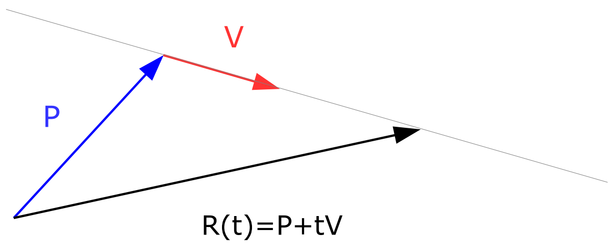
Rectas en el plano

Parametrizaciones de las rectas.

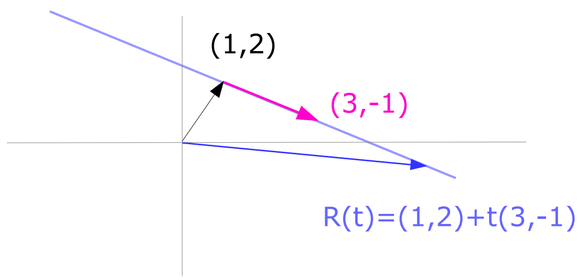
La recta que pasa por el punto P y tiene la dirección del vector V esta formada por los los puntos de la forma R(t)=P+tV donde t es un escalar. Esta es una *parametrización* de la recta (los puntos de la recta están dados en función de un parámetro t).



Ejemplos.

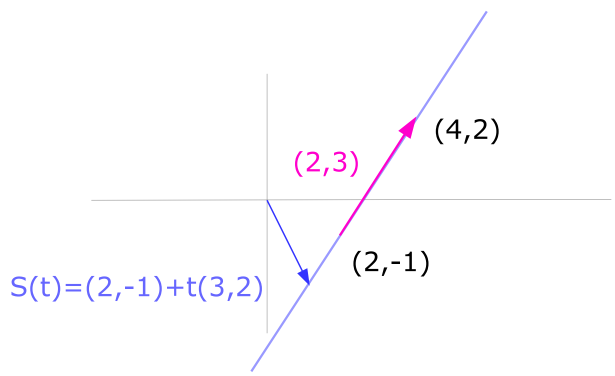
La recta que pasa por el punto (1,2) y tiene l dirección del vector (3,-1) esta formada por los puntos

R(t) = (1,2) + t (3,-1)= (3t+1,-t+2)



La recta que pasa por P=(2,-1) y Q=(4,2) tiene la dirección del vector V = Q-P = (2,3) así que está parametrizada por

S(t) = (2,-1) + t(3,2) = (3t+2,2t-1).



Una recta tienen muchas parametrizaciones distintas. Si pensamos en el parámetro t como el tiempo, la parametrización R(t)=P+ t(Q-P) recorre la recta que contiene a los puntos P y Q a velocidad constante, pasando por P en t=0 y por Q en t=1. Pero podemos recorrer la recta al revés, usando la parametrización S(t) = Q + t(P-Q) que pasa por Q en t=0 y pasa por P en t=1. Podemos también recorrerla mas rápido o mas despacio, pasando por P y Q en los momentos que queramos.

Ejemplo. Varias parametrizaciones de la recta que pasa por (1,4) y (3,0):

R(t) = (1,4) + t (2,-4)

S(t) = (1,4) + t (4,-8)   (al doble de velocidad)

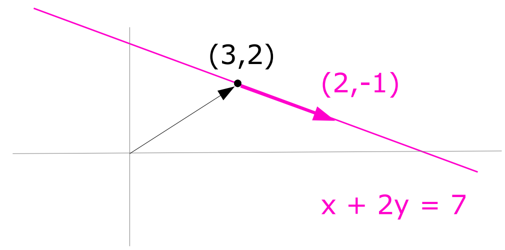
U(t) = (1,4) + t (-1,2)   (a la mitad de la velocidad, en sentido inverso y empezando en el otro punto)

V(t) = (0,8) + t (-3,6)   (a otra velocidad y empezando en el otro punto distinto de la recta)

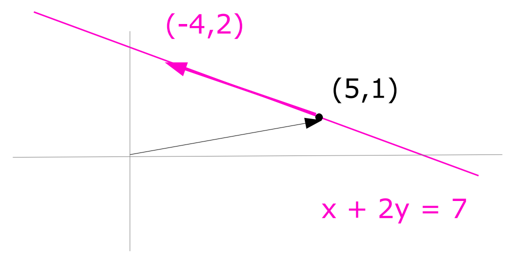
W(s) = (1,4) + s (2,-4)   el nombre del parámetro no importa!

