) como suma de un vector paralelo y uno perpendicular a (1,2).

10. Demuestra que si $|Proy_V U| = |Proy_U V|$ entonces $|U| = |V|$.

11. ¿En que posición debe colocarse la vela para que un velero pueda navegar hacia en noroeste con viento que sopla hacia el este (es decir, navegando a 45º en contra del viento) lo mas rápido posible?



12. Escribe al vector (7,1) como combinación lineal de (7,4) y (3,-5)

13. Demuestra que solo existe una manera de escribir a cada vector del plano como combinación lineal de dos vectores dados no paralelos.