Las parametrizaciones dan las coordenadas de los puntos de una recta en términos del parámetro, pero también podemos describir a los puntos de la recta por medio de relaciones entre sus coordenadas que no dependen del parámetro.

Ejemplo.



Los puntos de la recta R(t) = (3,2)+t(2,-1) tienen coordenadas x=2t+3   y=2-t , pero estas coordenadas x y y también están relacionadas de una manera que no depende de t: sumando x con el doble de y podemos eliminar a t y obtener x + 2y = 7.



Si tomamos otra parametrización de la misma recta, como Z(s) = (5,1) + s(-4,2) las coordenadas de los puntos son x=5-4s   y=1+2s, y obtenemos de nuevo que x + 2y = 7.

Las ecuaciones cartesianas de la recta describen a los puntos de la recta por medio de la relación que hay entre sus coordenadas.

Cada recta del plano puede parametrizarse como R(t)=(a,b)+t(c,d) donde (a,b) es un punto de la recta y (c,d) es un vector en la dirección de la recta, así que x=a+tc , y=b+td.
Si multiplicamos x por d, y multiplicamos y por c y restamos se eliminan la t´s y queda
dx – cy = ad -bc que es una **ecuación cartesiana** de la recta.

Problemas.

1. Da parametrizaciones de la recta que pasa por (4,3) y (2,7) de modo que

   a. pase por (4,3) en t=0 y por (5,7) en t=2.

   b. pase por (4,3) en t=-1 y por (5,7) en t=1.

   c. pase por (5,7) en t=2 y por (4,3) en t=5.

2. Para el triángulo con vértices P(1,2), Q(3,5), R(6,9) da parametrizaciones de las rectas que contienen a:

a. el lado PQ   b. La mediana por Q   c. La altura por R.

3. ¿Cuales de estas parametrizaciones corresponden a la misma recta?

$U(t) = (0,6) + t\,(1,-2)$ $V(r) = (2,2) + r\,(-3,6)$ $T(s) = (1,4) + s\,(2,-4)$

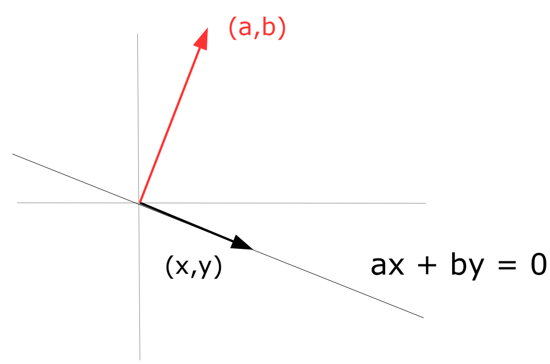
Ecuaciones cartesianas de las rectas.

Todas las rectas del plano tienen ecuaciones lineales $ax+ by = c$ (para algunos números reales a, b, c) y todas las ecuaciones de esta forma corresponden a rectas, siempre y cuando $(a,b)\neq(0,0)$. A rectas distintas les corresponden ecuaciones distintas, pero distintas ecuaciones pueden corresponder a la misma recta, ya que si multiplicamos una ecuación por una constante obtenemos otra ecuación con las mismas soluciones.

Ejemplo. Las ecuaciones $3x - 6y = 9$, $2x -4y = 6$, $-x +2y = -3$ corresponden a la misma recta.

Es natural preguntarse que tan distintas pueden ser las ecuaciones de la misma recta, y como está codificada la información geométrica de la recta en los coeficientes de la ecuación.

Lema. Las soluciones de la ecuación $ax+by=c$ forman una recta perpendicular al vector (a,b).

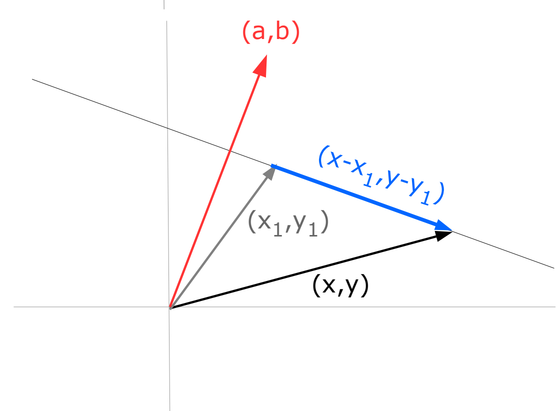


Demostración.

Si c=0. La ecuación $ax+by=0$ puede escribirse como

$(a,b) \cdot (x,y) = 0$

así que las soluciones de la ecuación son todos los vectores (x,y) ortogonales a (a,b).



Si $c\neq0$. Sea (x_1,y_1) cualquier solución de la ecuación, entonces $ax_1+by_1 = c$.

restándola a la ecuación original queda

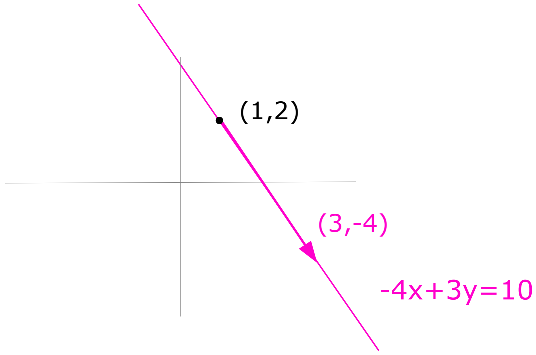
$a(x-x_1)+b(y-y_1)= 0$

es decir $(a,b) \cdot (x-x_1,y-y_1) = 0$

Así que el vector $(x-x_1,y-y_1)$, que apunta de una solución a otra, es ortogonal al vector (a,b). •

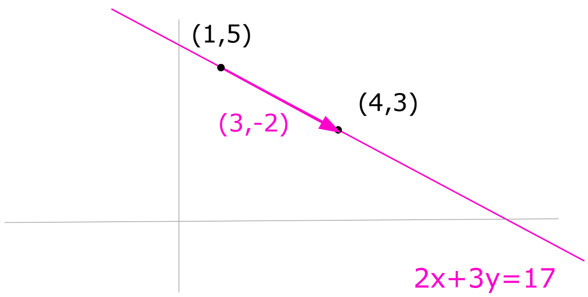
Ejemplos.

- ¿Que ecuación cartesiana cumple la recta que pasa por (1,2) en la dirección (3,-4)?



La recta es perpendicular al vector (4,3), así que tiene una ecuación 4x+3y=C para algún C. Como el punto (1,2) esta en la recta 4(1)+3(2)=C así que C=10 y la ecuación es 4x+3y=10.

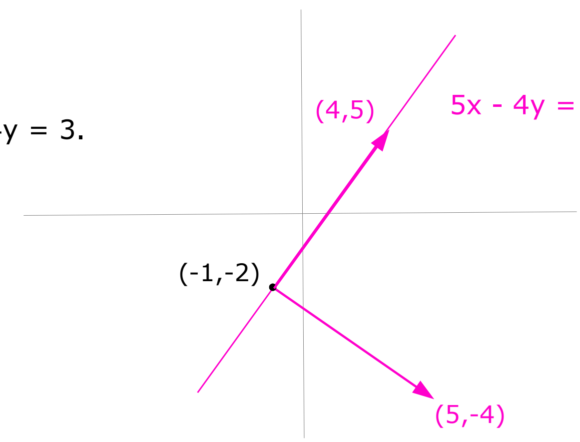
- ¿Que ecuación cartesiana tiene la recta que pasa por P=(4,3) y Q=(1,5)?



La recta tiene dirección P-Q=(3,-2), así que una ecuación es 2x + 3y= C donde 2(4) + 3(3) = C y la ecuación queda 2x + 3y = 17.

- Dar una parametrización de la recta 5x-4y = 3.

La recta es perpendicular al vector (5,-4)
así que va en la dirección del vector (4,5).
Un punto en recta es P=(-1,-2) así que una
parametrización es P(t) = (-1,-2) + t(4,5).



Problema.

4. ¿Que ecuaciones cartesianas satisfacen estas rectas?

a) La que pasa por (1,2) y (4,3)

b) R(t)=(4t+7,2+3t)

c) La paralela a 2x+3y=5 que pasa por (4,1)

d) La perpendicular a 2x+3y=5 que pasa por (4,1)

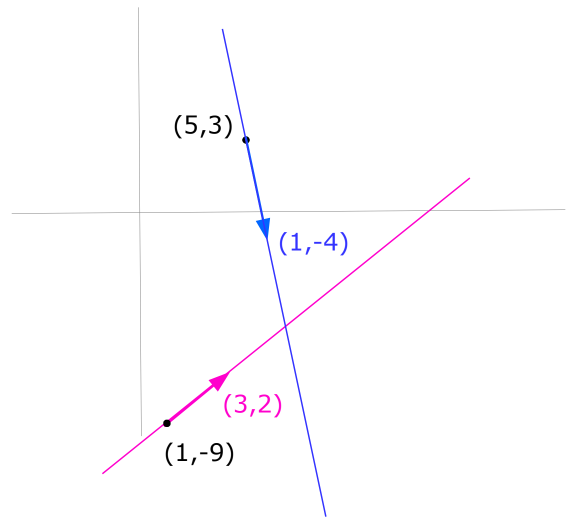
Intersecciones de rectas

Dos rectas en el plano se intersectan siempre que tienen direcciones distintas. Podemos hallar el punto de intersección a partir de las parametrizaciones o las ecuaciones cartesianas de las rectas, resolviendo un sistema de ecuaciones.

Para hallar el ángulo de intersección entre las rectas podemos usar la interpretación geométrica del producto punto.

Ejemplos.

- ¿En que punto se intersectan las rectas $S(t)=(3t+4,2t-7)$ y $R(s)=(s+5,-4s+3)$?
  ¿Con que ángulo se intersectan?



Para hallar el punto de intersección hay que encontrar valores de t y s tales que $S(t)=R(s)$ es decir $(3t+4,2t-7)=(s+5,-4s+3)$.

Esto da un sistema de ecuaciones lineales:

$3t+4 = s+5$ $\qquad$ $2t-7 = -4s+3$

Podemos despejar s en términos de t en la primera ecuación

$s = 3t-1$ y sustituirlo en la segunda $2t-7 = -4(3t-1)+3 = -12t+7$

así que $14t = 14$ de donde $t = 1$ y $s = 3t-1 = 3-1 = 2$

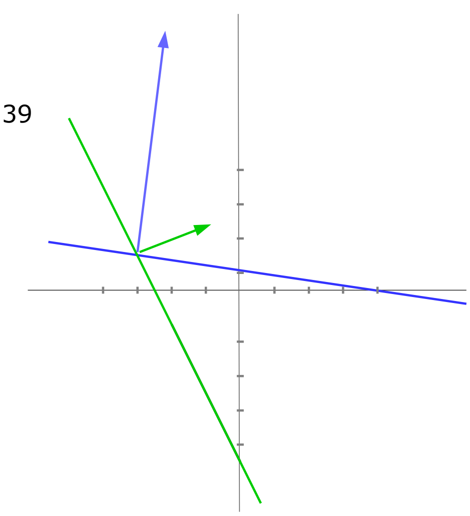
Así que el punto de intersección es $S(1) = (7,-5) = R(2)$.

El ángulo de intersección de las rectas es el ángulo entre sus vectores directores, que son (3,2) y (1,-4):

$\cos\theta = (3,2)\cdot(1,-4)/|(3,2)||(1,-4)|=(3\cdot 1-2\cdot 4)/(3^2+2^2)^{1/2}(1^2+4^2)^{1/2} = -5/\sqrt{13}\sqrt{17}$

$\theta = \arccos(5/\sqrt{13}\sqrt{17}) = \arccos(0.3363) = 1.228$ radianes

- ¿En que punto y con que ángulo se intersectan las rectas $x+7y=4$ y $2x+y=-5$?



El punto de intersección es la solución del sistema de ecuaciones lineales.

Si despejamos y en en la segunda ecuación obtenemos $y=-2x-5$.

Sustituyendo en la primera obtenemos $x+7(-2x-5) = 4$ es decir $-13x = 39$

o sea $x=-3$, $y=-2(-3)-5=1$ así que las rectas se intersectan en $(-3,1)$.

El ángulo que forman las rectas es igual al ángulo que forman sus vectores normales, que son (1,7) y (2,1):

$\cos\theta = (1,7)\cdot(2,1)/|(1,7)||(2,1)| =$

$=(1\cdot 2+7\cdot 1)/(1^2+7^2)^{1/2}(2^2+1^2)^{1/2} = 9/\sqrt{50}\sqrt{5}$

$\theta = \arccos(9/\sqrt{50}\sqrt{5}) = \arccos(0.56921) = 0.965$ radianes.

Problema.

5. ¿En que punto y con que ángulo se cruzan estas rectas?

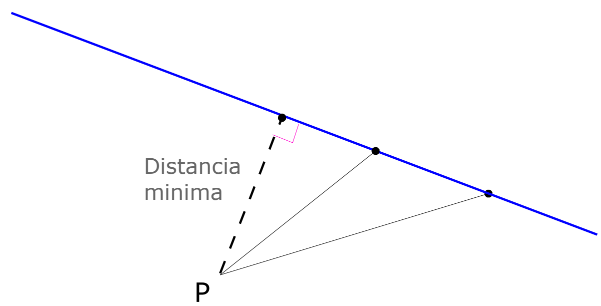
   a. $x+2y=3$ y $3x-y=4$

   b. $P(t)=(2t-1,-t+2)$ y $Q(s)=(s+3,3s+5)$

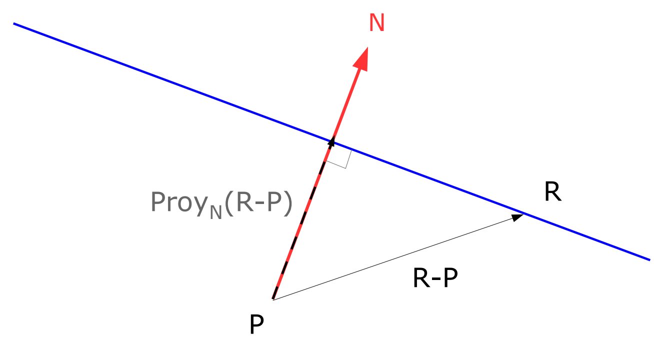
   c. $x+2y=3$ y $Q(s)=(4s+1,3s-2)$

Distancia de una recta a un punto.

La distancia de una recta a un punto P es la mínima distancia entre un punto de la recta y P. Por el teorema de Pitágoras esta es la longitud del segmento perpendicular a la recta desde P.



El vector que va de P al punto mas cercano en la recta se obtiene proyectando cualquier vector que va de P a un punto de la recta en la dirección del vector N normal a la recta.

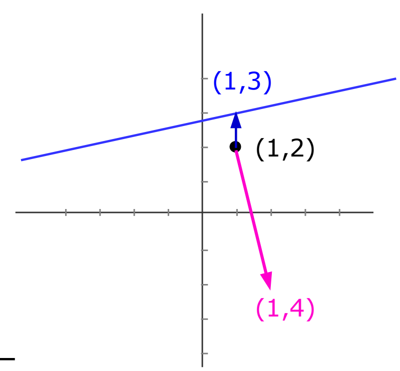


$$\text{Proy}_N(R-P) = \frac{(R-P)\cdot N}{N\cdot N}\; N$$

$$\textit{Distancia} = |\text{Proy}_N(R-P)| = \frac{(R-P)\cdot N}{|N|}$$

Ejemplos.

¿Cual es la distancia del punto (1,2) a la recta $R(t)=(1+4t,3-t)$?



P = (1,2) y un punto de la recta es R=(1,3) , R-P= (0,1)

Un vector normal a la recta es N=(1,4)

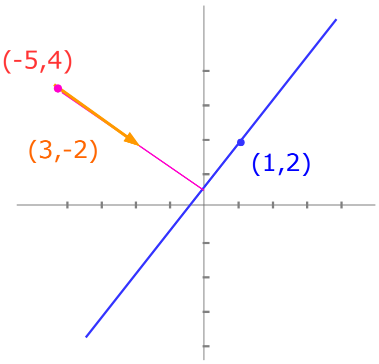
La distancia es $|\text{Proy}_{(1,4)}(0,1)| = \dfrac{|(0,1)\cdot(1,4)|}{|(1,4)|} = \dfrac{|0\cdot1+1\cdot4|}{\sqrt{1^2+4^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$

¿Cual es el punto de la recta $R(t)=(1+4t,3-t)$ mas cercano a $(1,2)$?

$P = (1,2)$ y un punto de la recta es $R=(1,3)$, $R-P= (0,1)$

Un vector normal a la recta es $N=(1,4)$ así que el punto mas cercano es

$$(1,2)+\mathrm{Proy}_{(1,4)}(0,1) = (1,2) + \frac{(0,1)\cdot(1,4)}{(1,4)\cdot(1,4)} (1,4) = (1,2) + \frac{4}{17}(1,4) = (21/17,50/17)$$



¿Cual es la distancia del punto $(-5,4)$ a la recta $3x - 2y = -1$?

Un vector normal a la recta es $N=(3,-2)$.

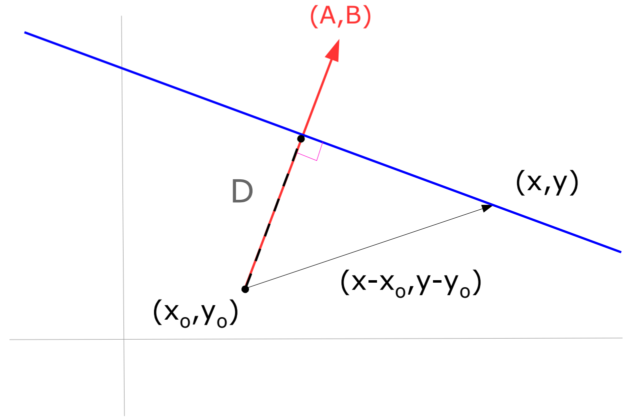
Un punto de la recta es $R=(1,2)$ y $R-P=(1,2)-(-5,4)=(6,-2)$.

$$D = |\mathrm{Proy}_{(3,2)}(6,-2)| = \frac{(6,-2)\cdot(3,-2)}{|(3,2)|} = \frac{|6\cdot3+2\cdot2|}{\sqrt{3^2+2^2}} = 22/\sqrt{13}$$

¿Cual es el punto de la recta $3x - 2y = -1$ mas cercano a $(-5,4)$?

$$(-5,4)+\mathrm{Proy}_{(3,2)}(6,-2) = (-5,4) + \frac{(6,-2)\cdot(3,-2)}{(3,2)\cdot(3,-2)}(3,-2) = (-5,4) + \frac{22}{13}(3,-2) = (1/13,8/13)$$

Lema. La distancia D de la recta $ax + by + c = 0$ al punto (x_0,y_0) es $|ax_0 + by_0 + c| / |(a,b)|$



Demostración.

Distancia $= |\mathrm{Proy}_{(A,B)}(x-x_0,y-y_0)|$

$= |(a,b) \cdot (x-x_0,y-y_0)| / |(a,b)|$

$= |ax +by - ax_0 - by_0|/ |(a,b)|$

$= |-c - ax_0 - by_0 |/ |(a,b)|$ (ya que $ax+by=-c$ para todos los puntos en la recta)

$= |ax_0 + by_0 + c| / |(a,b)|$

En particular, la distancia al origen es $|c|/|(a,b)|$ •

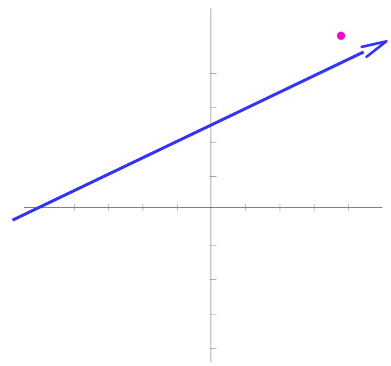
Ejemplos.

- La distancia de la recta $2x-3y+4=0$ al origen es $D = |c| /|(a,b)| = 4 / \sqrt{2^2+3^2} = 4/\sqrt{13}$.

- La distancia de la recta $2x-3y+4=0$ al punto $(5,7)$ es $D = |ax_o + by_o + c| /|(a,b)| =$
  $= |2\cdot 5-3\cdot 7+4|/\sqrt{2^2+3^2} = 7/\sqrt{13}$

Ejemplo. Un punto se mueve en el plano siguiendo las trayectoria $P(t)=(2t+1,t+3)$.
¿En que momento estará mas cerca del punto $(4,5)$?

$P(t)=(2t+1,t+3)$ está mas cerca de $(4,5)$ cuando el vector que apunta de $(4,5)$ a $P(t)$, que es $P(t)-(4,5) = (2t-3,t-2)$ es perpendicular a la dirección de $P(t)$ que es $(2,1)$.



Esto ocurre cuando

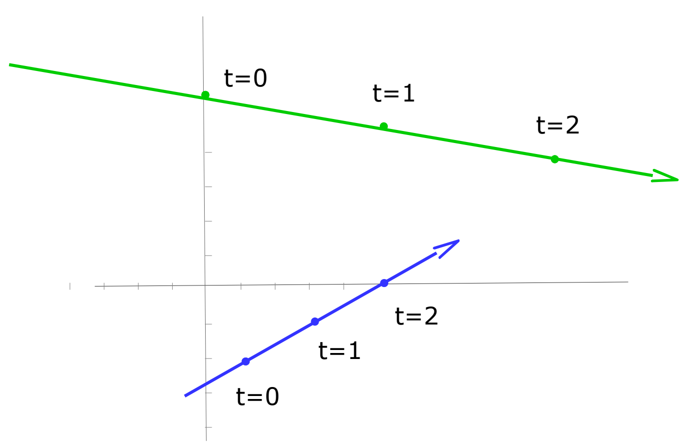
$0= (2t-3,t-2) \cdot (2,1) = 4t-6+t-2 = 5t-8$ $\qquad t = {}^{8}/_{5}$

Ejemplo. Dos puntos P y Q se mueven en el plano siguiendo las trayectorias $P(t)=(2t+1,t-2)$ y $Q(t)=(5t,-t+6)$ respectivamente. ¿En que momento estarán mas cerca uno de otro?

La posición de Q vista desde P está dada por

$D(t) = Q(t) - P(t) = (3t-1,-2t+8)$

Esto muestra que visto desde P, Q se mueve en una trayectoria recta $D(t)$. $Q(t)$ estará mas cerca de $P(t)$ cuando $D(t)$ esté mas cerca del origen.



Esto ocurre cuando $D(t)= (3t-1,-2t+8)$ es perpendicular a su dirección, que es $(3,-2)$, es decir cuando

$0= (3t-1,-2t+8) \cdot (3,-2) = 9t-3+4t-16 = 13t-19$ es decir en $t = {}^{19}/_{13}$

Problemas

6. Calcula la distancia del punto a la recta y encuentra el punto mas cercano en la recta.

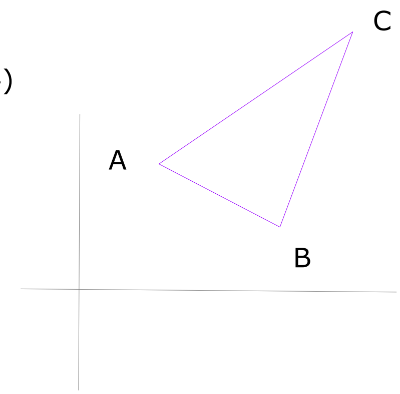
   a. $2x+3y=5$ al punto $(4,1)$ b. $P(t)=(3t+2,4t-1)$ al punto $(5,6)$

7. En el triángulo con vértices $A=(1,2)$, $B=(3,1)$ y $C=(4,4)$ da una parametrización y una ecuación cartesiana para

   a. La mediatriz del lado BC

   b. La mediana por A

   c. La bisectriz por C



8. En el triángulo de arriba, calcula las distancias

   a. de A al lado BC

   b. de A a la mediatriz de BC

9. Las posiciones de dos puntos en movimiento están dadas por $p(t)=(5t-2,t+6)$ y por $q(t)=(t-2,-2t+9)$ ¿Cuales son sus posiciones en el momento de mayor acercamiento?